Tema 1: Medibilidad y medida
Problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

2 Medida sobre la recta real

2.1 Medida exterior de Lebesgue

1. Probar que si $m^*(A) = 0$, entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ para cualquier conjunto B.

2. Demostrar que todo conjunto contable tiene medida exterior nula. Deducir que el intervalo $[0,1]$ no es contable.

3. Sea $\{I_n\}_{n=1}^N$ un recubrimiento finito de los racionales en $[0,1]$ por intervalos. Probar que $\sum_{n=1}^N |I_n| \geq 1$.

4. Demostrar que en el Ejemplo 2.7 se puede suponer que los intervalos I_n $(n \in \mathbb{N})$ tienen sus extremos en algún subconjunto denso de $\mathbb{R}$, por ejemplo $\mathbb{Q}$, sin alterar la función m^* resultante en cada caso.

2.2 Conjuntos medibles

5. Obtener el intervalo (c,d) a partir de intervalos de la forma $[a,\infty)$, usando las operaciones de σ-álgebra.

6. Dados $k > 0$ y $A \subset \mathbb{R}$, sea $kA = \{x : k^{-1}x \in A\}$. Probar que:

   a) $m^*(kA) = km^*(A)$;

   b) A es medible si, y sólo si, kA lo es.

7. Dado $A \subset \mathbb{R}$, sea $-A = \{x : -x \in A\}$. Demostrar que:

   a) $m^*(A) = m^*(-A)$,

   b) A es medible si, y sólo si, $-A$ lo es.

8. *a)* Probar que todo abierto no vacío tiene medida positiva.

   b) Sea $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^\infty$ una enumeración de los racionales, y sea G el conjunto definido por

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

   Demostrar que $m(G \triangle F) > 0$ para todo cerrado F.

9. Probar que todo abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$ se puede expresar de manera única como unión contable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos.

10. Demostrar que si un conjunto E es medible, con $0 < m(E) < \infty$, y si $0 < \alpha < 1$, entonces existe un intervalo abierto U tal que $m(U \cap E) > \alpha |U|$.

11. Probar que dado cualquier conjunto A, existe un conjunto medible E que contiene a A, tal que $m^*(A) = m(E)$.

12. Sea $E \subset M$, donde M es medible y $m(M) < \infty$. Demostrar que E es medible si, y sólo si,

$$m(M) = m^*(E) + m^*(M \setminus E). \tag{1}$$

   [*Sugerencia: La condición* (1) *es trivialmente necesaria. Para ver que es suficiente, sean E', F' conjuntos medibles tales que $E \subset E'$ y $M \setminus E \subset F'$, con $m^*(E) = m(E')$ y $m^*(M \setminus E) = m(F')$* (Ejercicio 11). *Reemplazando E' por $E' \cap M$ y F' por $F' \cap M$, no se pierde generalidad al suponer que $E', F' \subset M$; en tal caso, $M = E' \cup F'$. Calcúlese $m(M)$ expresando el segundo miembro de esta igualdad como una unión disjunta y compárese el resultado con* (1) *para deducir que $m(E' \cap F') = 0$ y, de aquí, que $E' \setminus E$ es medible. Finalmente, escríbase $E = E' \setminus (E' \setminus E)$.*]

13. Sea S un conjunto acotado. Probar que todo número real x es el punto medio de un intervalo abierto I tal que $S \cap I$ y $S \setminus I$ tienen medida exterior $m^*(S)/2$.

    [*Sugerencia: Como m^* es invariante por traslaciones, no se pierde generalidad suponiendo $x = 0$. Las funciones $f(\alpha) = m^*(S \cap (-\alpha, \alpha))$ y $g(\alpha) = m^*(S \setminus (-\alpha, \alpha))$ satisfacen $f(\alpha) + g(\alpha) = m^*(S)$ $(\alpha > 0)$. Demuéstrese que f es continua y aplíquese el teorema de los valores intermedios en un intervalo adecuado.*]

14. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos. Verificar los siguientes asertos:

    a) $\liminf_{i\to\infty} E_i \subset \limsup_{i\to\infty} E_i$.

    b) Si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, existe $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

    c) Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, existe $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$.

15. Probar que el Teorema 2.29 (*ii*) sigue siendo válido si $m(E_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y que, en general, deja de ser cierto cuando se omite esta condición de finitud.

16. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles. Suponiendo que $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty$, demostrar que:

    a) $m(\liminf_{i\to\infty} E_i) \leq \liminf_{i\to\infty} m(E_i)$.

    b) $m(\limsup_{i\to\infty} E_i) \geq \limsup_{i\to\infty} m(E_i)$.

    c) Si existe $\lim_{i\to\infty} E_i$, entonces $m(\lim_{i\to\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$.

17. Sea E un conjunto medible, con $m(E) < \infty$. Asumiendo únicamente la aditividad finita de m, demostrar que los siguientes enunciados, relativos a subconjuntos medibles de E, son equivalentes:

    a) Para cualquier $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, se tiene $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i)$.

    b) Para cualquier $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, se tiene $\lim_{i\to\infty} m(B_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$.

    c) Para cualquier $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, se tiene $\lim_{i\to\infty} m(B_i) = m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$.

18. Dada una aplicación $f : X \to X'$, probar que:

    a) Si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en X, entonces $\mathscr{A}' = \left\{B \subset X' : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\right\}$ es una σ-álgebra en X'.

    b) Si $\mathscr{A}'$ es una σ-álgebra en X', entonces $\mathscr{A} = f^{-1}(\mathscr{A}') = \left\{f^{-1}(B) \subset X : B \in \mathscr{A}'\right\}$ es una σ-álgebra en X.

    c) Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X')$, entonces $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$, donde, como habitualmente, $\sigma(\mathscr{E})$ representa la σ-álgebra generada por una familia de conjuntos $\mathscr{E}$.

2.3 Regularidad

19. Demostrar que se verifican las siguientes relaciones conjuntistas:

    a) $E \triangle F = F \triangle E$.

    b) $(E \triangle F) \triangle G = E \triangle (F \triangle G)$.

    c) $(E \triangle F) \triangle (G \triangle H) = (E \triangle G) \triangle (F \triangle H)$.

    d) $E \triangle F = \emptyset$ si, y sólo si, $E = F$.

    e) $E \triangle F \subset (E \triangle G) \cup (G \triangle F)$.

    f) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \triangle \bigcup_{j=1}^{n} F_j \subset \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \triangle F_k)$.

20. *a*) Supongamos que $m^*(A) < \infty$ y que E es un conjunto medible tal que $E \subset A$ y $m(E) = m^*(A)$. Probar que A es medible.

b) Combinar a) y el Ejercicio 11 para dar una resolución alternativa de la suficiencia de la condición (1) en el Ejercicio 12.

21. Demostrar que si $m^*(E) < \infty$ y existen intervalos $I_1, \dots, I_n$ tales que $m^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \infty$, entonces cada intervalo I_i $(i = 1, \dots, n)$ es, necesariamente, finito.

22. En el Teorema 2.31 (vi), el número n de intervalos que forman J dependerá, en general, de ε. Verificar que la mejor aproximación posible de $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(k, k + 2^{-k}\right)$ por n intervalos cumple que $n \to \infty$ para $\varepsilon \to 0$.

23. Encontrar una unión J de n intervalos que satisfaga el apartado (vi) del Teorema 2.31 cuando $E = C$ es el conjunto de Cantor, estimando el n que corresponde a un ε dado.

24. Sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, donde $E_k = (k, k + 1/2)$ $(k \in \mathbb{N})$.

    a) Probar que, aunque E es medible, no es posible encontrar un conjunto J satisfaciendo las condiciones del Teorema 2.31 (vi) para ningún $\varepsilon > 0$.

    b) Explicar por qué este hecho no entra en contradicción con dicho teorema.

25. Justificar la Observación 2.32:

    a) Manipulando convenientemente los intervalos abiertos que conforman J.

    b) Dando una demostración alternativa de la implicación $(i) \Rightarrow (vi)$ del Teorema 2.31, que se apoye en la Definición 2.1 y en el Ejemplo 2.7. ¿Se puede lograr que los intervalos así obtenidos sean disjuntos dos a dos?

2.4 Funciones medibles

26. Se define $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

    Hallar la medida del conjunto $\{x : f(x) \geq 0\}$.

27. Demostrar que las funciones monótonas son medibles.

28. Sean f una función continua y g una función medible. Probar que la composición $f \circ g$ es medible.

29. Demostrar que para cualquier función medible f se tiene que $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$.

30. Probar los siguientes asertos:

    a) Si f es medible y $f = g$ c.t.p., entonces $\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g$.

    b) Si f es continua, entonces $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f$.

31. Sean f y g funciones medibles, con $g \geq 0$. Demostrar que $fg \leq (\operatorname{ess\,sup} f) g$ c.t.p..

32. Sea f una función medible que no es infinita c.t.p.. Probar que f está acotada en algún conjunto de medida positiva.

2.5 Medibilidad Borel y Lebesgue

33. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos. Demostrar que:

    a) Si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, entonces $m^*(\lim_{i\to\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} m^*(E_i)$.

    b) Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, entonces $m^*(\lim_{i\to\infty} E_i) \leq \lim_{i\to\infty} m^*(E_i)$. Esta desigualdad puede ser estricta, aunque $m^*(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

34. Probar que existe una función no medible $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\{x : g(x) = \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$; compárese con el Teorema 2.35 y el Ejemplo 2.36. [*Sugerencia: Partiendo de un conjunto no medible, constrúyase una función inyectiva g tal que $\{x : g(x) > 0\}$ no sea medible.*]

35. Sea f una función medible en $[a,b]$ y derivable c.t.p.. Demostrar que existe una función g que es medible en $[a,b]$ e igual a f' c.t.p..

36. Dar un ejemplo de una función no medible f tal que $|f|$ es medible.

37. Probar que $\sup_{\alpha\in A} f_\alpha$ no es necesariamente medible, aunque cada f_α lo sea.

38. Demostrar que existen conjuntos de medida nula que no son de Borel.

39. Probar que el Teorema 2.53 deja de verificarse si en su enunciado se reemplaza «medible» por «medible Borel».

40. Encontrar el cardinal de la clase de los conjuntos medibles.

41. Encontrar el cardinal de la clase de las funciones medibles reales.

2.6 Anexo: Representación ternaria del conjunto de Cantor

42. Demostrar que el conjunto de Cantor C es compacto, perfecto [todo punto de C es de acumulación], diseminado [el interior de su clausura es vacío], totalmente inconexo [dados $x,y \in C$, $x < y$, existe $z \in (x,y)$ tal que $z \notin C$] y tiene la potencia del continuo [está en biyección con $\mathbb{R}$].

43. Probar que todo conjunto perfecto no vacío $E \subset \mathbb{R}$ es incontable.

44. Dado $0 < \xi < 1/2$, el conjunto de tipo Cantor C_ξ es el subconjunto del intervalo $[0,1]$ que resulta de aplicar el algoritmo de formación del conjunto de Cantor C, pero de modo que cada uno de los 2^n intervalos cerrados retenidos en la etapa n-ésima tiene longitud ξ^n. Demostrar que C_ξ es medible, con $m(C_\xi) = 0$.

45. Dado $0 < \alpha \leq 1$, el conjunto de tipo Cantor $C^{(\alpha)}$ de α-tercios intermedios es el subconjunto del intervalo $[0,1]$ que resulta de aplicar el algoritmo de formación del conjunto de Cantor C, pero de modo que en la etapa n-ésima se retiran intervalos abiertos centrales de longitud $\alpha/3^n$. Probar que $C^{(\alpha)}$ es medible, con $m(C^{(\alpha)}) = 1 - \alpha$.

46. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset [0,1]$ tal que $m(A) > 0$ y $m(A \cap I) < |I|$ para cualquier intervalo abierto $I \subset [0,1]$.

47. *a*) Demostrar que $[0,1]$ puede ser escrito como unión de una familia contable de conjuntos perfectos diseminados y un conjunto de medida nula.

    b) Deducir que existe un conjunto de medida nula que es de segunda categoría, es decir, que no puede ser expresado como unión contable de conjuntos diseminados.

48. Probar que un conjunto perfecto diseminado puede contener un conjunto no medible.

49. Demostrar que una función medible de una función continua no es, necesariamente, medible.

50. Sea f la función de Cantor definida en la demostración del Teorema 2.65. Probar que el rango de f no cubre el conjunto de Cantor C.

51. Supongamos que $x \in [0,1]$ admite el desarrollo $x = 0.x_1x_2\ldots x_n\ldots$ en base ℓ para algún entero ℓ, donde, en caso de ambigüedad, se usa la representación infinita. Demostrar que $f_n(x) = x_n$ es una función medible de x, para cada $n \in \mathbb{N}$.

52. Sea G el conjunto de los números reales que pueden ser expresados en la forma

$$\frac{c_1}{5} + \frac{c_2}{5^2} + \cdots + \frac{c_n}{5^n} + \cdots,$$

donde $c_n = 0$ ó $c_n = 4$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $m(G) = 0$.

53. Demostrar que el subconjunto de $[0,1]$ formado por los números cuya expresión decimal excluye al dígito 5 tiene medida nula.

54. Sean k un entero positivo y $\{n_i\}_{i=1}^m$ una secuencia finita de enteros positivos, todos ellos menores que k. Probar que el conjunto formado por los números de $[0,1]$ cuyo desarrollo en base k no contiene a la secuencia $\{n_i\}_{i=1}^m$ es de medida nula.

3 Espacios de medida abstractos

55. Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números no negativos. Definimos una función de conjunto μ sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ poniendo $\mu(A) = \sum_{n\in A} a_n$ si $A \subset \mathbb{N}$ no es vacío, y $\mu(\emptyset) = 0$. Demostrar que $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ es un espacio de medida. Demostrar también que la medida μ es completa y, si $a_n < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que es σ-finita.

56. Sea $\{(X_n, \mathscr{S}_n)\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de espacios medibles, donde X_n $(n \in \mathbb{N})$ son subconjuntos de un conjunto X, disjuntos dos a dos. Probar que $(Y, \mathscr{S})$ es un espacio medible, donde $Y = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ y $\mathscr{S}$ es la clase formada por todas las uniones de la forma $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$, con $E_n \in \mathscr{S}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

57. Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de medida nula que no es de Borel (Ejercicio 36), ¿será $\chi_E = 0$ c.t.p. respecto de la medida de Borel?

58. Demostrar, mediante un contraejemplo, que si μ no es completa entonces f medible y $f = g$ c.t.p. no implica g medible.

59. Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X, y sea $F \subset X$. Probar que:

   a) $F \setminus \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} (F \setminus E_n)$.

   b) $F \setminus \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} (F \setminus E_n)$.

60. Demostrar que si χ^* y χ_* son, respectivamente, las funciones características de $\limsup_{n\to\infty} E_n$ y $\liminf_{n\to\infty} E_n$, entonces $\chi^* = \limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}$ y $\chi_* = \liminf_{n\to\infty} \chi_{E_n}$.

61. Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{S}$, donde $\mathscr{S}$ es una σ-álgebra, y sea μ una medida sobre $\mathscr{S}$. Probar que:

   a) $\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

   b) Si $\mu(X) < \infty$, entonces $\limsup_{n\to\infty} \mu(E_n) \le \mu(\limsup_{n\to\infty} E_n)$; el resultado puede ser falso si se omite la condición $\mu(X) < \infty$.

   Compárese con el Ejercicio 16.