Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Ejercicios Tema 1

M. C. González Dávila, I. Gutiérrez Sagredo, D. Iglesias Ponte

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Comprobar que la curva $\alpha\colon(-1,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t)=\Big(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\Big),$$

es una curva parametrizada y estudiar su regularidad. Calcular la recta tangente en $t=0$. (Esta curva se conoce como que el folio de Descartes).

Si calculamos la derivada nos queda

$$\alpha'(t)=\left(\frac{3(1-2t^2)}{(1+t^3)^2},\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\right). \tag{1}$$

Más generalmente, la derivada k-ésima queda de la forma

$$\alpha^{(k)}(t)=\left(\frac{P_k}{(1+t^3)^{2k}},\frac{Q_k}{(1+t^3)^{2k}}\right),$$

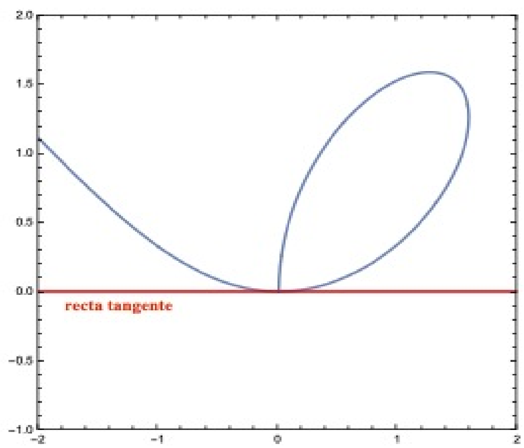
donde P_k y Q_k son polinomios. Por tanto, $\alpha^{(k)}(t)$ es continua en $t\neq-1$ y, así, α es una curva parametrizada diferenciable de clase C^∞.

Para estudiar la regularidad, veamos para qué valores de t la derivada se anula. De (1), $\alpha'(t)=(0,0)$ si y sólo si

$$\left\{\begin{array}{c}1-2t^3=0\\3t(2-t^3)=0\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{c}t=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\\t=0\text{ o }t=\sqrt[3]{2}\end{array}\right\}$$

Por tanto, la curva es regular.

Para calcular la recta tangente en $t = 0$, sabemos que dicha recta pasa por el punto $\alpha(0) = (0, 0)$ y tiene vector director $\alpha'(0) = (3, 0)$. Un cálculo directo muestra que la recta tangente tiene como ecuación $y = 0$.



En este link se puede ver la forma del folio de Descartes y sus rectas tangentes.

2. Razonar, usando el teorema de la función implícita, que dada cualquier función diferenciable definida en un abierto W de $\mathbb{R}^2$, $f\colon W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si el conjunto $\mathcal{C} = f^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, es no vacío y $df_p \neq 0$ $((f_x, f_y) \neq \vec{0})$ para todo $p \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ es la traza de una curva parametrizada regular α. Aplicar este resultado en la **lemniscata de Bernoulli** *$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$.*

Sea $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. Podemos suponer que $\frac{\partial F}{\partial y}_{|p_0} \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existe un entorno abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ de x_0, un entorno abierto de $\mathbb{R}^2$, $U \in \mathrm{Ent}(p_0)$ y una función diferenciable $f \subseteq I \to \mathbb{R}$ con $f(x_0) = y_0$ y

$$U \cap \mathcal{C} = \{(x, f(x)) \mid x \in I \qquad (2)$$

Así, si construimos la curva parametrizada $\alpha(t) = (t, f(t))$ se cumple que $\alpha'(t) = (1, f'(t))$ con lo que α es regular y de (2), la traza $\alpha(I)$ es $U \cap \mathcal{C}$.

Si calculamos la diferencial de $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$, se tiene que

$$dF(x, y) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) = (2x(2x^2 + 2y^2 - 1), 2y(2x^2 + 2y^2 + 1))$$

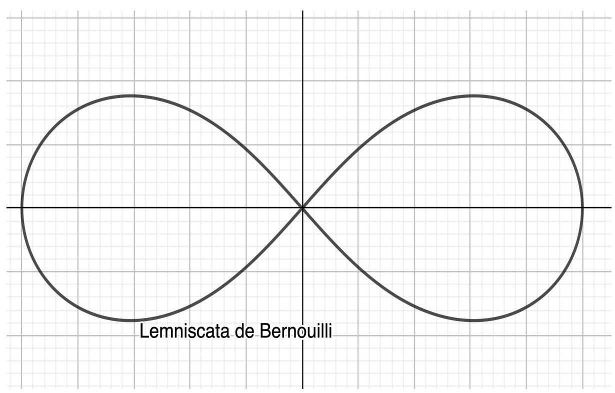
Entonces, $dF(x,y) = (0,0)$ si y sólo si

$$\begin{cases} x = 0, \ y = 0 \\ x = 0, \ 2x^2 + 2y^2 + 1 = 0 \\ x = 0, \ 2x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 1 = 0, \ 2x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

El segundo y cuarto casos son imposibles con lo que los puntos donde la diferencial $dF(x,y)$ se anula son

$$(0,0), \qquad (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \qquad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

De estos tres puntos, el único que pertenece a $\mathcal{C} = F^{-1}(0)$ es el $(0,0)$, con lo que para cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$, $\mathcal{C}$ es la traza de una curva parametrizada regular.



3. Verificar que β es una reparametrización de α donde

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \operatorname{sen} t), \quad t \in (0,1),$$

$$\beta(u) = (4u^2 + 4u + 4, 2u - 6, \operatorname{sen}(2u + 1)), \quad u \in (-\frac{1}{2}, 0).$$

Consideramos la función

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & (-\frac{1}{2}, 0) & \to & (0,1) \\ & u & \mapsto & 2u + 1 \end{array}$$

Esta aplicación es diferenciable y biyectiva (su inversa es $h^1(t) = \frac{t-1}{2}$). Además, como $h'(u) = 2 \neq 0$, es un difeomorfismo.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\alpha\circ h(u) &= \alpha(2u+1)=((2u+1)^2+3,(2u+1)-7,\operatorname{sen}(2u+1))\\ &= (4u^2+4u+4,2u-6,\operatorname{sen}(2u+1))\\ &= \beta(u).\end{aligned}$$

4. Probar que la curva parametrizada

$$\alpha(s)=\Big(\frac{5}{13}\cos(s),\frac{8}{13}-\operatorname{sen}(s),-\frac{12}{13}\cos(s)\Big),\quad s\in\mathbb{R}.$$

es unitaria.

Tenemos que ver que $||\alpha'(s)||=1$, para todo s. En nuestro caso,

$$\alpha'(s)=\Big(-\frac{5}{13}\operatorname{sen}(s),-\cos(s),\frac{12}{13}\operatorname{sen}(s)\Big)$$

Si calculamos su norma

$$\begin{aligned}||\alpha'(s)|| &= \sqrt{\Big(\frac{5}{13}\Big)^2\operatorname{sen}^2(s)+\cos^2(s)+\Big(\frac{12}{13}\Big)^2\operatorname{sen}^2(s)}\\ &= \sqrt{\frac{12^2+5^2}{13^2}\operatorname{sen}^2(s)+\cos^2(s)}\\ &= 1\end{aligned}$$

5. Obtener una reparametrización por la longitud de arco para la hélice circular $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t)=(r\cos t,r\operatorname{sen}t,ht)$

Sabemos que tenemos que usar la reparametrización

$$h(t)=\int_0^t||\alpha'(u)||du=\int_0^t\sqrt{r^2+h^2}du=\sqrt{r^2+h^2}t.$$

h es un difeomorfismo con inversa

$$h^{-1}(s)=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}s$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\beta(s)=(\alpha\circ h^{-1})(s) &= \alpha(\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}})\\ &= (r\cos\Big(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\Big),r\ \operatorname{sen}\Big(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\Big),\frac{hs}{\sqrt{r^2+h^2}})\end{aligned}$$

6. La curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (Be^{kt}\cos t, Be^{kt}\operatorname{sen} t)$, $B, k > 0$, se le llama **espiral logarítmica.**

a) Probar que esta curva tiene la propiedad de que el ángulo entre el vector $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ es constante (esta propiedad, de hecho, caracteriza a la espiral logarítmica).

b) Encontrar una parametrización unitaria.

a) Para calcular el ángulo usaremos que si θ es el ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}.$$

Calculando $\alpha'(t) = (kBe^{kt}\cos(t) - Be^{kt}\operatorname{sen}(t), kBe^{kt}\operatorname{sen}(t) + Be^{kt}\cos(t))$, deducimos que

$$\alpha(t)\cdot\alpha'(t) = kB^2e^{2kt}.$$

Además, como $||\alpha(t)|| = Be^{kt}$ y $||\alpha(t)|| = Be^{kt}\sqrt{k^2+1}$, concluimos que el ángulo entre $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ es la constante

$$\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}.$$

b) Sea h la parametrización dada por

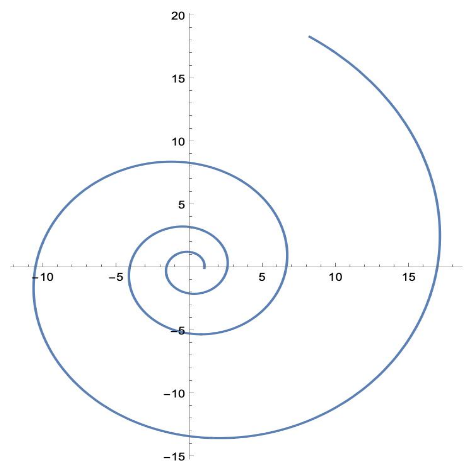
$$h(t) = \int_0^t ||\alpha'(u)||du$$

Un cálculo directo nos muestra que $h(t) = \frac{B}{k}\sqrt{k^2+1}(e^{kt}-1)$ y además $h(-\infty,\infty) = (-\frac{B\sqrt{k^2+1}}{k}, \infty)$. Por tanto, la inversa es

$$\begin{array}{rcl} h^{-1}: \ (-\frac{B\sqrt{k^2+1}}{k}, \infty) & \to & (-\infty, \infty) \\ s & \mapsto & \frac{1}{k}\log\left(\frac{ks}{B\sqrt{k^2+1}}+1\right) \end{array}$$

y la reparametrización viene dada por

$$\begin{aligned} \beta(s) &= (\alpha\circ h^{-1})(s) \\ &= \Bigg(B\Big(\frac{ks}{B\sqrt{k^2+1}}+1\Big)\cos\Big(\frac{1}{k}\log\Big(\frac{ks}{B\sqrt{k^2+1}}+1\Big)\Big), B\Big(\frac{ks}{B\sqrt{k^2+1}}+1\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{1}{k}\log\Big(\frac{ks}{B\sqrt{k^2+ \end{aligned}$$



En este link se puede ver la forma de la espiral logarítmica y sus vectores posición y velocidad.