Tema 1: Medibilidad y medida

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

0 Introducción

Hacia finales del siglo XIX, quedó claro para muchos matemáticos que la integral de Riemann (la estudiada, actualmente, en los primeros cursos de cálculo) debería ser reemplazada por algún otro tipo de integral, más general y flexible, mejor adaptada para tratar los procesos de paso al límite. Entre los notables intentos realizados a tal fin, fue la construcción de Lebesgue la que tuvo más éxito. Como veremos, esta construcción depende de la posibilidad de «medir» conjuntos; es decir, la teoría de la integral de Lebesgue requiere de una teoría de la medida previa.

El propósito de este tema es, justamente, presentar la teoría de la medida necesaria para desarrollar la teoría de la integración de Lebesgue. Tras una primera sección donde se ponen de manifiesto las insuficiencias de la integral de Riemann, se continúa estudiando la teoría de la medida en la recta real, para finalizar exponiendo una generalización de esta teoría a espacios abstractos.

1 Motivación

1.1 La integral de Riemann

La noción de integral que se estudia en los primeros cursos de cálculo se debe al matemático alemán Bernhard Riemann (1854), y es la siguiente:

Definición 1.1 *Dada una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, consideremos una partición $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, y sea $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,\ldots,n)$ un punto arbitrario. El valor*

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

recibe el nombre de suma de Riemann de f respecto a la partición $\mathscr{P}$*, y se dice que f es* integrable (según Riemann) en $[a,b]$ *cuando existe y es finito*

$$\lim_{\operatorname{diam}(\mathscr{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$

donde

$$\operatorname{diam}(\mathscr{P}) = \max_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1}).$$

es el diámetro *de $\mathscr{P}$. En tal caso, dicho límite recibe el nombre de* integral de Riemann de f en $[a,b]$*, y se denota por*

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx.$$

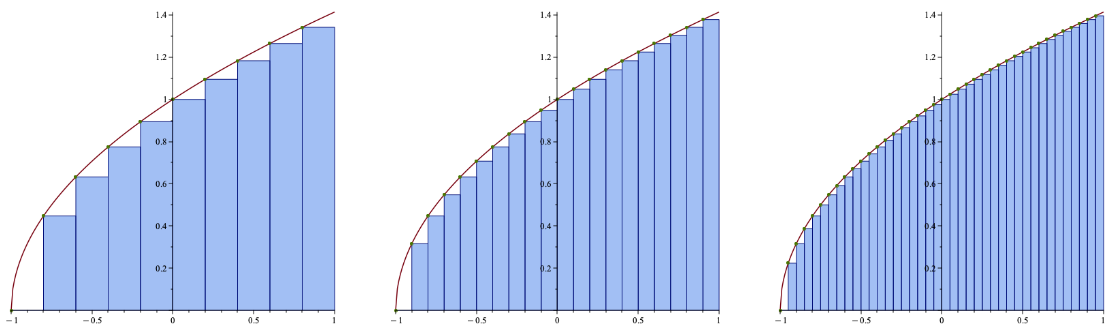

Figura 1. Convergencia de sumas de Riemann [fuente: elaboración propia].

Con esta definición, se prueba que toda función continua es integrable Riemann.

Algunas caracterizaciones de la integrabilidad Riemann, cuya demostración puede encontrarse en la mayoría de textos universitarios, son las recogidas en el siguiente:

Teorema 1.2 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

(i) *f es integrable Riemann en $[a,b]$.*

(ii) (Criterio de Cauchy) *Para todo $\varepsilon>0$, existe una partición $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ de $[a,b]$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)-\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right](x_k-x_{k-1})<\varepsilon.$$

(iii) *Dados $\omega,\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, cualquiera que sea la partición $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ de $[a,b]$ con* $\operatorname{diam}(\mathscr{P})<\delta$, *la suma de las longitudes de los subintervalos $[x_{k-1},x_k]$ para los cuales* $\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)-\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)>\omega$ *es menor que ε.*

(iv) (Condición de Darboux) *Se tiene que*

$$\sup_{\mathscr{P}} L(f,\mathscr{P})=\inf_{\mathscr{P}} U(f,\mathscr{P}),$$

donde, para cualquier partición $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ de $[a,b]$,

$$L(f,\mathscr{P})=\sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,(x_k-x_{k-1}),$$
$$U(f,\mathscr{P})=\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,(x_k-x_{k-1}).$$

(v) (Criterio de Lebesgue) *El conjunto de discontinuidades de f tiene medida (de Lebesgue) nula*[1].

Ejemplo 1.3 (Función de Dirichlet) *La función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

no es integrable Riemann en $[0,1]$.

Resolución. Dada cualquier partición $\mathscr{P}=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1\}$ de $[0,1]$, se tiene:

$$L(f,\mathscr{P})=\sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}0\cdot(x_k-x_{k-1})=0,$$
$$U(f,\mathscr{P})=\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}1\cdot(x_k-x_{k-1})=x_n-x_0=1-0=1.$$

Por tanto, no se cumple la condición de Darboux, impidiendo que f sea integrable Riemann en $[0,1]$. Nótese que esta función es «muy discontinua»: todo punto de $[0,1]$ es un punto de discontinuidad de f. $\square$

Ejemplo 1.4 (Función de Thomae[2]) *La función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x)=\begin{cases}1/q, & x=p/q,\ p\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ q\in\mathbb{N},\ \operatorname{mcd}(p,q)=1\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

[1] El concepto de medida se precisará más adelante (Definición 2.21); por ahora, baste saber que se trata de una generalización del concepto de longitud que es contablemente aditiva. En particular, los conjuntos unitarios y los conjuntos contables tienen medida nula. Lo que viene a afirmar el criterio de Lebesgue es que las funciones integrables Riemann son necesariamente «poco discontinuas».

[2] Carl Johannes Thomae (1840-1921) fue un matemático alemán, doctorado en Gotinga y profesor en las universidades de Gotinga, Halle, Friburgo y Jena, que investigó en teoría de funciones.

es integrable Riemann en $[0,1]$.

Resolución. Observemos, en primer lugar, que $L(f,\mathscr{P})=0$ para cualquier partición $\mathscr{P}=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1\}$ del intervalo $[0,1]$, ya que todo intervalo $[x_{i-1},x_i]$ contiene algún número irracional.

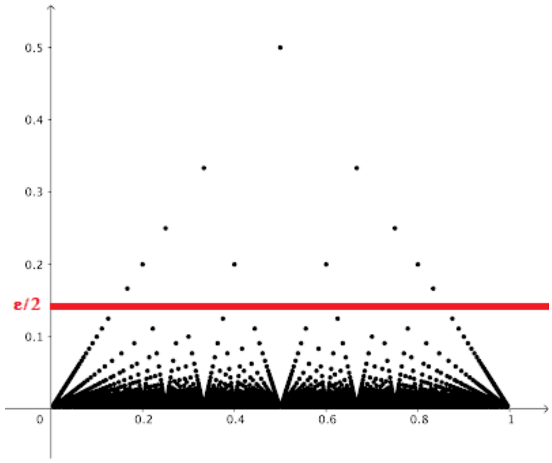

Figura 2. Integrabilidad Riemann de la función de Thomae [fuente: dominio público y elaboración propia].

Por otra parte, dado cualquier $\varepsilon>0$, sólo existe un número finito, digamos n, de racionales irreducibles $x_i=p_i/q_i\in[0,1]$ tales que $f(x_i)=1/q_i>\varepsilon/2$, es decir, $0<q_i<2/\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$. Como $f(0)=f(1)=1$, para ε suficientemente pequeño se tendrá que $\{0,1\}\subset\{x_1,\ldots,x_n\}$. Elegimos una partición $\mathscr{P}$ de $[0,1]$ de modo que $\{x_1,\ldots,x_n\}$ son los puntos medios (extremos en el caso de $0,1$) de subintervalos de $\mathscr{P}$ cuya longitud total sea $\varepsilon/2$. Así, podemos dividir los sumandos de $U(f,\mathscr{P})$ en dos grupos: el correspondiente a los subintervalos antedichos, cuya suma es, como mucho, $1\cdot\varepsilon/2$, y el correspondiente al resto de subintervalos, cuya suma está acotada por el área del rectángulo de base 1 y altura $\varepsilon/2$. En definitiva, $U(f,\mathscr{P})\leq\varepsilon$, de manera que, atendiendo a los criterios de Cauchy o de Darboux, f es integrable.

Nótese que la función de Thomae f es continua en todos los números irracionales y discontinua en todos los racionales y, por lo tanto, también cumple el criterio de integrabilidad de Lebesgue. Para comprobarlo, estableceremos previamente la siguiente propiedad: si $a\in(0,1)$, entonces

$$\lim_{x\to a}f(x)=0.$$

Cuando $a=0$ ó $a=1$, vale el mismo resultado reemplazando el límite por los límites laterales a la derecha de 0 y a la izquierda de 1, respectivamente.

En efecto: supongamos, en primer lugar, que $a\in(0,1)$. Dado $\varepsilon>0$, elegimos $N\in\mathbb{N}$ tal que $1/N<\varepsilon$. El número de racionales irreducibles no negativos con denominadores menores o iguales que N es finito; luego, podemos encontrar $\delta>0$ suficientemente pequeño de tal manera que el intervalo $(a-\delta,a+\delta)$ está contenido en $(0,1)$ y además no contiene ninguna de esas fracciones, excepto, posiblemente, al número a. Elijamos x tal que $0<|x-a|<\delta$ y consideremos dos casos. Si $x=p/q$ es racional e irreducible entonces q debe ser mayor que N, así que

$$|f(x)-0|=\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\frac{1}{q}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

Por otra parte, si x es irracional también tenemos que $|f(x)-0|=0<\varepsilon$. En cualquier caso, dado $\varepsilon>0$, hemos encontrado $\delta>0$ tal que $0<|x-a|<\delta$ implica $|f(x)-0|<\varepsilon$; es decir, $\lim_{x\to a}f(x)=0$. Finalmente, si $a=0$ ó $a=1$ vale el mismo argumento anterior, restringiendo x a intervalos del tipo $(0,\delta)$ ó $(1-\delta,1)$, respectivamente.

Con ayuda de este resultado podemos estudiar fácilmente la continuidad de la función de Thomae: supongamos que $a\in(0,1)$; si a es irracional, entonces $f(a)=0=\lim_{x\to a}f(x)$ y f es continua en a; mientras que si $a=p/q$ es racional e irreducible, entonces

$$f(a)=f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\neq0=\lim_{x\to a}f(x),$$

y f es discontinua en a. Por último, si $a = 0$ ó $a = 1$ entonces $f(a) = 1$, y se llega a la misma conclusión de discontinuidad reemplazando el límite por los laterales correspondientes. □

El proceso de integración, una vez establecida la clase de las funciones que son integrables Riemann, descansa en los siguientes resultados:

Teorema 1.5 (Primer teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann) *Supongamos que f es integrable Riemann en $[a,b]$. Se define la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por*

$$F(x) = \text{(R)}\int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b]). \tag{1}$$

Entonces F es lipschitziana[3] *en $[a,b]$. Además, si f es continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Teorema 1.6 (Segundo teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann) *Si F es derivable en $[a,b]$ y F' es integrable Riemann en $[a,b]$, entonces*

$$\text{(R)}\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 1.7 *Una función no integrable Riemann f puede poseer una primitiva F; que, por tanto, no será expresable en la forma* (1).

Resolución. En efecto, la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene una primitiva $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Sin embargo, F no es expresable en la forma (1), ya que $F' = f$ no es acotada y, por tanto, no es integrable Riemann. □

Ejemplo 1.8 (V. Volterra, 1881) *Existe una función derivable F cuya derivada F' es acotada, pero no integrable Riemann.*

Resolución. Cf. J.C. Ponce-Campuzano, M.Á. Maldonado-Aguilar: Vito Volterra's construction of a nonconstant function with a bounded, non-Riemann integrable derivative, *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, **30**(2) (2015), 143–152. □

Con respecto a la convergencia de sucesiones, el resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 1.9 (Convergencia de funciones integrables Riemann) *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables Riemann que converge uniformemente a f en $[a,b]$. Entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$, y*

$$\text{(R)}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \text{(R)}\int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Ejemplo 1.10 *El límite puntual de una sucesión de funciones integrables Riemann puede no ser integrable Riemann.*

[3] Recordemos que una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice *lipschitziana* si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| \quad (x, y \in [a,b]).$$

Resolución. Sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales en $[0,1]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \chi_{\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1,q_2,\ldots,q_n\} \\ 0, & x \notin \{q_1,q_2,\ldots,q_n\}. \end{cases}$$

Las funciones f_n $(n \in \mathbb{N})$ son integrables Riemann en $[0,1]$, porque cada una de ellas posee un número finito de discontinuidades. Su límite puntual es la función de Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, que, como sabemos (Ejemplo 1.3), no es integrable Riemann en $[0,1]$.

En efecto, fijado $x \in [0,1]$, si $x \notin \mathbb{Q}$ está claro que $f_n(x) = 0 = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x = q_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y $f_n(x) = 1 = f(x)$ para todo $n \geq m$. En ambos casos, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

La convergencia de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f no es uniforme, ya que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tanto, no se contradice el Teorema 1.9. □

Ejemplo 1.11 *El límite puntual de una sucesión de funciones integrables Riemann puede ser integrable Riemann, sin que el límite de la sucesión de integrales sea la integral de la función límite.*

Resolución. Consideremos las funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0, & x \in \{0\} \cup \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Observamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones integrables Riemann en $[0,1]$ que converge puntualmente en ese intervalo a la función integrable Riemann $f = 0$: dado $x \in (0,1]$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/n \leq x$ para $n \geq m$, así que $f_n(x) = 0 = f(x)$ si $n \geq m$; y es claro que $f_n(0) = 0 = f(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ cualquiera que sea $x \in [0,1]$. Pero

$$\lim_{n\to\infty} \text{(R)} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1 \neq 0 = \text{(R)} \int_0^1 f(x)\, dx.$$

La convergencia de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f no es uniforme, ya que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tanto, tampoco se contradice el Teorema 1.9. □

1.2 Riemann *vs.* Lebesgue

El nuevo concepto de integral que, siguiendo las ideas del matemático francés Henri Lebesgue (1903), desarrollaremos en este curso tratará de solventar las deficiencias que presenta la integral de Riemann:

1. La clase de las funciones integrables Riemann es relativamente pequeña: sólo incluye las funciones acotadas y definidas sobre intervalos compactos que son «poco discontinuas» (cf. Ejemplo 1.3).

2. La integral de Riemann se comporta mal respecto a las propiedades válidas en casi todo punto (es decir, válidas salvo en un conjunto de medida nula). Es ilustrativo el caso de las funciones de Dirichlet (Ejemplo 1.3) y de Thomae (Ejemplo 1.4), que, puesto que $\mathbb{Q}$ tiene medida nula, son iguales en casi todo punto, aunque la primera no es integrable Riemann, mientras que la segunda sí lo es. Más aún, la función de Dirichlet es igual en casi todo punto a la función idénticamente nula, que es, obviamente, integrable Riemann, sin que la función de Dirichlet lo sea.

3. La teoría de la integración de Riemann no resuelve satisfactoriamente el problema de la búsqueda de primitivas: no toda función que admite una primitiva es integrable Riemann, con lo cual esa primitiva no se puede recuperar mediante integración (Ejemplos 1.7 y 1.8).

4. La integral de Riemann tampoco presenta un comportamiento satisfactorio respecto del paso al límite: el límite puntual de una sucesión de funciones integrables Riemann no tiene por qué ser integrable Riemann (Ejemplo 1.10), e, incluso en caso de que lo sea, no necesariamente es posible intercambiar el límite con la integral (Ejemplo 1.11).

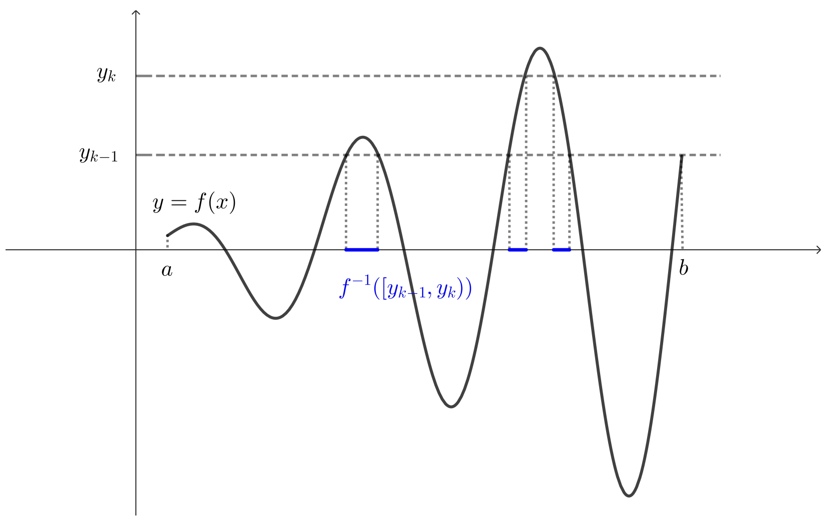

Figura 3. Integral de Lebesgue [fuente: elaboración propia].

La idea crucial de Lebesgue frente a Riemann para definir la integral es considerar particiones del rango, en vez del dominio, de la función. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, supongamos que $\alpha < f(x) < \beta$ $(x \in [a,b])$. Sea $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ una partición de $[\alpha, \beta]$ y consideremos $f^{-1}([y_{k-1}, y_k)) = \{x \in [a,b] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$, para $k = 1, \ldots, n$. Eligiendo arbitrariamente $c_k \in f^{-1}([y_{k-1}, y_k))$, la integral de Lebesgue de f en $[a,b]$ se define como el límite, cuando $n \to \infty$, de las sumas

$$f(c_1)|f^{-1}([y_0, y_1))| + \ldots + f(c_n)|f^{-1}([y_{n-1}, y_n))|,$$

si este límite existe (aquí, $|A|$ denota la medida del conjunto A). El propio Lebesgue comparaba su integral con la de Riemann en los siguientes términos: si se trata de calcular el importe al que ascienden unas monedas esparcidas sobre una mesa, Riemann trocearía el tablero en rectángulos y sumaría el valor de las monedas que caen en cada rectángulo; el enfoque de Lebesgue supone efectuar la suma agrupando previamente las monedas por valores, contando cuántas hay de cada valor y multiplicando este por el número de monedas de su grupo. Convendremos con Lebesgue en que el segundo procedimiento es más eficiente...

Esta simple idea permite, sin ir más lejos, calcular la integral de la función de Dirichlet (Ejemplo 1.3):

$$\text{(L)} \int_0^1 f(x)\, dx = 1 \cdot |[0,1] \cap \mathbb{Q}| + 0 \cdot |[0,1] \setminus \mathbb{Q}| = 0.$$

La necesidad de medir adecuadamente las «longitudes» de las antiimágenes de intervalos en la nueva integral obligaba a desarrollar una teoría de la medida que fuera lógica y consistente. Se dedicaron muchos esfuerzos, entre los que destacaremos los de Émile Borel, Constantin Carathéodory, Camille Jordan y el propio Lebesgue, hasta construir la medida de Lebesgue, válida para casi todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. El siguiente paso fue definir las funciones medibles y establecer los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue, mucho más flexibles que los de la integral de Riemann, lo cual permitió ampliar significativamente la clase de funciones integrables y convirtió la nueva integral en una herramienta básica del análisis matemático.

Bernhard Riemann (1826-1866). Camille Jordan (1838-1922). Émile Borel (1871-1956). Henri Lebesgue (1875-1941). Constantin Carathéodory (1873-1950).

Figura 4. B. Riemann y *los cuatro magníficos* de la teoría de la medida [fuente: dominio público].

2 Medida sobre la recta real

En esta sección consideraremos una clase de subconjuntos (*conjuntos medibles*) de la recta real y las funciones (*funciones medibles*) a las que dan lugar. Para esta amplia clase de funciones construiremos, en el Tema 2, una teoría de la integral. Sobre la clase de los conjuntos medibles (que incluye a los intervalos) definiremos la *medida de Lebesgue*, la cual generaliza la idea de longitud, y, como esta, es invariante bajo traslaciones del conjunto, además de ser contablemente aditiva.

Los métodos que desarrollaremos aquí no sólo tienen interés para la teoría de la integración, sino que constituyen herramientas muy útiles para estudiar conjuntos particulares de la recta real.

2.1 Medida exterior de Lebesgue

Salvo mención expresa en contra, todos los conjuntos considerados en esta sección son subconjuntos de $\mathbb{R}$. Nos interesarán especialmente los intervalos semiabiertos de la forma $I = [a,b)$, donde a, b son finitos: salvo que se diga otra cosa, se supondrá que todos los intervalos son de este tipo. Cuando $a = b$, es $I = \emptyset$. Escribiremos $|I| = b - a$ para denotar la longitud de I.

Definición 2.1 *La* medida exterior de Lebesgue *de un conjunto A viene dada por*

$$m^*(A) = \inf_{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,$$

donde $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ son colecciones contables de intervalos.

Observemos que la medida exterior puede tomar el valor ∞.

Esta definición pretende describir la medida de un conjunto aproximándolo desde el exterior (de ahí su nombre). Cuanto más fino sea el recubrimiento del conjunto, más próxima estará su medida a la suma de las longitudes de los intervalos.

Teorema 2.2 *Se verifica:*

(i) *(Positividad)* $m^*(A) \geq 0$.

(ii) $m^*(\emptyset) = 0$.

(iii) *(Monotonía)* $m^*(A) \leq m^*(B)$ *si* $A \subset B$.

(iv) $m^*(\{x\}) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

Demostración. Los apartados (i), (ii) y (iii) son obvios. Dado $x \in \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ se cumple que $x \in I_\varepsilon = [x, x+\varepsilon)$ con $|I_\varepsilon| = \varepsilon$, así que $m^*(\{x\}) \leq \varepsilon$; haciendo $\varepsilon \to 0$, se sigue (iv). □

Ejemplo 2.3 *Demostrar que para cualquier conjunto A y cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene $m^*(A) = m^*(A+x)$, donde $A + x = \{y + x : y \in A\}$. En otras palabras, la medida exterior es invariante por traslaciones.*

Resolución. Sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de intervalos tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Claramente, $A+x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n+x)$; luego,

$$m^*(A+x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n+x| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

Tomando ínfimos encontramos que $m^*(A+x) \leq m^*(A)$. Como $A=(A+x)-x$, también tenemos $m^*(A) \leq m^*(A+x)$. Se concluye que $m^*(A)=m^*(A+x)$. □

Teorema 2.4 *La medida exterior de un intervalo es igual a su longitud.*

Demostración. Discutiremos los distintos tipos posibles de intervalos.
Caso 1: $I=[a,b]$ es un intervalo cerrado. Como, para cada $\varepsilon>0$, $[a,b]\subset[a,b+\varepsilon)$, necesariamente $m^*(I)\leq b-a+\varepsilon$ y, por la arbitrariedad de ε,

$$m^*(I) \leq b-a = |I|. \tag{2}$$

Para obtener la desigualdad opuesta, observamos que, dado $\varepsilon>0$, la definición de ínfimo permite encontrar un recubrimiento de I por una colección de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $m^*(I)\geq\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|-\varepsilon$, donde, digamos, $I_n=[a_n,b_n)$ $(n\in\mathbb{N})$. Ahora, para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $I_n'=(a_n-\varepsilon/2^n,b_n)\supset I_n$, de modo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'\supset I$. Por compacidad (teorema de Heine-Borel), I puede ser recubierto por una subcolección finita de los $\{I_n'\}_{n=1}^{\infty}$ que denotaremos $\{J_1,\ldots,J_N\}$, donde $J_k=(c_k,d_k)$ $(k=1,\ldots,N)$. Podemos suponer que ningún J_k contiene a otro, y entonces, si $c_1<c_2<\ldots<c_N$,

$$d_N-c_1=\sum_{k=1}^{N}(d_k-c_k)-\sum_{k=1}^{N-1}(d_k-c_{k+1})<\sum_{k=1}^{N}(d_k-c_k)=\sum_{k=1}^{N}|J_k|.$$

Ya que $|I_n'|=b_n-a_n+\varepsilon/2^n=|I_n|+\varepsilon/2^n$ $(n\in\mathbb{N})$, se verifica:

$$\begin{aligned} m^*(I) &\geq \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|-\varepsilon=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|I_n'|-\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)-\varepsilon=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n'|-2\varepsilon \\ &\geq \sum_{k=1}^{N}|J_k|-2\varepsilon > d_N-c_1-2\varepsilon > b-a-2\varepsilon \\ &= |I|-2\varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

La combinación de (2) con (3) y la arbitrariedad de $\varepsilon>0$ completa la prueba de este caso.
Caso 2: $I=(a,b]$, con $a>-\infty$. Si $a=b$, el resultado se deduce del Teorema 2.2 (*ii*). Si $a<b$, supongamos que $0<\varepsilon<b-a$, y escribamos $I'=[a+\varepsilon,b]\subset I$. Como $m^*(I')=|I'|=b-a-\varepsilon=|I|-\varepsilon$, tenemos, por monotonía (Teorema 2.2 (*iii*)),

$$m^*(I)\geq m^*\left(I'\right)=|I|-\varepsilon. \tag{4}$$

Por otra parte, $I\subset I''=[a,b+\varepsilon)$ con $|I''|=b-a+\varepsilon=|I|+\varepsilon$, así que

$$m^*(I)\leq|I''|=|I|+\varepsilon. \tag{5}$$

Puesto que se verifican (4) y (5) para ε arbitrariamente pequeño, se concluye que $m^*(I)=|I|$. Los casos $I=(a,b)$ e $I=[a,b)$ se tratan análogamente.
Caso 3: I es un intervalo infinito. Se tienen entonces cuatro tipos de intervalos; supondremos que $I=(-\infty,a]$, ya que los otros tres se abordan de modo similar. Para cada $M>0$, existe $r\in\mathbb{R}$ tal que el intervalo finito $I_M=[r,r+M)$ está contenido en I. De nuevo por el Teorema 2.2 (*iii*),

$$m^*(I)\geq m^*(I_M)=|I_M|=M,$$

y finalmente, haciendo $M\to\infty$, $m^*(I)=\infty=|I|$. □

El siguiente teorema afirma que m^* es contablemente subaditiva.

Teorema 2.5 *Para cada sucesión* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$*, se tiene que*

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(E_i\right).$$

Demostración. Si el segundo miembro es infinito, no hay nada que probar; supongamos, por tanto, que $\sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(E_i\right) < \infty$. Dados $i \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos $\{I_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j}$ y

$$m^*(E_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |I_{i,j}| - \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j},$$

es decir, los conjuntos $\{I_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ forman un recubrimiento contable de $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Luego,

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + \varepsilon.$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ completa la demostración. □

Ejemplo 2.6 *Probar que para todo conjunto A con $m^*(A) < \infty$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto O que contiene a A, tal que $m^*(O) \leq m^*(A) + \varepsilon$. Deducir que*

$$m^*(A) = \inf_{O \supset A} m^*(O), \tag{6}$$

donde los conjuntos O son abiertos, aun cuando $m^*(A) = \infty$.

Resolución. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| - \varepsilon/2 \leq m^*(A) < \infty$. Si $I_n = [a_n, b_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, pongamos $I_n' = \left(a_n - \varepsilon/2^{n+1}, b_n\right)$, de modo que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$. El conjunto $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$ es abierto, y

$$m^*(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n'| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \frac{\varepsilon}{2} \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Ahora (6) sigue inmediatamente de la definición de ínfimo, y se verifica de forma trivial cuando $m^*(A) = \infty$. □

Ejemplo 2.7 *Supongamos que en la Definición 2.1 se considera que:*

(i) $I_n = (a_n, b_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ *son abiertos;*

(ii) $I_n = [a_n, b_n)$ $(n \in \mathbb{N})$*;*

(iii) $I_n = (a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$*;*

(iv) $I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ *son cerrados; o bien*

(v) *se permiten combinaciones de los distintos tipos de intervalo.*

Demostrar que se obtiene la misma m^*.

Resolución. En el caso (ii) reaparece la m^* de la Definición 2.1. Denotemos la m^* correspondiente como m_o^* en el caso (i), m_{oc}^* en el caso (iii), m_c^* en el (iv), m_m^* en el (v); queremos ver que $m_o^* = m^* = m_{oc}^* = m_c^* = m_m^*$. Efectuaremos sólo la demostración de que $m_o^* = m_m^*$, ya que en los restantes casos es similar.

Sea $E \subset \mathbb{R}$. Por definición, $m_m^*(E) \leq m_o^*(E)$. Para probar que $m_o^*(E) \leq m_m^*(E)$, podemos asumir que $m_m^*(E) < \infty$. En tal caso, dado $\varepsilon > 0$, sea $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de intervalos cualesquiera tales que $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ y $\sum_{n=1}^\infty |I_n| \leq m_m^*(E) + \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea I_n' un intervalo abierto que contiene a I_n, con $|I_n'| = (1+\varepsilon)|I_n|$. Entonces,

$$m_m^*(E) + \varepsilon \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{n=1}^\infty |I_n'|.$$

Pero $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n'$, una unión de intervalos abiertos, así que $m_o^*(E) \leq (1+\varepsilon)(m_m^*(E)+\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Se concluye que $m_o^*(E) \leq m_m^*(E)$, como se requería. □

Ejemplo 2.8 *Los conjuntos contables tienen medida exterior nula.*

Resolución. Es consecuencia de los Teoremas 2.2 (iv) y 2.5. □

Ejemplo 2.9 (Conjunto de Cantor) *El conjunto de Cantor desempeña un importante papel en la teoría de conjuntos. Se construye de la siguiente manera: comenzamos con el intervalo unidad,*

$$C_0 = [0,1].$$

Dividimos este intervalo en tres partes iguales y despreciamos la central, para obtener una unión de $2^1 = 2$ *intervalos cerrados disjuntos de longitud* 3^{-1}*:*

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Haciendo lo mismo con cada uno de los dos intervalos retenidos, queda la siguiente unión de $2^2 = 4$ *intervalos cerrados, disjuntos dos a dos, de longitud* 3^{-2}*:*

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right].$$

Reiterando este proceso, resulta una sucesión $\{C_k\}_{k=1}^\infty$ *de conjuntos cerrados, tales que* $C_{k+1} \subset C_k$ *y cada* C_k *es unión de* 2^k *intervalos cerrados, disjuntos dos a dos, de longitud* 3^{-k} $(k \in \mathbb{N})$. *Por definición, el* conjunto de Cantor *es* $C = \bigcap_{k=1}^\infty C_k$.

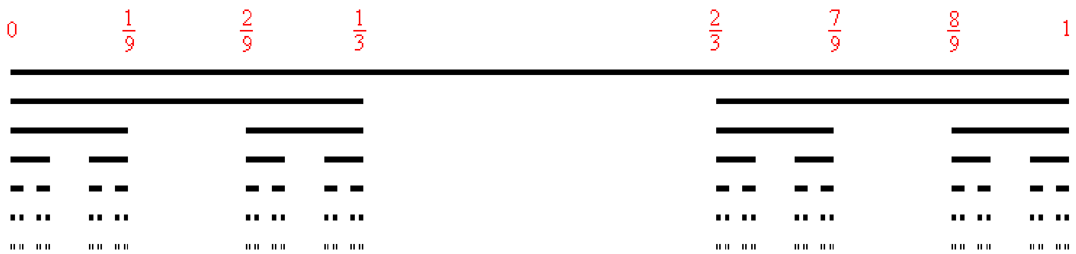

Figura 5. Construcción del conjunto de Cantor [fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Conjunto_de_Cantor.png].

Pues bien, C es no contable y tiene medida exterior nula.

Resolución. Obsérvese, en primer lugar, que C no es vacío, ya que la sucesión formada por los extremos de los intervalos removidos en cada paso están en todos los C_k $(k \in \mathbb{N})$.

- *C es no contable*. Supongamos, para alcanzar una contradicción, que $C = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ es contable. Como C_1 es unión disjunta de dos intervalos cerrados, uno de ellos, digamos I_1, es tal que $x_1 \notin I_1$. De la misma forma, existe $I_2 \subset I_1 \cap C_2$ tal que $x_2 \notin I_2$. Repitiendo el proceso, conseguimos una sucesión de intervalos cerrados y encajados $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$, tales que $I_k \subset C_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Por el teorema de la intersección de Cantor, toda sucesión decreciente de conjuntos no vacíos, cerrados y compactos en cualquier espacio topológico tiene intersección no vacía; luego, existe $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = C = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pero, por construcción, $x \neq x_k$ $(k \in \mathbb{N})$, lo que proporciona la contradicción esperada.

- *C tiene medida exterior nula*. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $C \subset C_k$, donde C_k es unión disjunta de 2^k intervalos cerrados de longitud 3^{-k}. Por subaditividad, $m^*(C) \leq (2/3)^k$ $(k \in \mathbb{N})$, con lo que $m^*(C) = 0$. □

2.2 Conjuntos medibles

Definición 2.10 *Se dirá que el conjunto E es* medible Lebesgue *o, si no cabe ambigüedad, simplemente* medible*, si cumple la* condición de Carathéodory*, esto es, si para cada conjunto A se tiene que*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E). \tag{7}$$

La clase de todos los conjuntos medibles Lebesgue será denotada $\mathscr{M}$.

Puesto que m^* es subaditiva, para probar que E es medible sólo necesitamos verificar que, para cada A,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E). \tag{8}$$

Ejemplo 2.11 *Demostrar que si $m^*(E) = 0$, entonces E es medible.*

Resolución. Por monotonía (Teorema 2.2 (iii)), se satisface (8) para todo conjunto A. □

Ejemplo 2.12 *El conjunto de Cantor es medible.*

Resolución. Ejemplos 2.9 y 2.11. □

Definición 2.13 *Una clase $\mathscr{A}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice una σ-*álgebra *o σ-*cuerpo *si X pertenece a la clase y esta es cerrada bajo complementación y uniones contables:*

(i) $X \in \mathscr{A}$.

(ii) $E^c \in \mathscr{A}$ *cuando* $E \in \mathscr{A}$.

(iii) *Si* $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$, *entonces* $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}$.

Si en (iii) se consideran solamente uniones finitas, se obtiene una estructura denominada álgebra *(o* cuerpo*) de conjuntos.*

Como consecuencia inmediata de la Definición 2.13 y de las leyes de De Morgan –el complementario de una intersección (respectivamente, unión) de conjuntos es la unión (respectivamente, intersección) de los complementarios–, toda σ-álgebra (respectivamente, álgebra) contiene al conjunto vacío y es cerrada bajo intersecciones contables (respectivamente, finitas) de sus elementos.

Nuestro próximo objetivo es demostrar que $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra (Teorema 2.17), para lo que se requerirán los tres lemas previos siguientes.

Lema 2.14 *$\mathscr{M}$ es un álgebra.*

Demostración. Se tiene que $\mathbb{R} \in \mathscr{M}$, ya que, para cualquier $A \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*(A \setminus \mathbb{R}) = m^*(A) + m^*(\emptyset) = m^*(A).$$

La simetría entre E y E^c en la condición de Carathéodory prueba que $\mathscr{M}$ es cerrada por complementación: si $E \in \mathscr{M}$ entonces, para cualquier $A \subset \mathbb{R}$, se cumple

$$m^*(A \cap E^c) + m^*(A \setminus E^c) = m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap (E^c)^c) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E) = m^*(A),$$

así que $E^c \in \mathscr{M}$. Por último, supongamos que $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{M}$; queremos ver que $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathscr{M}$. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Para $n = 2$, la condición (7), con $A \cap (E_1 \cup E_2) \subset \mathbb{R}$ y $E_1 \in \mathscr{M}$, proporciona

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2). \tag{9}$$

Aplicando nuevamente (7), esta vez con $A \cap E_1^c \subset \mathbb{R}$ y $E_2 \in \mathscr{M}$, resulta

$$m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = m^*(A \cap E_1^c),$$

o bien

$$m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) = m^*(A \cap E_1^c) - m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{10}$$

Insertando (10) en (9) encontramos que

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) - m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c),$$

y de aquí, finalmente,

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2)) = m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A),$$

ya que $E_1 \in \mathscr{M}$. Se concluye que $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{M}$. La demostración se completa por inducción finita. □

Lema 2.15 *Si $\{E_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, es decir, tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, entonces*

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i) \quad (A \subset \mathbb{R}).$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Sea $A \subset \mathbb{R}$.

Para $n = 1$, el resultado es trivial.

Para $n = 2$, puesto que $E_2 \in \mathscr{M}$, la condición (7), con $A \cap (E_1 \cup E_2) \subset \mathbb{R}$, permite escribir:

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_2) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_2^c) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2),$$

donde hemos usado que $E_2 \subset E_1 \cup E_2$ y $E_1 \subset E_2^c$.

Suponemos cierto el resultado para $n-1$:

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i).$$

Lo probamos para n, teniendo en cuenta que vale para $n = 2$, que tanto $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ como E_n son medibles, con $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \cap E_n = \emptyset$, y la hipótesis inductiva:

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) + m^*(A \cap E_n) = \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Esto completa la demostración. □

El siguiente lema establece que, al considerar uniones contables de conjuntos medibles, no se pierde generalidad suponiendo que estos conjuntos son disjuntos dos a dos.

Lema 2.16 *Dada $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathscr{M}$, existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathscr{M}$ tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n E_i$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$.*

Demostración. Definimos los conjuntos

$$B_1 = E_1, \qquad B_i = E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j \quad (i \in \mathbb{N},\ i \geq 2),$$

cuya medibilidad viene garantizada por el Lema 2.14. Si, digamos, $i < j$, entonces

$$B_j = E_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_k \subset \bigcap_{k=1}^{j-1} E_k^c \subset E_i^c \subset B_i^c.$$

Por tanto, los conjuntos $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Procedemos a demostrarlo por inducción sobre n.

Si $n = 1$, la igualdad es trivialmente cierta: $B_1 = E_1$.

Si $n = 2$, se tiene que $B_1 = E_1$ y $B_2 = E_2 \setminus E_1$. Por tanto,

$$B_1 \cup B_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c) = E_1 \cup E_2.$$

Suponemos cierta la igualdad para $n-1$: $\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$.

La probamos para n:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \cup B_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \cup \Big(E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\Big)^c\right] = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Es claro ahora que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. La demostración queda, así, completa. □

Teorema 2.17 *La clase $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Atendiendo al Lema 2.14, basta ver que si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \in \mathscr{M}$ $(i \in \mathbb{N})$, entonces $E \in \mathscr{M}$. Además, por el Lema 2.16 podemos suponer que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset E$. Entonces $F_n \in \mathscr{M}$ y $E^c \subset F_n^c$. Dado $A \subset \mathbb{R}$, se verifica:

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c).$$

En virtud del Lema 2.15,

$$m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i),$$

de modo que

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c).$$

Como la desigualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, un paso al límite, junto con la subaditividad de m^*, permiten concluir que

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c) \geq m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$ □

Ejemplo 2.18 *Demostrar que si $F \in \mathscr{M}$ y $m^*(F \triangle G) = 0$, entonces $G \in \mathscr{M}$. Aquí, $F \triangle G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F)$ es la* diferencia simétrica *de F y G.*

Resolución. Por el Ejemplo 2.11 se sabe que $F \triangle G$ es medible, y por monotonía, que también lo son sus subconjuntos $F \setminus G$ y $G \setminus F$. El Teorema 2.17 (o el Lema 2.14) garantizan que $F \cap G = F \setminus (F \setminus G)$ es medible y que $G = (F \cap G) \cup (G \setminus F)$ también lo es. □

Teorema 2.19 *Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces*

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i);$$

es decir, m^* es contablemente aditiva sobre $\mathscr{M}$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, el Teorema 2.17 (o el Lema 2.14) aseguran que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M}$. Aplicando la monotonía de m^* y el Lema 2.15 con $A = \mathbb{R}$ encontramos que

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = m^*\left(\mathbb{R} \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(\mathbb{R} \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sin más que tomar límites cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i),$$

lo cual, junto con el Teorema 2.5, completa la demostración. □

Observación 2.20 *Más adelante, en la Sección 2.5, se probará que m^* no es, en general, contablemente aditiva. Resulta evidente que el contraejemplo dependerá de la existencia de conjuntos no medibles, para lo cual habremos de asumir el axioma de elección.*

Definición 2.21 *Si E es un conjunto medible, escribimos $m(E)$ en vez de $m^*(E)$. Queda así definida una función de conjunto m sobre la σ-álgebra $\mathscr{M}$ de los conjuntos medibles; el Teorema 2.19 garantiza que m es una función de conjunto contablemente aditiva. El valor $m(E)$ se denomina* medida de Lebesgue *de E.*

Teorema 2.22 *Todo intervalo es medible. La medida de Lebesgue de un intervalo es su longitud.*

Demostración. Podemos suponer que el intervalo es de la forma $[a,\infty)$, ya que entonces el Teorema 2.17 proporciona el resultado para los otros tipos de intervalo. Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$, queremos probar que

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap [a,\infty)) + m^*(A \cap (-\infty,a)). \tag{11}$$

Es claro que basta considerar el caso $m^*(A) < \infty$. Pongamos $A_1 = A \cap [a,\infty)$ y $A_2 = A \cap (-\infty,a)$. Dado $\varepsilon > 0$, existen intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| - \varepsilon$. Escribimos $I_n' = I_n \cap [a,\infty)$ e $I_n'' = I_n \cap (-\infty,a)$, de modo que $|I_n| = |I_n'| + |I_n''|$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces

$$A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n', \quad A_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''.$$

Por tanto,

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n'| + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n''| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon,$$

probando (11). La afirmación sobre la medida de Lebesgue de los intervalos sigue inmediatamente del Teorema 2.4 y la Definición 2.21. □

Teorema 2.23 *Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Existe la menor σ-álgebra sobre X que contiene a $\mathscr{A}$.*

Demostración. La clase de todos los subconjuntos o partes de X, $\mathscr{P}(X)$, es una σ-álgebra sobre X que contiene a $\mathscr{A}$. La intersección de todas las σ-álgebras sobre X que contienen a $\mathscr{A}$ satisface los axiomas de la Definición 2.13 y es, por tanto, una σ-álgebra sobre X, necesariamente la menor, que contiene a $\mathscr{A}$. □

Definición 2.24 *Se llama* σ-álgebra generada por la familia $\mathscr{A}$ *a la clase* $\sigma(\mathscr{A})$ *cuya existencia asegura el Teorema 2.23. Este teorema permanece válido, con la misma demostración, si se reemplaza* σ*-álgebra por álgebra, obteniéndose en tal caso el* álgebra generada por $\mathscr{A}$.

Definición 2.25 *Denotamos por* $\mathscr{B}$ *la* σ*-álgebra generada por la clase de los intervalos de la forma* $[a,b)$*; sus miembros se denominan* conjuntos de Borel *o* borelianos *de* $\mathbb{R}$.

Teorema 2.26 *Se verifica:*

(i) $\mathscr{B} \subset \mathscr{M}$*, es decir, todo boreliano es medible.*

(ii) $\mathscr{B}$ *es la* σ*-álgebra generada por cada una de las siguientes clases de conjuntos: los intervalos abiertos; los conjuntos abiertos; los conjuntos* G_δ *(intersecciones contables de abiertos, cuya clase denotaremos por* $\mathscr{G}_\delta$*); los conjuntos* F_σ *(uniones contables de cerrados, cuya clase denotaremos por* $\mathscr{F}_\sigma$*).*

Demostración.

(i) Por los Teoremas 2.17 y 2.22, $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra, que contiene a los intervalos de la forma $[a,b)$; luego, también contendrá a la σ-álgebra generada por estos intervalos, que es la menor que los contiene.

(ii) Sea $\mathscr{B}_o$ la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos. Todo intervalo (a,b) es un boreliano, porque puede ser expresado como unión de la sucesión de intervalos $\{[a+1/n,b)\}_{n=1}^{\infty}$, así que $\mathscr{B}_o \subset \mathscr{B}$. Inversamente, todo intervalo de la forma $[a,b)$ está en $\mathscr{B}_o$, ya que es intersección de la sucesión de intervalos abiertos $\{(a-1/n,b)\}_{n=1}^{\infty}$; por lo tanto, $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}_o$. Se concluye que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_o$.

Sea ahora $\mathscr{B}_\tau$ la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos. Puesto que todo intervalo abierto es un conjunto abierto, la σ-álgebra generada por los segundos contiene a la generada por los primeros: $\mathscr{B}_\tau \supset \mathscr{B}$. Inversamente, como todo abierto es unión contable de intervalos abiertos, los conjuntos abiertos son borelianos, de modo que $\mathscr{B}_\tau \subset \mathscr{B}$ y se obtiene la igualdad: $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\tau$.

Finalmente, la clase $\mathscr{G}_\delta$ contiene a los abiertos, obligando a que $\mathscr{B} \subset \sigma(\mathscr{G}_\delta)$. Similarmente, la clase $\mathscr{F}_\sigma$ contiene a los cerrados, que, por tanto, están contenidos en $\sigma(\mathscr{F}_\sigma)$; por complementación, $\sigma(\mathscr{F}_\sigma)$ contiene a los abiertos, y entonces $\mathscr{B} \subset \sigma(\mathscr{F}_\sigma)$. Inversamente, los conjuntos G_δ y F_σ se obtienen a partir de familias numerables de conjuntos abiertos usando únicamente las operaciones de intersección y complementación, es decir, son borelianos, de donde se sigue que $\sigma(\mathscr{G}_\delta) \subset \mathscr{B}$ y $\sigma(\mathscr{F}_\sigma) \subset \mathscr{B}$. Queda así probado que $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{G}_\delta) = \sigma(\mathscr{F}_\sigma)$, lo que completa la demostración. □

Observación 2.27 *Se verá más adelante, en la Sección 2.5, que* $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{M}$*, es decir, que existen conjuntos medibles que no son de Borel.*

Definición 2.28 *Dada una sucesión de conjuntos* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$*, se definen sus* límites superior e inferior*, respectivamente, por*

$$\limsup_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \qquad \liminf_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i.$$

De la definición se infiere sin dificultad que $\liminf_{i\to\infty} E_i \subset \limsup_{i\to\infty} E_i$; si se da la igualdad, este conjunto se denota por $\lim_{i\to\infty} E_i$. También se sigue de la definición que $\limsup_{i\to\infty} E_i$ es el conjunto de los puntos que pertenecen a una infinidad de conjuntos E_i, mientras que $\liminf_{i\to\infty} E_i$ es el conjunto de los puntos que pertenecen a todos los conjuntos E_i excepto a un número finito de ellos. Es, igualmente, inmediato que si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ entonces $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, mientras que si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, entonces $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Este comportamiento es el análogo al hecho de que las sucesiones numéricas monótonas son convergentes.

Teorema 2.29 *Sea* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de conjuntos medibles. Entonces:*

(i) *Si* $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$*, se tiene* $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$.

(ii) Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, y si $m(E_1) < \infty$, se tiene $m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$.

Por tanto, en ambos casos,

$$m\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i).$$

Demostración.

(i) Aplicamos el Lema 2.16 para obtener una familia $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, tales que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Como la sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es creciente, los conjuntos $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ adoptan la forma

$$B_1 = E_1, \qquad B_i = E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j = E_i \setminus E_{i-1} \quad (i \geq 2)$$

y satisfacen

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

La aditividad contable de $m = m^*|_{\mathscr{M}}$ (Teorema 2.19 y Definición 2.21) ya permite escribir

$$m\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n),$$

como se requería.

(ii) A partir de $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, producimos la sucesión creciente $\{E_1 \setminus E_i\}_{i=1}^{\infty}$:

$$E_1 \setminus E_1 \subset E_1 \setminus E_2 \subset E_1 \setminus E_3 \subset \ldots.$$

Sigue de (i) que

$$\lim_{i\to\infty} m(E_1 \setminus E_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_i)\right) = m\left(E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right). \tag{12}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $E_1 = (E_1 \setminus E_i) \cup E_i$, con unión disjunta, así que $m(E_1) = m(E_1 \setminus E_i) + m(E_i)$. Como, por monotonía, $m(E_i) < \infty$, es posible despejar para obtener

$$m(E_1 \setminus E_i) = m(E_1) - m(E_i) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{13}$$

Similarmente,

$$m\left(E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = m(E_1) - m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right). \tag{14}$$

Insertando (13) y (14) en (12), resulta

$$m(E_1) - \lim_{i\to\infty} m(E_i) = m(E_1) - m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right), \tag{15}$$

de donde, al ser $m(E_1) < \infty$, concluimos:

$$\lim_{i\to\infty} m(E_i) = m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = m\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right). \qquad \square$$

Figura 6. John Edensor Littlewood (1885-1977) [fuente: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Littlewood/].

Ejemplo 2.30 *Demostrar, mediante un contraejemplo, que el resultado del Teorema 2.29 (ii) puede ser falso si $m(E_1) = \infty$.*

Resolución. Basta considerar los intervalos $E_i = (i, \infty)$ $(i \in \mathbb{N})$, para los que se tiene $\lim_{i\to\infty} E_i = \emptyset$ y, por tanto, $m(\lim_{i\to\infty} E_i) = 0$, aunque $\lim_{i\to\infty} m(E_i) = \infty$. □

2.3 Regularidad

En su libro de texto *Lectures on the theory of functions*[4], el matemático británico John E. Littlewood escribe:

> *In this section we set out those parts of the theory of real functions which we require later. [...] The extent of knowledge required is nothing like so great as is sometimes supposed. There are three principles, roughly expressible in the following terms: Every (measurable) set is nearly a finite sum of intervals; every function (of class L^λ) is nearly continuous; every convergent sequence of functions is nearly uniformly convergent. Most of the results of the present section are fairly intuitive applications of these ideas.*

La traducción libre de este párrafo viene a ser la siguiente:

> *La cantidad de conocimientos necesarios en la teoría de funciones reales no es tan grande como a veces se supone. Hay tres principios, que se expresan, a grandes rasgos, de la siguiente manera:*
>
> I. *Todo conjunto medible es casi una unión finita de intervalos.*
>
> II. *Toda función integrable es casi continua.*
>
> III. *Toda sucesión convergente de funciones medibles es casi uniformemente convergente.*
>
> *La mayoría de los resultados de la teoría consiste en aplicaciones bastante intuitivas de estas tres ideas.*

Nuestro próximo resultado materializa el *primer principio de Littlewood*: los conjuntos medibles son aquellos que pueden ser aproximados, en términos de medida exterior, por conjuntos abiertos o cerrados y, si su medida exterior es finita, también por uniones finitas de intervalos. Esta propiedad de m^*, relativa a abiertos y cerrados, se conoce como *regularidad exterior* y *regularidad interior*, respectivamente. Los otros dos principios se corresponden con los teoremas de Lusin y Egorov, de los que tendremos ocasión de ocuparnos más adelante.

Teorema 2.31 *Los siguientes asertos sobre un conjunto E son equivalentes:*

(i) *E es medible.*

(ii) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto $O \supset E$ tal que $m^*(O \setminus E) \leq \varepsilon$.*

(iii) *Existe $G \in \mathscr{G}_\delta$ tal que $G \supset E$ y $m^*(G \setminus E) = 0$.*

[4] Oxford University Press, 1944, p. 26. Littlewood fue profesor de la Universidad de Cambridge, donde mantuvo una larga y fructífera colaboración con el célebre matemático G.H. Hardy, fundamentalmente en teoría analítica de números.

(*iv*) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un cerrado* $F \subset E$ *tal que* $m^*(E \setminus F) \leq \varepsilon$.

(*v*) *Existe* $P \in \mathscr{F}_\sigma$ *tal que* $P \subset E$ *y* $m^*(E \setminus P) = 0$.

Si, además, $m^*(E) < \infty$, *los enunciados anteriores son todos equivalentes a:*

(*vi*) *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe una unión finita,* J, *de intervalos abiertos, finitos y disjuntos dos a dos, tal que* $m^*(J \triangle E) \leq \varepsilon$.

Demostración. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Si $m(E) < \infty$, por el Ejemplo 2.6, dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto O tal que $E \subset O$ y $m(O) \leq m(E) + \varepsilon$. Ya que E es medible,

$$m(O) = m(O \cap E) + m(O \setminus E) = m(E) + m(O \setminus E),$$

de donde

$$m(O \setminus E) = m(O) - m(E) \leq \varepsilon.$$

Si $m(E) = \infty$, sea $E_n = E \cap \{x : n-1 \leq |x| < n\}$, de modo que E_n es medible y $m(E_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. A raíz de lo que acabamos de probar, dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $O_n \supset E_n$ tal que $m(O_n \setminus E_n) \leq \varepsilon/2^n$ $(n \in \mathbb{N})$. El conjunto $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ es abierto y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset O$; además, $O_n \setminus E \subset O_n \setminus E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ implica

$$O \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \setminus E) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \setminus E_n).$$

Encontramos así que

$$m(O \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un abierto O_n, con $E \subset O_n$, tal que $m^*(O_n \setminus E) \leq 1/n$. Si $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ entonces G es un G_δ, $E \subset G$, y

$$m^*(G \setminus E) \leq m^*(O_n \setminus E) \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tanto, $m^*(G \setminus E) = 0$.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) Si $m^*(G \setminus E) = 0$, entonces $G \setminus E$ es medible (Ejemplo 2.11). Como G es medible (Teorema 2.26) y $E = G \setminus (G \setminus E)$, resulta que E es medible.

(*i*) $\Rightarrow$ (*iv*) Puesto que E^c es medible, dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto O tal que $E^c \subset O$ y $m(O \setminus E^c) \leq \varepsilon$. Entonces $F = O^c$ es cerrado, $F \subset E$, y

$$m(E \setminus F) = m(E \setminus O^c) = m(E \cap O) = m(O \setminus E^c) \leq \varepsilon.$$

(*iv*) $\Rightarrow$ (*v*) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un cerrado F_n, con $E \supset F_n$, tal que $m^*(E \setminus F_n) \leq 1/n$. Si $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, entonces P es un F_σ, $P \subset E$, y

$$m^*(E \setminus P) \leq m^*(E \setminus F_n) \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tanto, $m^*(E \setminus P) = 0$.

(*v*) $\Rightarrow$ (*i*) Si $m^*(E \setminus P) = 0$, entonces $E \setminus P$ es medible. Escribiendo $E = (E \setminus P) \cup P$, deducimos que E es medible.

(*i*) $\Rightarrow$ (*vi*) Supongamos que E es un conjunto medible, de medida finita. Dado $\varepsilon > 0$, la equivalencia entre (*i*) y (*ii*) proporciona un abierto $O \supset E$ con $m(O \setminus E) \leq \varepsilon/2$. Sea $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos, tales que $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Al ser $m(E) < \infty$, se tiene que $m(O) = m(O \setminus E) + m(E) < \infty$; luego, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = m(O)$ converge, y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |I_j| \leq \varepsilon/2$. Llamando $J = \bigcup_{j=1}^{n_0} I_j \subset O$, encontramos que

$$m(J \triangle E) = m(E \setminus J) + m(J \setminus E) \leq m(O \setminus J) + m(O \setminus E) \leq \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |I_j| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

$(vi) \Rightarrow (ii)$ En virtud del Ejemplo 2.6, dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto $O \supset E$ tal que

$$m(O) \leq m^*(E) + \frac{\varepsilon}{3} < \infty. \tag{16}$$

Queremos probar que $m^*(O \setminus E) \leq \varepsilon$. A tal fin, elegimos una unión finita, J, de intervalos abiertos, finitos y disjuntos dos a dos, tal que

$$m^*(J \triangle E) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

y consideramos el conjunto medible $U = O \cap J$. Como $U \subset O$, se tiene que $m(U) \leq m(O) < \infty$ (cf. (16)). Además,

$$O \setminus E = O \cap E^c = (O \cap E^c) \cap (U \cup U^c) = (O \cap E^c \cap U) \cup (O \cap E^c \cap U^c) \subset (U \setminus E) \cup (O \setminus U).$$

Por monotonía y subaditividad, sigue que

$$m^*(O \setminus E) \leq m^*(U \setminus E) + m(O \setminus U), \tag{17}$$

donde hemos tenido en cuenta que $O \setminus U$ es medible. Procedemos ahora a estimar los dos sumandos del segundo miembro de (17).

En primer lugar, puesto que $U \subset J$, se tiene

$$U \setminus E \subset J \setminus E \subset J \triangle E.$$

De nuevo por monotonía, y por la elección de J,

$$m^*(U \setminus E) \leq m^*(J \triangle E) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{18}$$

En segundo lugar, puesto que $m(U) < \infty$, la igualdad $m(O) = m(O \setminus U) + m(U)$, junto con (16), implica

$$m(O \setminus U) = m(O) - m(U) \leq m^*(E) - m(U) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{19}$$

Similarmente, la inclusión

$$E = (E \cap U) \cup (E \setminus U) \subset U \cup (E \setminus U)$$

conduce a la desigualdad

$$m^*(E) - m(U) \leq m^*(E \setminus U). \tag{20}$$

Por último, puesto que $E \subset O$, se cumple

$$E \setminus U = E \cap U^c = E \cap (O^c \cup J^c) = E \setminus J \subset J \triangle E,$$

así que

$$m^*(E \setminus U) \leq m^*(J \triangle E) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

Combinando (17), (18), (19), (20) y (21) ya se concluye que $m^*(O \setminus E) \leq \varepsilon$, como se deseaba. □

Observación 2.32 *El Teorema 2.31 permanece válido si en el apartado (vi) se reemplaza «abiertos» por «cerrados» o «semiabiertos».*

Ejemplo 2.33 *Demostrar que todo conjunto medible de medida positiva contiene un conjunto cerrado de medida positiva.*

Resolución. Sea E un conjunto medible con $m(E) > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, el Teorema 2.31 proporciona un conjunto cerrado F tal que $F \subset E$ y $m(E \setminus F) \leq \varepsilon$. Como $m(E \setminus F) < \infty$,

$$m(F) = m(E) - m(E \setminus F) \geq m(E) - \varepsilon.$$

Basta elegir $0 < \varepsilon < m(E)$ para que se tenga $m(F) > 0$. □

2.4 Funciones medibles

Como ya hemos tenido y tendremos ocasión de comprobar, los conjuntos de medida infinita y las funciones que toman los valores ∞ ó $-\infty$ surgen de modo natural en la teoría de la medida y la integral de Lebesgue. Para evitar restricciones inconvenientes usaremos el sistema de los números reales extendido, es decir, añadimos ∞ y $-\infty$ al sistema de los números reales, con los siguientes convenios:

- $a + \infty = \infty$ ($a \in \mathbb{R}$, ó $a = \infty$);
- $a \cdot \infty = \infty$ ($a > 0$);
- $a \cdot \infty = -\infty$ ($a < 0$);
- $\infty \cdot \infty = \infty$;
- $0 \cdot \infty = 0$;

y similarmente para $-\infty$. Nótese que $\infty + (-\infty)$ no está definido. Convendremos, además, que $-\infty < a < \infty$ ($a \in \mathbb{R}$). El sistema real extendido será denotado $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Definición 2.34 *Sea f una función de variable real a valores reales extendidos definida sobre un conjunto medible E. Se dirá que f es una* función medible (Lebesgue) *si, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x : f(x) > \alpha\}$ es medible.*

En la práctica, el dominio de definición de una función medible f será, típicamente, $\mathbb{R}$ o el complementario de un conjunto medible de medida nula.

Teorema 2.35 *Los siguientes asertos son equivalentes:*

(i) *La función f es medible.*

(ii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.*

(iii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) < \alpha\}$ es medible.*

(iv) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si la función f es medible, entonces

$$\{x : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

es medible.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es medible, también lo es $\{x : f(x) < \alpha\} = \{x : f(x) \geq \alpha\}^c$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Si se verifica (iii),

$$\{x : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\}$$

es medible.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Si $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ es medible, también lo es su complementario $\{x : f(x) > \alpha\}$.

Esto completa la demostración. □

Ejemplo 2.36 *Sea f una función medible. Probar que $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible para cada $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Resolución. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{x : f(x) = \alpha\} = \{x : f(x) \geq \alpha\} \cap \{x : f(x) \leq \alpha\}$$

es medible. Si $\alpha = \infty$,

$$\{x : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > n\}$$

es medible. Si $\alpha = -\infty$,

$$\{x : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) < -n\}$$

es, igualmente, medible. □

Ejemplo 2.37 *Las funciones constantes son medibles.*

Resolución. Dependiendo de la elección de $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x : f(x) > \alpha\}$, con $f \equiv c$ constante, es toda la recta real (si $c > \alpha$) o el conjunto vacío (si $c \leq \alpha$). □

Ejemplo 2.38 *La función característica χ_A del conjunto A es medible si, y sólo si, A es medible.*

Resolución. Según que $\alpha < 0$, $0 \leq \alpha < 1$, ó $\alpha \geq 1$, el conjunto $\{x : \chi_A(x) > \alpha\}$ es $\mathbb{R}$, A ó $\emptyset$, respectivamente. □

Ejemplo 2.39 *La función de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ (cf. Ejemplo 1.3) es medible.*

Resolución. El conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es medible (Ejemplos 2.8 y 2.11); luego, su función característica es medible (Ejemplo 2.38). □

Ejemplo 2.40 *Las funciones continuas son medibles.*

Resolución. Si f es continua, $\{x : f(x) > \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ es abierto y, por lo tanto, medible. □

Teorema 2.41 *Sea c cualquier número real, y sean f, g funciones medibles a valores reales definidas sobre un mismo conjunto medible E. Entonces, las funciones $f + c$, cf, $f + g$, $f - g$ y fg también son medibles.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. El conjunto

$$\{x : f(x) + c > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha - c\}$$

es medible; luego, $f + c$ es medible. Si $c = 0$, cf es medible (Ejemplo 2.37); en caso contrario, suponiendo $c > 0$ encontramos que

$$\{x : cf(x) > \alpha\} = \left\{x : f(x) > c^{-1}\alpha\right\}$$

es medible, y similarmente cuando $c < 0$ (Teorema 2.35). Por tanto, cf es siempre medible. Para probar que $f + g$ lo es, observamos que $z \in A = \{x : f(x) + g(x) > \alpha\}$ sólo si $f(z) > \alpha - g(z)$, esto es, sólo si existe r_i tal que $f(z) > r_i > \alpha - g(z)$, siendo $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Pero entonces $g(z) > \alpha - r_i$, así que

$$z \in \{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r_i\}.$$

Luego,

$$A \subset B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\{x : f(x) > r_n\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r_n\}\right],$$

con B medible. Como, claramente, $A \supset B$ resulta que $A = B$ y, así, $f + g$ es medible. Ahora, $f - g = f + (-g)$ también es medible.

Por último, ya que

$$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right], \tag{22}$$

es suficiente probar que f^2 es medible cuando f lo es. Si $\alpha < 0$,

$$\{x : f^2(x) > \alpha\} = \mathbb{R}$$

es medible. Si $\alpha \geq 0$,

$$\{x : f^2(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

también es medible (Teorema 2.35). □

Corolario 2.42 *La tesis del Teorema 2.41 sigue siendo válida para funciones medibles con valores en $\overline{\mathbb{R}}$, excepto por el hecho de que $f+g$ no está definida cuando $f = \infty$ y $g = -\infty$, o viceversa; y similarmente para $f-g$.*

Demostración. En cuanto a $f+c$ y cf, valen los mismos argumentos anteriores.

Respecto a $f+g$, basta advertir que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\begin{aligned}\{x : f(x)+g(x) > \alpha\} = &\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[\{x : f(x) > r_i\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r_i\}\right]\\ &\cup \left[\{x : f(x) = \infty\} \setminus \{x : g(x) = -\infty\}\right] \cup \left[\{x : g(x) = \infty\} \setminus \{x : f(x) = -\infty\}\right]\end{aligned}$$

es medible; el caso $f-g$ se trata de forma análoga.

Finalmente, consideremos el conjunto donde $f+g$, $f-g$ y (atendiendo a (22)) fg, pueden dejar de estar definidas:

$$\begin{aligned}A &= \{x : f(x) = g(x) = -\infty\} \cup \{x : f(x) = -\infty,\ g(x) = \infty\} \cup \{x : f(x) = \infty,\ g(x) = -\infty\} \cup \{x : f(x) = g(x) = \infty\}\\ &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.\end{aligned}$$

En virtud del Ejemplo 2.36, A_i $(i = 1,2,3,4)$ son medibles, de modo que A y A^c también lo son. Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo que acabamos de probar,

$$\{x \in A^c : f(x)g(x) > \alpha\}$$

es medible. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\{x \in A_1 : f(x)g(x) > \alpha\} &= \{x \in A_1 : \infty > \alpha\} = A_1,\\ \{x \in A_2 : f(x)g(x) > \alpha\} &= \{x \in A_2 : -\infty > \alpha\} = \emptyset,\\ \{x \in A_3 : f(x)g(x) > \alpha\} &= \{x \in A_3 : -\infty > \alpha\} = \emptyset,\\ \{x \in A_4 : f(x)g(x) > \alpha\} &= \{x \in A_4 : \infty > \alpha\} = A_4,\end{aligned}$$

así que

$$\{x \in A : f(x)g(x) > \alpha\} = A_1 \cup A_4$$

es medible. Se concluye que

$$\{x : f(x)g(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x)g(x) > \alpha\} \cup \{x \in A^c : f(x)g(x) > \alpha\}$$

es medible, probando que fg también lo es. □

Teorema 2.43 *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre un mismo conjunto medible. Se verifica:*

(i) $\max_{1 \le i \le n} f_i$ *es medible para cada* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\min_{1 \le i \le n} f_i$ *es medible para cada* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ *es medible.*

(iv) $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ *es medible.*

(v) $\limsup_{n \to \infty} f_n$ *es medible.*

(vi) $\liminf_{n \to \infty} f_n$ *es medible.*

Demostración. Nótese que, en general, las funciones de los apartados (i) a (vi) tomarán valores en $\overline{\mathbb{R}}$; en la prueba de los apartados (ii), (iv) y (vi) se aplicará el Corolario 2.42.

(i) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Como

$$\left\{x : \max_{1 \le i \le n} f_i(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x : f_i(x) > \alpha\},$$

se tiene que $\max_{1 \le i \le n} f_i$ es medible.

(ii) $\min_{1 \le i \le n} f_i = -\max_{1 \le i \le n}(-f_i)$ es medible.

(iii) $\{x : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, así que $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ es medible.

(iv) $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}}(-f_n)$ es medible.

(v) $\limsup_{n \to \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{i \ge n} f_i$ es medible, en virtud de (iii) y (iv).

(vi) $\liminf_{n \to \infty} f_n = -\limsup_{n \to \infty}(-f_n)$ es medible. □

Corolario 2.44 *Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles y existe* $f = \lim_{n \to \infty} f_n$*, entonces* f *es medible.*

Ejemplo 2.45 *La función de Dirichlet* $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ *es límite puntual de una sucesión de funciones medibles y, por lo tanto, es medible (cf. Ejemplo 2.39).*

Resolución. Consideramos la sucesión

$$f_n(x) = \chi_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1,\ldots,r_n\} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una ordenación de los racionales en $[0,1]$. Cada f_n $(n \in \mathbb{N})$ es medible, porque es la función característica de un conjunto finito, que es medible (Ejemplo 2.38). Como $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1]$, resulta que f es medible (Corolario 2.44). □

Ejemplo 2.46 *Si la función* f *es medible, también lo son su* parte positiva $f^+ = \max\{f, 0\}$*, su* parte negativa $f^- = -\min\{f, 0\}$*, y su valor absoluto* $|f| = f^+ + f^-$.

Resolución. Basta aplicar el Ejemplo 2.37, los apartados (i) y (ii) del Teorema 2.43 y el Corolario 2.42. □

Ejemplo 2.47 *El conjunto de los puntos donde converge una sucesión* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de funciones medibles es un conjunto medible.*

Resolución. El conjunto en cuestión es alguno de los siguientes:

$$\left\{x : \limsup_{n \to \infty} f_n(x) = -\infty\right\}, \qquad \left\{x : \liminf_{n \to \infty} f_n(x) = \infty\right\}, \qquad \left\{x : \limsup_{n \to \infty} f_n(x) - \liminf_{n \to \infty} f_n(x) = 0\right\},$$

que son medibles en virtud de los apartados (v) y (vi) del Teorema 2.43, el Corolario 2.42 y el Ejemplo 2.36. □

Ejemplo 2.48 *Sean* f *una función medible y* B *un boreliano. Entonces, el conjunto* $f^{-1}(B)$ *es medible.*

Resolución. Se verifica que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \quad \text{y} \quad f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c,$$

así que la clase de los conjuntos cuyas antiimágenes bajo f son medibles constituyen una σ-álgebra. Como esta σ-álgebra contiene a los intervalos, debe contener a todos los borelianos. □

Definición 2.49 *En consonancia con la Definición 2.25, diremos que la función f es* medible Borel, *o que es una* función de Borel *si, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x : f(x) > \alpha\}$ es un boreliano.*

Ejemplo 2.50 *Toda función medible Borel es medible (Lebesgue).*

Resolución. Teorema 2.26 y Definiciones 2.34 y 2.49. □

Observación 2.51 *Se verá, como consecuencia del Ejemplo 2.38 y del Teorema 2.66, que existen funciones medibles que no son medibles Borel.*

Los Teoremas 2.35, 2.41 y 2.43 y el Corolario 2.42, junto con sus demostraciones, también son aplicables a las funciones de Borel sin más que reemplazar «función medible» y «conjunto medible» por «función medible Borel» y «boreliano», respectivamente. Sin embargo, el siguiente Teorema 2.53 no puede ser adaptado de esta manera. La razón es que, como veremos en la Sección 2.5, no todo subconjunto de un boreliano de medida nula es medible Borel, es decir, en el contexto de la σ-álgebra de Borel deja de verificarse el resultado del Ejemplo 2.11.

Definición 2.52 *Si una propiedad es válida excepto en un conjunto de medida nula, diremos que se verifica* casi por todo *o* en casi todo punto*, abreviadamente* c.t.p. *(*a.e.*, en inglés).*

Teorema 2.53 *Sea f una función medible y supongamos que $f = g$ c.t.p.. Entonces, g es medible.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$\{x : f(x) > \alpha\} \triangle \{x : g(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha \geq g(x)\} \cup \{x : g(x) > \alpha \geq f(x)\} \subset \{x : f(x) \neq g(x)\}.$$

El resultado se sigue inmediatamente del Ejemplo 2.18. □

Ejemplo 2.54 *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles convergente a f c.t.p.. Entonces, f es medible.*

Resolución. Se tiene que $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$ c.t.p.; aplicamos los Teoremas 2.43 y 2.53 (o bien, directamente el Corolario 2.44 y el Teorema 2.53). □

Definición 2.55 *Sea f una función medible. El valor $\inf\{\alpha : f \leq \alpha \text{ c.t.p.}\}$ se denomina* supremo esencial de f*, y se denota* $\operatorname{ess\,sup} f$.

Ejemplo 2.56 *Suponiendo que f es medible, demostrar que $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$ c.t.p..*

Resolución. Si $\operatorname{ess\,sup} f = \infty$, el resultado es obvio.

Supongamos que $\operatorname{ess\,sup} f = -\infty$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $f \leq n$ c.t.p., por la Definición 2.55, así que $f = -\infty$ c.t.p., como se pretendía.

Supongamos, finalmente, que $-\infty < \operatorname{ess\,sup} f < \infty$, y escribamos

$$E = \{x : f(x) > \operatorname{ess\,sup} f\}, \qquad E_n = \left\{x : f(x) > \frac{1}{n} + \operatorname{ess\,sup} f\right\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

de modo que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$; afirmamos que $m(E_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De ser así, se tendrá que $m(E) = 0$ y, atendiendo a la Definición 2.52, que $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$ c.t.p. también en este caso. Sea entonces $n \in \mathbb{N}$. Por definición de ínfimo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq 1/n + \operatorname{ess\,sup} f$ y $f \leq \alpha$ c.t.p.. Sigue que $f \leq 1/n + \operatorname{ess\,sup} f$ c.t.p., obligando a que $m(E_n) = 0$. □

Ejemplo 2.57 *Probar que para cualquier par de funciones medibles f y g se cumple que*

$$\operatorname{ess\,sup}(f+g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g, \tag{23}$$

y demostrar mediante un contraejemplo que esta desigualdad puede ser estricta.

Resolución. Basta advertir que, por el Ejemplo 2.56,

$$f+g \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g \text{ c.t.p..}$$

Como contraejemplo para la desigualdad estricta podemos tomar f, g definidas sobre $\mathbb{R}$ por

$$f = \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}, \quad g = -f.$$

Claramente, $\operatorname{ess\,sup}(f+g) = \operatorname{ess\,sup} g = 0$ y $\operatorname{ess\,sup} f = 1$, de donde se infiere que, con estas funciones, el primer miembro de (23) vale 0 y el segundo, 1. □

Definición 2.58 *Sea f una función medible. El valor* $\sup\{\alpha : f \geq \alpha \text{ c.t.p.}\}$ *se llama* ínfimo esencial de f, *y se denota* $\operatorname{ess\,inf} f$.

Ejemplo 2.59 *Se tiene que* $\operatorname{ess\,sup} f = -\operatorname{ess\,inf}(-f)$. *Por tanto,* mutatis mutandis, *para* $\operatorname{ess\,inf} f$ *se verifican resultados análogos a los que se satisfacen para* $\operatorname{ess\,sup} f$, *como los de los Ejemplos 2.56 y 2.57.*

Resolución. La comprobación es directa:

$$\begin{aligned}\operatorname{ess\,sup} f &= \inf\{\alpha : f \leq \alpha \text{ c.t.p.}\} = \inf\{\alpha : -f \geq -\alpha \text{ c.t.p.}\}\\ &= -\sup\{-\alpha : -f \geq -\alpha \text{ c.t.p.}\} = -\sup\{\alpha : -f \geq \alpha \text{ c.t.p.}\}\\ &= -\operatorname{ess\,inf}(-f).\end{aligned}$$ □

Definición 2.60 *Una función medible f tal que* $\operatorname{ess\,sup}|f| < \infty$ *se dice* esencialmente acotada.

Tal como se mencionó en la Sección 2.3, el segundo principio de Littlewood afirma que «toda función medible es casi continua». Terminamos esta sección formulando y demostrando rigurosamente dicho principio, conforme a la sencilla idea recogida por Ferguson y Wu[5].

Teorema 2.61 (Lusin) *Sea $E \in \mathscr{M}$, con $m(E) < \infty$. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $C \subset E$, cerrado en la topología relativa de E, tal que $m(E \setminus C) < \varepsilon$ y que la restricción $f|_C$ de f a C es continua.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos una enumeración $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ con extremos racionales. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $f^{-1}(a_n, b_n)$ es medible, el Teorema 2.31 proporciona un cerrado F_n y un abierto O_n tales que $F_n \subset f^{-1}(a_n, b_n) \subset O_n$ y $m(O_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n}$. Basta tomar $C = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n \setminus F_n)$ y observar que, por la definición de C, el conjunto

$$f|_C^{-1}(a_n, b_n) = C \cap f^{-1}(a_n, b_n) = C \cap O_n$$

es abierto en C, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

2.5 Medibilidad Borel y Lebesgue

En esta sección discutimos la relación entre la clase $\mathscr{B}$ de los borelianos, la clase $\mathscr{M}$ de los conjuntos medibles Lebesgue y la clase $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ de las partes de $\mathbb{R}$. Por el Teorema 2.26, sabemos que $\mathscr{B} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Usando el Teorema 2.62, probaremos en el Teorema 2.63 que $\mathscr{M} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, y en el Teorema 2.66, que $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{M}$.

[5] S.J. Ferguson, T. Wu: A one-sentence inverse image proof of Lusin's theorem, `https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.13240`.

Teorema 2.62 *Sea E un conjunto medible. Para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $E + x = \{y + x : y \in E\}$ es medible.*

Demostración. Fijemos $x \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, el Teorema 2.31 proporciona un abierto $O \supset E$ tal que $m(O \setminus E) \leq \varepsilon$. El conjunto $O + x$ es abierto, y $O + x \supset E + x$. Como $(O+x) \setminus (E+x) = (O \setminus E) + x$, se sigue del Ejemplo 2.3 que

$$m^*\left((O+x) \setminus (E+x)\right) = m^*\left((O \setminus E) + x\right) = m^*(O \setminus E) \leq \varepsilon,$$

y de aquí, aplicando otra vez el Teorema 2.31, que $E + x \in \mathscr{M}$. □

Teorema 2.63 (G. Vitali, 1905) *Existe un conjunto no medible.*

Demostración. Diremos que $x, y \in [0,1]$ son equivalentes, y escribiremos $x \sim y$, si $y - x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Se comprueba sin dificultad que $\sim$ es, efectivamente, una relación de equivalencia en $[0,1]$, de modo que $[0,1] = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$, donde A es un cierto conjunto de índices y E_α $(\alpha \in A)$ son las clases de equivalencia determinadas por la relación, esto es, conjuntos disjuntos dos a dos tales que, para cada $\alpha \in A$, se tiene que $x, y \in E_\alpha$ si, y sólo si, $x \sim y$.

Puesto que $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ es numerable, cada E_α, que tiene la forma $x + (\mathbb{Q} \cap [-1,1])$ para algún $x \in [0,1]$, también es numerable. Y puesto que $[0,1]$ es infinito no numerable, existe una cantidad infinita no numerable de clases de equivalencia E_α. Usamos el axioma de elección[6] para formar un conjunto $V \subset [0,1]$ que contiene exactamente un elemento x_α de cada E_α. Sea $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$, y pongamos $V_n = V + r_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Si $y \in V_n \cap V_m$, existen $x_\alpha, x_\beta \in V$ tales que $y = x_\alpha + r_n = x_\beta + r_m$; pero entonces $x_\beta - x_\alpha \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, es decir, $x_\alpha \sim x_\beta$, así que $x_\beta = x_\alpha$ por definición de V, y $n = m$. Luego, $V_n \cap V_m = \emptyset$ para $n \neq m$.

Además,

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty V_n \subset [-1,2].$$

En efecto: dado $x \in [0,1]$ existe un único $\alpha \in A$ tal que $x \in E_\alpha$, y entonces $x = x_\alpha + r_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, de modo que $x \in V_n$; la segunda inclusión es obvia. Ahora, por monotonía,

$$1 = m^*([0,1]) \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\right) \leq m^*([-1,2]) = 3. \tag{24}$$

De otra parte, como m^* es invariante por traslaciones (Ejemplo 2.3), se tiene $m^*(V) = m^*(V_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, así que

$$\sum_{n=1}^\infty m^*(V_n)$$

sólo puede valer 0 ó ∞, según que $m^*(V) = 0$ ó $m^*(V) > 0$, respectivamente. En consecuencia

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\right) \neq \sum_{n=1}^\infty m^*(V_n), \tag{25}$$

lo cual, en virtud de los Teoremas 2.19 y 2.62, impide que V sea medible. □

Observación 2.64 *El conjunto V del Teorema 2.63 no puede tener medida exterior nula, pues de lo contrario sería medible (Ejemplo 2.11).*

[6] El axioma de elección (AE) afirma, precisamente, que *si $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de un conjunto X, disjuntos dos a dos, entonces existe una función de elección que permite escoger exactamente un elemento de cada E_α*. Que este procedimiento puede llevarse a cabo es trivialmente cierto siempre que dicha familia sea finita, o cuando exista una regla bien determinada para seleccionar un único elemento de cada conjunto de la familia; sin embargo, el axioma es indispensable en el caso más general de una familia infinita arbitraria. Del trabajo de Kurt Gödel y Paul Cohen se deduce que AE es lógicamente independiente de los otros axiomas de la teoría axiomática de conjuntos formulada por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel (sistema ZF), y que, por tanto, este sistema da lugar a teorías consistentes tanto si se le añade AE como su negación. De hecho, en 1970, Robert Solovay construyó un modelo de la teoría ZF sin AE donde todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son medibles Lebesgue, asumiendo la existencia de un cardinal inaccesible (es decir, de un cardinal que no puede ser obtenido a partir de cardinales más pequeños mediante las operaciones usuales de aritmética de cardinales).

Mencionemos, finalmente, que AE es equivalente al lema de Zorn (*Todo conjunto inductivo posee un elemento maximal*) y al principio de maximalidad de Hausdorff (*Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene un subconjunto totalmente ordenado maximal*).

Observación 2.65 *La demostración del Teorema 2.63 proporciona una sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$, no medibles y disjuntos dos a dos, verificando (25). Por tanto, la medida exterior de Lebesgue es contablemente aditiva sobre conjuntos medibles (Teorema 2.19), pero no lo es en general.*

Teorema 2.66 *No todo conjunto medible es de Borel.*

Demostración. Escribamos cada $x \in [0,1]$ en forma binaria (Sección 2.6.2):

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

con $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ $(n \in \mathbb{N})$, eligiendo, para cada $x > 0$, un desarrollo infinito. Definimos la función f sobre $[0,1]$ por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n} \quad (x \in [0,1]). \tag{26}$$

Esta f, que se conoce como *función de Cantor*, toma valores en el conjunto de Cantor C (Ejemplo 2.9 y Sección 2.6.3). Cada ε_n $(n \in \mathbb{N})$ es una función medible de x, así que f es medible. Además, f es inyectiva, porque el valor $f(x)$ define unívocamente a la sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ que comparece en el desarrollo (26), y por lo tanto determina x unívocamente.

Sea V un subconjunto no medible de $[0,1]$ (Teorema 2.63), y pongamos $B = f(V)$. Puesto que $B \subset C$, resulta que B tiene medida exterior cero y, por lo tanto, es medible. Pero, por inyectividad, $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(V)) = V$, que no es medible, lo cual, en virtud del Ejemplo 2.48, impide que B sea un boreliano. □

Damos a continuación dos ejemplos que muestran implicaciones inesperadas de la medibilidad.

Ejemplo 2.67 *Sea T un conjunto medible, de medida positiva, y sea $T^* = \{x - y : x, y \in T\}$. Probar que T^* contiene un intervalo $(-\alpha, \alpha)$ para algún $\alpha > 0$.*

Resolución. Por el Ejemplo 2.33, T contiene un conjunto cerrado F de medida positiva. Puesto que $m(F) = \lim_{n\to\infty} m(F \cap [-n,n])$, algún $F \cap [-n,n]$ tendrá medida positiva, y no se pierde generalidad suponiendo que F es acotado. El Teorema 2.31 proporciona entonces un abierto $U \supset F$, tal que $m(U \setminus F) < m(F)$.

Recordemos que la distancia entre dos conjuntos cualesquiera A y B se define como

$$d(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A,\, y \in B\}.$$

La distancia entre un compacto A y un cerrado B es positiva si A y B son disjuntos. Sea $\alpha > 0$ la distancia del compacto F al cerrado U^c, sea x cualquier punto de $(-\alpha, \alpha)$, y sea $F - x = \{y : y + x \in F\}$; se quiere probar que $F \cap (F - x) \neq \emptyset$. En tal caso, existirá $z \in F$ tal que $z' = z + x \in F$, de donde $x = z' - z \in T^*$, y la arbitrariedad de x demostrará que $(-\alpha, \alpha) \subset T^*$.

Veamos, pues, que $F \cap (F - x) \neq \emptyset$. Como $|x| < \alpha$, la definición de α implica que $F - x \subset U$. Teniendo en cuenta esta inclusión, el Teorema 2.62, el Ejemplo 2.3 y el hecho de que $m(F) < \infty$, podemos escribir:

$$m(F \setminus (F-x)) \leq m(U \setminus (F-x)) = m(U) - m(F-x) = m(U) - m(F) = m(U \setminus F) < m(F).$$

Luego, $m(F \cap (F-x)) > 0$, obligando a que $F \cap (F-x) \neq \emptyset$, como se pretendía. □

Ejemplo 2.68 *Supongamos que f es una función de variable real, con valores en $\overline{\mathbb{R}}$, que satisface*

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \tag{27}$$

cualesquiera sean x e y. Probar que:

(i) O bien f es siempre finita, o bien es siempre infinita.

(*ii*) *Si f es medible y finita, entonces $f(x) = xf(1)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Resolución.

(*i*) La función f no puede tomar ambos valores ∞ y $-\infty$, porque entonces (27) carecería de sentido para cierto par x, y. Si f es siempre finita, no hay nada que probar. Si $f(x) = \infty$ para algún x, entonces $f(y) = f(x + (y - x)) = \infty + f(y - x) = \infty$ para todo y. Similarmente ocurre si $f(x) = -\infty$ para algún x.

(*ii*) Observamos, en primer lugar, que (27) conduce a las relaciones

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

y

$$f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

de las que se sigue, respectivamente, que $f(0) = 0$ y, por tanto, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por inducción, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, (27) también conduce a la igualdad $f(nx) = nf(x)$, de donde $f(n^{-1}x) = n^{-1}f(x)$; luego, $f(mn^{-1}x) = mn^{-1}f(x)$, y también $f(-mn^{-1}x) = mn^{-1}f(-x) = -mn^{-1}f(x)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. En definitiva, hemos probado que $f(r) = rf(1)$ siempre que $r \in \mathbb{Q}$.

Como f es finita, está acotada en algún conjunto de medida positiva, es decir, existen un conjunto medible E y una constante $M > 0$ tales que $m(E) > 0$ y $|f| \leq M$ sobre E. En la notación del Ejemplo 2.67, sea $z \in E^*$, de modo que $z = x - y$, donde $x, y \in E$. Entonces, $|f(z)| = |f(x-y)| = |f(x) - f(y)| \leq 2M$. Pero, por el Ejemplo 2.67, E^* contiene un intervalo $(-\alpha, \alpha)$, con $\alpha > 0$. Así, si $|x| < \alpha/n$ se tiene que $|f(nx)| \leq 2M$, y consecuentemente $|f(x)| \leq 2M/n$ $(n \in \mathbb{N})$. Para $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$ tales que $|r - x| < \alpha/n$, y puesto que $f(r) = rf(1)$, encontramos que

$$|f(x) - xf(1)| = |f(x) - f(r) + (r-x)f(1)| = |f(x-r) + (r-x)f(1)| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\alpha}{n}|f(1)| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Se concluye que $f(x) = xf(1)$. □

2.6 Anexo: Representación ternaria del conjunto de Cantor

2.6.1 Representaciones ternarias

Definición 2.69 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in \{0, 1, 2\}$. Como $0 \leq a_n \leq 2$, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

está mayorada por la geométrica convergente

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2/3}{1 - 1/3} = 1$$

y, por lo tanto, converge a algún $x \in [0, 1]$. Escribimos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = (\alpha_0.a_1a_2a_3\ldots)_3$$

y decimos que $(\alpha_0.a_1a_2a_3\ldots)_3$ es una representación ternaria *de x. Denominaremos a* 0*,* 1 *y* 2 dígitos ternarios.

Lema 2.70 *Sea $x \in (0, 1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen dígitos ternarios $a_1, \ldots, a_n$, tales que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}. \tag{28}$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Ya que $0 < 3x < 3$, si definimos $a_1 = \lfloor 3x \rfloor$ (parte entera de $3x$) resulta que a_1 es un dígito ternario tal que $a_1 \leq 3x < a_1 + 1$. De aquí se sigue que

$$\frac{a_1}{3} \leq x < \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3},$$

que es (28) para $n = 1$. Suponiendo obtenidos los dígitos ternarios $a_1, \ldots, a_n$ satisfaciendo (28), ponemos

$$p_n = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n}.$$

Entonces (28) es igual a

$$p_n \leq x < p_n + \frac{1}{3^n},$$

de donde

$$0 \leq 3^{n+1}(x - p_n) < 3.$$

Si ahora definimos $a_{n+1} = \lfloor 3^{n+1}(x - p_n) \rfloor$, se cumple que $a_{n+1} \in \{0, 1, 2\}$ y

$$a_{n+1} \leq 3^{n+1}(x - p_n) < a_{n+1} + 1,$$

es decir,

$$p_n + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} \leq x < p_n + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}},$$

que es (28) para $n + 1$. □

Proposición 2.71 *Todo $x \in [0, 1]$ posee, al menos, una representación ternaria.*

Demostración. Los números 0 y 1 admiten las representaciones ternarias

$$0 = (0.000\ldots)_3, \qquad 1 = (1.000\ldots)_3 = (0.222\ldots)_3.$$

Si $0 < x < 1$, el Lema 2.70 proporciona una sucesión de dígitos ternarios $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaciendo (28) para cada $n \in \mathbb{N}$, y basta tomar límites en esta expresión cuando $n \to \infty$ para obtener

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$ □

Nótese que las fracciones $1/3$ y $2/3$ también se pueden representar de dos maneras:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots = (0.100\ldots)_3 \\ &= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = (0.022\ldots)_3,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots = (0.200\ldots)_3 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = (0.122\ldots)_3.\end{aligned}$$

Más en general, se verifica:

(i) Todo x con representación ternaria $x = (0.a_1a_2\ldots a_{m-1}0222\ldots)_3$ se puede escribir en la forma

$x = (0.a_1a_2\ldots a_{m-1}1000\ldots)_3$:

$$(0.a_1a_2\ldots a_{m-1}0222\ldots)_3 = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{0}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} = (0.a_1a_2\ldots a_{m-1}1000\ldots)_3 .$$

(ii) Todo x con representación ternaria $x = (0.a_1a_2\ldots a_{m-1}1222\ldots)_3$ se puede escribir en la forma $x = (0.a_1a_2\ldots a_{m-1}2000\ldots)_3$:

$$\begin{aligned}(0.a_1a_2\ldots a_{m-1}1222\ldots)_3 &= \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^m} = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{3^m}\\ &= (0.a_1a_2\ldots a_{m-1}2000\ldots)_3 .\end{aligned}$$

Nos referiremos a la representación con una infinidad de 2's como *representación infinita* y a la representación con una infinidad de 0's como *representación finita*.

El Teorema 2.72 establece que los anteriores son los dos únicos casos del intervalo $(0,1)$ donde falla la unicidad de la representación.

Teorema 2.72 *Sea $x \in (0,1)$. Si x admite más de una representación ternaria, entonces, o bien*

$$x = (0.a_1a_2a_3\ldots a_{m-1}0222\ldots)_3 = (0.a_1a_2a_3\ldots a_{m-1}1000\ldots)_3 ,$$

o bien

$$x = (0.a_1a_2a_3\ldots a_{m-1}1222\ldots)_3 = (0.a_1a_2a_3\ldots a_{m-1}2000\ldots)_3 .$$

Demostración. Supongamos que

$$x = (0.a_1a_2a_3\ldots)_3 = (0.b_1b_2b_3\ldots)_3$$

son dos representaciones ternarias de x. Sea m el menor valor de n para el cual $a_m \neq b_m$:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_{m-1} = b_{m-1}, \quad a_m \neq b_m.$$

No se pierde generalidad asumiendo que $a_m < b_m$. Como $a_m, b_m \in \{0,1,2\}$, se tiene

$$1 \leq a_m + 1 \leq b_m \leq 2.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{a_m}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{a_m}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{a_m}{3^m} + \frac{1}{3^m}\\ &= \sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n}{3^n} + \frac{a_m+1}{3^m} \leq \sum_{n=1}^{m-1}\frac{b_n}{3^n} + \frac{b_m}{3^m} \leq \sum_{n=1}^{m-1}\frac{b_n}{3^n} + \frac{b_m}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{b_n}{3^n}\\ &= x, \end{aligned}$$

obligando a que todas las desigualdades anteriores sean igualdades y, en consecuencia, a que se verifique

$$a_m + 1 = b_m, \qquad a_n = 2, \quad b_n = 0 \quad (n \geq m+1).$$

Estas relaciones muestran que x es necesariamente de la forma

$$x = (0.a_1a_2a_3\dots a_{m-1}0222\dots)_3 = (0.a_1a_2a_3\dots a_{m-1}1000\dots)_3\,,$$

o bien de la forma

$$x = (0.a_1a_2a_3\dots a_{m-1}1222\dots)_3 = (0.a_1a_2a_3\dots a_{m-1}2000\dots)_3\,,$$

y que en cada caso hay únicamente dos representaciones posibles, una infinita y la otra finita. $\square$

2.6.2 Representaciones binarias

Los argumentos desarrollados en la sección anterior permiten considerar, de modo análogo, la representación binaria de un número real $x \in [0,1]$.

Definición 2.73 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in \{0,1\}$. Entonces $0 \leq a_n \leq 1$, de modo que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

está mayorada por una serie geométrica convergente, de suma 1; luego, ella misma converge a un único elemento $x \in [0,1]$, que representaremos en la forma

$$x = (0.a_1a_2a_3\dots)_2\,.$$

Como en la Definición 2.69, diremos que $(0.a_1a_2a_3\dots)_2$ es una representación binaria *de x. Los números 0 y 1 serán llamados* dígitos binarios.

Similarmente al caso de la representación ternaria, se demuestra que todo $x \in [0,1]$ posee al menos una, y no más de dos, representaciones binarias. Por ejemplo, la única representación binaria de 0 es $0 = (0.000\dots)_2$, pero 1 se puede representar de dos formas distintas:

$$1 = (1.000\dots)_2 = (0.111\dots)_2.$$

Más aún, cualquier $0 < x < 1$ que admita una representación binaria $x = (0.a_1a_2\dots a_n1000\dots)_2$, con $a_1,\dots,a_n \in \{0,1\}$, también se puede escribir como

$$x = (0.a_1a_2\dots a_n0111\dots)_2\,,$$

expresiones que denominaremos, respectivamente, *representación binaria finita* y *representación binaria infinita* de x.

Proposición 2.74 *Todo $x \in (0,1)$ posee una única representación binaria infinita.*

2.6.3 El conjunto de Cantor

Recuérdese que en la construcción del conjunto de Cantor C intervienen dos sucesiones de conjuntos, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, con las siguientes propiedades: para cada $n \in \mathbb{N}$,

(i) I_n es la unión disjunta de 2^{n-1} intervalos abiertos I_n^j $(j = 1,\dots,2^{n-1})$, los tercios medios removidos en la etapa n-ésima.

(ii) $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, donde cada C_n es la unión disjunta de los 2^n intervalos cerrados retenidos en la etapa n-ésima:

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} C_n^k = [0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j.$$

(iii) Cada uno de los intervalos que componen I_{n+1} es el tercio medio de alguno de los intervalos que componen C_n.

(iv) La longitud de cada una de las componentes de I_n y de C_n es $1/3^n$.

En la notación anterior:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Lema 2.75 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$, representamos por a_n^j y b_n^j los extremos del intervalo abierto I_n^j suprimido en la etapa n-ésima de la construcción de C. Entonces, los desarrollos ternarios de a_n^j y b_n^j vienen dados, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned} a_n^j &= (0.c_1c_2\ldots c_{n-1}100\ldots)_3 = (0.c_1c_2\ldots c_{n-1}022\ldots)_3\,, \\ b_n^j &= (0.c_1c_2\ldots c_{n-1}200\ldots)_3\,, \end{aligned}$$

con $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \{0,2\}$.

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right], \\ C_3 &= \left[0, \frac{1}{3^3}\right] \cup \left[\frac{2}{3^3}, \frac{3}{3^3}\right] \cup \left[\frac{6}{3^3}, \frac{7}{3^3}\right] \cup \left[\frac{8}{3^3}, \frac{9}{3^3}\right] \cup \left[\frac{18}{3^3}, \frac{19}{3^3}\right] \cup \left[\frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}\right] \cup \left[\frac{24}{3^3}, \frac{25}{3^3}\right] \cup \left[\frac{26}{3^3}, 1\right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos que los extremos de los intervalos $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ responden a un patrón: para cada $n \in \mathbb{N}$, los extremos de los primeros 2^{n-1} intervalos de C_n son los mismos que los de C_{n-1} (que está formado por 2^{n-1} intervalos cerrados), pero divididos por 3; mientras que la otra mitad se corresponde con los intervalos de C_{n-1} divididos por 3 y trasladados por

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{3^n}.$$

Así, si para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $\operatorname{ext}(C_n)$ los puntos extremos de los intervalos que definen a C_n, encontramos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{ext}(C_1) &= \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right\} = \bigcup_{r=0}^{3} \left\{\frac{r}{3}\right\}, \\ \operatorname{ext}(C_2) &= \left\{0, \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right\} \cup \left\{\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}\right\} = \bigcup_{r=0}^{3} \bigcup_{i_1=0}^{1} \left\{\frac{r + 3(2i_1)}{3^2}\right\}, \\ \operatorname{ext}(C_3) &= \left\{0, \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}, \frac{3}{3^3}\right\} \cup \left\{\frac{6}{3^3}, \frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}, \frac{9}{3^3}\right\} \cup \left\{\frac{18}{3^3}, \frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}\right\} \cup \left\{\frac{24}{3^3}, \frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}, \frac{27}{3^3}\right\} \\ &= \bigcup_{r=0}^{3} \bigcup_{i_1=0}^{1} \bigcup_{i_2=0}^{1} \left\{\frac{r + 3(2i_1) + 3^2(2i_2)}{3^3}\right\}, \\ &\vdots \\ \operatorname{ext}(C_n) &= \bigcup_{r=0}^{3} \bigcup_{i_1=0}^{1} \bigcup_{i_2=0}^{1} \cdots \bigcup_{i_{n-1}=0}^{1} \left\{\frac{r + 3(2i_1) + 3^2(2i_2) + \cdots + 3^{n-1}(2i_{n-1})}{3^n}\right\}. \end{aligned}$$

Los pares de puntos centrales en cada uno de los conjuntos que componen $\operatorname{ext}(C_n)$ son los extremos de los intervalos abiertos I_n^j

$(j=1,\ldots,2^{n-1})$ eliminados en el paso n-ésimo, cuyo conjunto describimos análogamente como

$$\operatorname{ext}(I_1)=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}=\bigcup_{r=1}^{2}\left\{\frac{r}{3}\right\},$$

$$\operatorname{ext}(I_2)=\left\{\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right\}\cup\left\{\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right\}=\bigcup_{r=1}^{2}\bigcup_{i_1=0}^{1}\left\{\frac{r+3\,(2i_1)}{3^2}\right\},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ext}(I_3)&=\left\{\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right\}\cup\left\{\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right\}\cup\left\{\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right\}\cup\left\{\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right\}\\&=\bigcup_{r=1}^{2}\bigcup_{i_1=0}^{1}\bigcup_{i_2=0}^{1}\left\{\frac{r+3\,(2i_1)+3^2\,(2i_2)}{3^3}\right\},\\&\ \vdots\\ \operatorname{ext}(I_n)&=\bigcup_{r=1}^{2}\bigcup_{i_1=0}^{1}\bigcup_{i_2=0}^{1}\cdots\bigcup_{i_{n-1}=0}^{1}\left\{\frac{r+3\,(2i_1)+3^2\,(2i_2)+\cdots+3^{n-1}\,(2i_{n-1})}{3^n}\right\}.\end{aligned}$$

De este modo, los extremos de I_n pueden ser expresados en la forma

$$\frac{r}{3^n}+\frac{3(2i_1)}{3^n}+\frac{3^2(2i_2)}{3^n}+\ldots+\frac{3^{n-1}(2i_{n-1})}{3^n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{3^k}+\frac{c_n}{3^n},$$

donde $c_k=2i_{n-k}\in\{0,2\}$ $(k=1,\ldots,n-1)$ y $c_n=r\in\{1,2\}$. Se advierte sin dificultad que el coeficiente $c_n=1$ corresponde necesariamente a extremos izquierdos de los intervalos I_n^j $(j=1,\ldots,2^{n-1})$. □

Proposición 2.76 *Todo $x\in C$ admite una única representación ternaria en la que no interviene el dígito 1; más precisamente,*

$$C=\left\{x\in[0,1]:x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n},\ c_n\in\{0,2\}\ (n\in\mathbb{N})\right\}.\tag{29}$$

Demostración. Denotemos por C^* el conjunto que comparece en el segundo miembro de (29), y sea $x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n3^{-n}\in C^*$, con $c_n\in\{0,2\}$ $(n\in\mathbb{N})$. Fijado $n\in\mathbb{N}$, consideremos la suma parcial $s_n=\sum_{k=1}^{n}c_k3^{-k}$; el Lema 2.75 muestra que $s_n\in C$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}=x$$

y el conjunto C es cerrado, resulta que $x\in C$. Así pues, $C^*\subset C$.

Para demostrar que $C\subset C^*$, probaremos la inclusión complementaria. Si $x\notin C^*$ entonces, por la definición de C^*, alguno de los coeficientes de la representación ternaria de x debe ser igual a 1:

$$x=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^m}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n},$$

donde $c_1,\ldots,c_{m-1},c_{m+1},c_{m+2},\ldots\in\{0,2\}$ y m es el menor entero positivo tal que $c_m=1$. No puede ocurrir que $c_{m+i}=0$ para todo $i\in\mathbb{N}$ pues, en tal caso,

$$x=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^m}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\in C^*.$$

Similarmente, la hipótesis de que $c_{m+j}=2$ para todo $j\in\mathbb{N}$ conduce, de nuevo, a la contradicción de que $x\in C^*$:

$$x=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^m}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{3^m}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{2}{3^m}\in C^*.$$

Por consiguiente, existen, al menos, sendos $i,j\in\mathbb{N}$ tales que $c_{m+i}\neq 0$ y $c_{m+j}\neq 2$. De aquí,

$$0<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{3^m},$$

así que, para algún $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}a_m^k=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^m}<x&=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^m}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}\\&<\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{3^m}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{3^n}+\frac{2}{3^m}=b_m^k,\end{aligned}$$

es decir, $x\in I_m^k$. Pero como $C_m\subset[0,1]\setminus I_m^k$, resulta que $x\notin C_m$ y, en consecuencia, $x\notin C$. Esto completa la demostración. □

3 Espacios de medida abstractos

A continuación definiremos el concepto de medibilidad de conjuntos y funciones en espacios abstractos, y presentaremos en este contexto general los principales resultados ya vistos en $\mathbb{R}$. Las nociones de medida e integración en espacios abstractos surgen también en las aplicaciones, especialmente en teoría de probabilidades, que se desarrolla sobre clases de funciones medibles (variables aleatorias) en espacios de medida total 1.

Definición 3.1 *Se llama* espacio medible *a un par $(X,\mathscr{S})$, donde $\mathscr{S}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto X. Los elementos de $\mathscr{S}$ se llaman* conjuntos medibles.

Definición 3.2 *Una función de conjunto μ, definida sobre una σ-álgebra $\mathscr{S}$, es una* medida *si:*

(i) *μ es no negativa.*

(ii) $\mu(\emptyset)=0$.

(iii) *Para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{S}$ disjuntos dos a dos, se tiene*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

Definición 3.3 *Se llama* espacio de medida *a una terna $(X,\mathscr{S},\mu)$, donde $(X,\mathscr{S})$ es un espacio medible y μ es una medida sobre $\mathscr{S}$.*

Ejemplo 3.4 *$(\mathbb{R},\mathscr{M},m)$ y $(\mathbb{R},\mathscr{B},m)$ son espacios de medida, donde $\mathscr{M}$ y $\mathscr{B}$ denotan, respectivamente, la clase de los subconjuntos medibles y la de los borelianos de $\mathbb{R}$, y donde, en el segundo caso, m está restringida a $\mathscr{B}$ (*medida de Borel *en la recta real).*

Resolución. La clase $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra (Teorema 2.17), sobre la que está definida m. Que m es una medida sobre $\mathscr{M}$ sigue de los Teoremas 2.2 y 2.19. Se vio en la Definición 2.25 y el Teorema 2.26 que la clase $\mathscr{B}$ es una σ-álgebra contenida en $\mathscr{M}$. □

Definición 3.5 *Una medida μ sobre $\mathscr{S}$ es* completa *si $E\in\mathscr{S}$, $F\subset E$ y $\mu(E)=0$ implican $F\in\mathscr{S}$.*

Definición 3.6 *Una medida μ sobre $\mathscr{S}$ es* σ-finita *si cada $E \in \mathscr{S}$ se puede expresar en la forma $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, con $E_n \in \mathscr{S}$ y $\mu(E_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$.*

Ejemplo 3.7 *Probar que la medida de Lebesgue m definida sobre $\mathscr{M}$ es σ-finita y completa. ¿Qué se puede decir de m restringida a $\mathscr{B}$?*

Resolución. Para obtener la σ-finitud, ponemos $E_n = E \cap (-n,n)$ $(n \in \mathbb{N})$ tanto si $E \in \mathscr{M}$ como si $E \in \mathscr{B}$. La completitud de m sobre $\mathscr{M}$ sigue del Ejemplo 2.11, y su incompletitud sobre $\mathscr{B}$, de la demostración del Teorema 2.66. □

Ejemplo 3.8 *Sea $(X, \mathscr{S})$ un espacio medible, y sea $Y \in \mathscr{S}$. Si $\mathscr{S}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathscr{S}\}$, entonces $(Y, \mathscr{S}_Y)$ es un espacio medible.*

Resolución. La verificación de que $\mathscr{S}_Y$ satisface los axiomas de una σ-álgebra es inmediata. □

En el resto de esta sección, a menos que se indique otra cosa, trataremos con un espacio de medida fijo $(X, \mathscr{S}, \mu)$. Muchas de las definiciones y resultados de la Sección 2 se trasladan a este caso general tan sólo con cambios de notación. Los citaremos como referencia.

Teorema 3.9 *Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles. Se tiene:*

(i) *Si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$.*

(ii) *Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ y $\mu(E_1) < \infty$, entonces $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_n)$.*

Demostración. Véase la prueba del Teorema 2.29. □

Definición 3.10 *Sea f una función definida en X con valores en la recta real extendida. Se dice que f es* medible *si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{S}$.*

La medibilidad de funciones se asocia generalmente con una medida aunque, en rigor, sólo están involucrados X y $\mathscr{S}$.

Ejemplo 3.11 *Sea $(X, \mathscr{S})$ un espacio medible y sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $X_n \in \mathscr{S}$ y $X_n \cap X_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Escribimos $\mathscr{S}_n = \{B \cap X_n : B \in \mathscr{S}\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Demostrar que f es medible con respecto a $(X, \mathscr{S})$ sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$, su restricción f_n a X_n es medible con respecto a $(X_n, \mathscr{S}_n)$; y recíprocamente: si, para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones f_n son medibles con respecto a $(X_n, \mathscr{S}_n)$ y se define f sobre X por $f(x) = f_n(x)$ cuando $x \in X_n$, entonces f es medible con respecto a $(X, \mathscr{S})$.*

Resolución. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si f es medible con respecto a $(X, \mathscr{S})$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\{x \in X_n : f_n(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\} \cap X_n,$$

así que f_n es medible con respecto al espacio medible $(X_n, \mathscr{S}_n)$. El recíproco se sigue de la igualdad

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X_n : f_n(x) > \alpha\}.$$ □

Teorema 3.12 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *La función f es medible.*

(ii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{S}$.*

(iii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) < \alpha\} \in \mathscr{S}$.*

(iv) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{S}$.*

Demostración. Véase la prueba del Teorema 2.35. □

Ejemplo 3.13 (i) *Si f es medible, entonces $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible para cada número real extendido α.*

(ii) *Las funciones constantes son medibles.*

(iii) *Una función característica χ_A es medible si, y sólo si, $A \in \mathscr{S}$.*

(iv) *Una función continua de una función medible es medible.*

Resolución. Véase la resolución de los Ejemplos 2.36, 2.37, 2.38, y el Ejercicio 28. □

Teorema 3.14 *Si c es un número real y f, g son funciones medibles, entonces $f + c$, cf, $f + g$, $f - g$ y fg también son medibles.*

Demostración. Véanse la prueba del Teorema 2.41 y del Corolario 2.42. □

Teorema 3.15 *Si $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ son medibles, entonces $\max_{1\le i\le n} f_i$ $(n \in \mathbb{N})$, $\min_{1\le i\le n} f_i$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ y $\liminf_{n\to\infty} f_n$, así como también $\lim_{n\to\infty} f_n$ (si existe), son medibles.*

Demostración. Véanse la prueba del Teorema 2.43 y el Corolario 2.44. □

Definición 3.16 *Si una propiedad se cumple excepto en un conjunto medible E tal que $\mu(E) = 0$, decimos que se cumple* casi por doquier, casi en todas partes *o* casi en todo punto *con respecto a μ, y se escribe* c.t.p. $[\mu]$ *(en inglés,* a.e. $[\mu]$*). Se puede omitir la referencia a μ si es obvio qué medida se está considerando.*

Ejemplo 3.17 *Sea $f = g$ c.t.p. $[\mu]$, donde μ es una medida completa. Probar que si f es medible, también lo es g.*

Resolución. Escribimos $E_f = \{x : f(x) > \alpha\}$, $E_g = \{x : g(x) > \alpha\}$, $E = \{x : f(x) \neq g(x)\}$. Entonces E_f y E son medibles y, como μ es completa y $\mu(E) = 0$, también lo es $E_g \cap E \subset E$. Se concluye que

$$E_g = (E_g \cap E) \cup (E_g \setminus E) = (E_g \cap E) \cup \big(E_f \setminus E\big)$$

es medible. □

Definimos $\operatorname{ess\,sup} f$, $\operatorname{ess\,inf} f$ y *función esencialmente acotada* como en las Definiciones 2.55, 2.58 y 2.60. Las propiedades válidas en $\mathbb{R}$ en relación con estos conceptos se mantienen válidas en general.