Tema 1: Medibilidad y medida
Problemas resueltos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

Universidad de La Laguna

2 Medida sobre la recta real

2.1 Medida exterior de Lebesgue

1. Probar que si $m^*(A) = 0$, entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ para cualquier conjunto B.

   Resolución. Se tiene:
$$m^*(B) \leq m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B).$$
□

2. Demostrar que todo conjunto contable tiene medida exterior nula. Deducir que el intervalo $[0,1]$ no es contable.

   Resolución. Si el conjunto es $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, entonces
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty \{x_i\}\right) \leq \sum_{i=1}^\infty m^*(\{x_i\}) = 0.$$
   La medida exterior de un intervalo es su longitud. Como $m^*([0,1]) = 1$, este intervalo no puede ser contable. □

3. Sea $\{I_n\}_{n=1}^N$ un recubrimiento finito de los racionales en $[0,1]$ por intervalos. Probar que $\sum_{n=1}^N |I_n| \geq 1$.

   Resolución. En virtud de los Teoremas 2.2 (iii), 2.4 y 2.5, basta probar que $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^N \overline{I_n}$. En efecto, $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \bigcup_{n=1}^N I_n$ implica
$$[0,1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^N I_n} = \bigcup_{n=1}^N \overline{I_n}.$$
   Luego,
$$1 = m^*([0,1]) \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^N \overline{I_n}\right) \leq \sum_{n=1}^N |\overline{I_n}| = \sum_{n=1}^N |I_n|,$$
   como se pretendía. □

4. Demostrar que en el Ejemplo 2.7 se puede suponer que los intervalos I_n $(n \in \mathbb{N})$ tienen sus extremos en algún subconjunto denso de $\mathbb{R}$, por ejemplo $\mathbb{Q}$, sin alterar la función m^* resultante en cada caso.

   Resolución. Sea $m_D^*(E)$ la medida exterior de $E \subset \mathbb{R}$ que se obtiene si en el Ejemplo 2.7 (i) se consideran solamente intervalos con extremos en un conjunto denso D. Por la propia definición, $m_D^*(E) \geq m^*(E)$. Para probar que $m_D^*(E) \leq m^*(E)$, podemos asumir que $m^*(E) < \infty$. En tal caso, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ de intervalos abiertos tales que $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ y
$$\sum_{n=1}^\infty |I_n| \leq m^*(E) + \varepsilon < \infty. \tag{1}$$
   Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea I'_n un intervalo abierto con extremos en D que contiene a I_n, tal que $|I'_n| \leq (1+\varepsilon)|I_n|$. Esto se puede lograr de la siguiente manera: suponiendo que $I_n = (a_n, b_n)$ (nótese que, en virtud de (1), este intervalo tiene longitud finita), el carácter denso de D permite encontrar $p_n, q_n \in D$ de modo que $a_n - (b_n - a_n)\varepsilon/2 \leq p_n < a_n$ y $b_n < q_n \leq b_n + (b_n - a_n)\varepsilon/2$. Entonces, $I'_n = (p_n, q_n) \supset I_n$ y
$$|I'_n| = q_n - p_n \leq b_n + \frac{(b_n - a_n)\varepsilon}{2} - a_n + \frac{(b_n - a_n)\varepsilon}{2} = (b_n - a_n) + (b_n - a_n)\varepsilon = (1+\varepsilon)|I_n|.$$
   Sigue ahora de (1) que
$$m^*(E) + \varepsilon \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{n=1}^\infty |I'_n|.$$
   Pero $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty I'_n$, una unión de intervalos abiertos con extremos en D, así que $\sum_{n=1}^\infty |I'_n| \geq m_D^*(E)$. Se concluye que $m_D^*(E) \leq (1+\varepsilon)(m^*(E) + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, y con ello que $m_D^*(E) \leq m^*(E)$, como se pretendía. □

2.2 Conjuntos medibles

5. Obtener el intervalo (c,d) a partir de intervalos de la forma $[a,\infty)$, usando las operaciones de σ-álgebra.

Resolución. Las operaciones de σ-álgebra son la complementación y las uniones contables; en virtud de las leyes de De Morgan, podemos incluir también las intersecciones contables. Ahora,

$$(c,d) = [d,\infty)^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[c+\frac{1}{n},\infty\right). \qquad \square$$

6. Dados $k>0$ y $A \subset \mathbb{R}$, sea $kA = \{x : k^{-1}x \in A\}$. Probar que:

a) $m^*(kA) = km^*(A)$;

b) A es medible si, y sólo si, kA lo es.

Resolución.

a) Supongamos, en primer lugar, que $m^*(A) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, la definición de medida exterior proporciona una sucesión $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ de intervalos tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m^*(A) + k^{-1}\varepsilon$. Entonces, $kA \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} kI_i$ implica

$$m^*(kA) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |kI_i| = k\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq k\left[m^*(A) + k^{-1}\varepsilon\right] = km^*(A) + \varepsilon;$$

la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ obliga a que se tenga $m^*(kA) \leq km^*(A)$, y, en particular, $m^*(kA) < \infty$. La desigualdad opuesta se obtiene sin más que aplicar la que se acaba de probar al conjunto $A = k^{-1}(kA)$, con $m^*(kA) < \infty$, resultando entonces que $m^*(A) < \infty$.

Hemos establecido así que $m^*(A) < \infty$ si, y sólo si, $m^*(kA) < \infty$ y que, en tal caso, $m^*(kA) = km^*(A)$. Consecuentemente, $m^*(A) = \infty$ si, y sólo si, $m^*(kA) = \infty$, en cuyo caso también se cumple que $m^*(kA) = km^*(A) = \infty$.

b) Sea $A \in \mathscr{M}$. Para cualquier $B \subset \mathbb{R}$ se tiene entonces

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c);$$

queremos probar que

$$m^*(B) = m^*(B \cap kA) + m^*(B \cap (kA)^c).$$

Escribiendo $B = kC$ para un C apropiado, teniendo en cuenta que $(kA)^c = kA^c$, y aplicando *a*) encontramos, para el segundo miembro de esta igualdad, que

$$\begin{aligned} m^*(B \cap kA) + m^*(B \cap (kA)^c) &= m^*(kC \cap kA) + m^*(kC \cap kA^c) = m^*(k(C \cap A)) + m^*(k(C \cap A^c)) \\ &= km^*(C \cap A) + km^*(C \cap A^c) = km^*(C) = m^*(kC) \\ &= m^*(B). \end{aligned}$$

Por tanto, $kA \in \mathscr{M}$. Escribiendo ahora $A = k^{-1}(kA)$ se concluye que A es medible si kA lo es. $\square$

7. Dado $A \subset \mathbb{R}$, sea $-A = \{x : -x \in A\}$. Demostrar que:

a) $m^*(A) = m^*(-A)$,

b) A es medible si, y sólo si, $-A$ lo es.

Resolución.

a) Supongamos, en primer lugar, que $m^*(A) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, la definición de medida exterior proporciona una sucesión $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ de intervalos tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \le m^*(A) + \varepsilon$. Entonces, $-A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} -I_i$ implica

$$m^*(-A) \le \sum_{i=1}^{\infty} |-I_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \le m^*(A) + \varepsilon;$$

la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ obliga a que se tenga $m^*(-A) \le m^*(A)$, y, en particular, $m^*(-A) < \infty$. La desigualdad opuesta se obtiene sin más que aplicar la que se acaba de probar al conjunto $A = -(-A)$, con $m^*(-A) < \infty$, resultando entonces que $m^*(A) < \infty$.

Hemos establecido así que $m^*(A) < \infty$ si, y sólo si, $m^*(-A) < \infty$ y que, en tal caso, $m^*(-A) = m^*(A)$. Consecuentemente, $m^*(A) = \infty$ si, y sólo si, $m^*(-A) = \infty$, en cuyo caso también se cumple que $m^*(-A) = m^*(A) = \infty$.

b) Sea $A \in \mathscr{M}$. Para cualquier $B \subset \mathbb{R}$ se tiene entonces

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c);$$

queremos probar que

$$m^*(B) = m^*(B \cap (-A)) + m^*(B \cap (-A)^c).$$

Escribiendo $B = -C$ para un C apropiado, teniendo en cuenta que $(-A)^c = -A^c$, y aplicando *a*) encontramos, para el segundo miembro de esta igualdad, que

$$\begin{aligned} m^*(B \cap (-A)) + m^*(B \cap (-A)^c) &= m^*(-C \cap (-A)) + m^*(-C \cap (-A^c)) = m^*(-(C \cap A)) + m^*(-(C \cap A^c)) \\ &= m^*(C \cap A) + m^*(C \cap A^c) = m^*(C) = m^*(-B) \\ &= m^*(B). \end{aligned}$$

Por tanto, $-A \in \mathscr{M}$. Escribiendo ahora $A = -(-A)$ se concluye que A es medible si $-A$ lo es.

□

8. *a*) Probar que todo abierto no vacío tiene medida positiva.

   b) Sea $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales, y sea G el conjunto definido por

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

   Demostrar que $m(G \triangle F) > 0$ para todo cerrado F.

Resolución.

a) Los abiertos son medibles (Teorema 2.26). Todo abierto no vacío O contiene un intervalo abierto no vacío $I = (a,b)$, con $m(O) \ge m(I) = b - a > 0$.

b) Como G es abierto y F cerrado, $G \triangle F = (G \setminus F) \cup (F \setminus G)$ es medible. Y como esta unión es disjunta,

$$m(G \triangle F) = m(G \setminus F) + m(F \setminus G)$$

(Teorema 2.19). Si $m(G \setminus F) > 0$, no hay nada que probar. Si $m(G \setminus F) = 0$ entonces, al ser $G \setminus F$ abierto, por *a*) debemos tener $G \subset F$. Pero $G \supset \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, así que $F = \mathbb{R}$ y $m(F) = \infty$. Por otra parte,

$$m(G) \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \tag{2}$$

Puesto que $F = (F \setminus G) \cup G$, con unión disjunta, implica $m(F) = m(F \setminus G) + m(G)$ y se cumple (2), obtenemos finalmente

$$m(G \triangle F) = m(F \setminus G) = \infty. \qquad \square$$

9. Probar que todo abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$ se puede expresar de manera única como unión contable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos.

Resolución. Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto, y sea $x \in U$. Si $x \in \mathbb{Q}$, definimos

$$I_x = \bigcup_{x \in I \subset U} I,$$

donde los I son intervalos abiertos. Ya que I_x es una unión de intervalos abiertos no disjuntos (pues cada uno de ellos contiene a x) y contenidos en U, I_x es, a su vez, un intervalo abierto contenido en U. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, al ser U abierto y $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ e $y \in \mathbb{Q}$ tales que $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$; de la definición de I_y se sigue que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset I_y$, así que $x \in I_y$. En definitiva, todo $x \in U$ está en $I_q \subset U$ para algún $q \in U \cap \mathbb{Q}$. Se concluye que

$$U = \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}} I_q$$

es una unión contable de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos.

Supongamos ahora que $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ es otra familia contable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos verificando que $U = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$. Dado $x \in U$, existe un único $m = m(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in J_m \subset U$; luego, $J_m \subset I_x$. Si $J_m \subsetneq I_x$, al menos uno de los extremos de J_m, que denotamos y, no es un extremo de I_x. Como J_m es abierto, $y \notin J_m$. Pero $y \in I_x \subset U$, luego existe $n \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, tal que $y \in J_n$. Puesto que y es un extremo de J_m, necesariamente $J_n \cap J_m \neq \emptyset$, una contradicción. Se concluye que $J_m = I_x$. $\square$

10. Demostrar que si un conjunto E es medible, con $0 < m(E) < \infty$, y si $0 < \alpha < 1$, entonces existe un intervalo abierto U tal que $m(U \cap E) > \alpha |U|$.

Resolución. En virtud del Ejemplo 2.6, algún abierto $O \supset E$ es tal que $m(O) < \alpha^{-1} m(E)$. El abierto O se expresa como unión de una sucesión $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos (Ejercicio 9): $O = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Sigue que

$$\alpha \sum_{n=1}^\infty |I_n| = \alpha\, m(O) < m(E) = m(E \cap O) = m\left(E \cap \dot{\bigcup_{n=1}^\infty} I_n\right) = m\left(\dot{\bigcup_{n=1}^\infty} (E \cap I_n)\right) = \sum_{n=1}^\infty m(E \cap I_n),$$

obligando a que sea

$$\alpha\, |I_m| < m\,(E \cap I_m)$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Basta tomar $U = I_m$. $\square$

11. Probar que dado cualquier conjunto A, existe un conjunto medible E que contiene a A, tal que $m^*(A) = m(E)$.

Resolución. Si $m^*(A) = \infty$, tomamos $E = \mathbb{R}$. Si $m^*(A) < \infty$, hagamos $\varepsilon = 1/n$ en el Ejemplo 2.6 y escribamos O_n para denotar el abierto correspondiente. El conjunto G_δ dado por $E = \bigcap_{n=1}^\infty O_n$ tiene las propiedades requeridas: $A \subset E$ implica, por monotonía, $m^*(A) \leq m(E)$, mientras que

$$m(E) \leq m\,(O_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

prueba que $m(E) \leq m^*(A)$ y, con ello, que $m(E) = m^*(A)$. $\square$

12. Sea $E \subset M$, donde M es medible y $m(M) < \infty$. Demostrar que E es medible si, y sólo si,

$$m(M) = m^*(E) + m^*(M \setminus E). \tag{3}$$

[*Sugerencia: La condición* (3) *es trivialmente necesaria. Para ver que es suficiente, sean E', F' conjuntos medibles tales que $E \subset E'$ y $M \setminus E \subset F'$, con $m^*(E) = m(E')$ y $m^*(M \setminus E) = m(F')$* (Ejercicio 11). *Reemplazando E' por $E' \cap M$ y F' por $F' \cap M$, no se pierde generalidad al suponer que $E', F' \subset M$; en tal caso, $M = E' \cup F'$. Calcúlese $m(M)$ expresando el segundo miembro de esta igualdad como una unión disjunta y compárese el resultado con* (3) *para deducir que $m(E' \cap F') = 0$ y, de aquí, que $E' \setminus E$ es medible. Finalmente, escríbase $E = E' \setminus (E' \setminus E)$.*]

Resolución. Si E es medible, podemos usar E para medir $M \supset E$; es decir, se cumple (3):

$$m(M) = m(M \cap E) + m(M \setminus E) = m(E) + m(M \setminus E).$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica (3). El Ejercicio 11 proporciona conjuntos medibles E', F' tales que $E \subset E'$ y $M \setminus E \subset F'$, con $m^*(E) = m(E')$ y $m^*(M \setminus E) = m(F')$. Reemplazando E' por $E' \cap M$ y F' por $F' \cap M$, podemos suponer que $E', F' \subset M$. En efecto: tanto $E' \cap M$ como $F' \cap M$ están contenidos en M, son medibles, contienen a E y a $M \setminus E$, respectivamente, y se cumple que $m^*(E) = m(E' \cap M)$ y $m^*(M \setminus E) = m(F' \cap M)$, por cuanto

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leq m(E' \cap M) \leq m(E') = m^*(E), \\ m^*(M \setminus E) &\leq m(F' \cap M) \leq m(F') = m^*(M \setminus E). \end{aligned}$$

Ahora, $M = E' \cup F'$:

$$M = (M \cap E) \cup (M \setminus E) = E \cup (M \setminus E) \subset E' \cup F' \subset M.$$

Expresando esta unión como una unión disjunta,

$$M = (E' \setminus F') \cup (F' \setminus E') \cup (E' \cap F'),$$

resulta:

$$m(M) = m(E' \setminus F') + m(F' \setminus E') + m(E' \cap F'). \tag{4}$$

Nótese que (3) puede reescribirse en términos de E' y F' como

$$m(M) = m(E') + m(F'). \tag{5}$$

Puesto que F' y E' son medibles, se tiene, respectivamente,

$$\begin{aligned} m\left(E'\right) &= m\left(E' \cap F'\right) + m\left(E' \setminus F'\right), \\ m\left(F'\right) &= m\left(F' \cap E'\right) + m\left(F' \setminus E'\right). \end{aligned}$$

Insertando estas expresiones en (5), encontramos que

$$m(M) = m\left(E' \setminus F'\right) + m\left(F' \setminus E'\right) + 2m\left(E' \cap F'\right). \tag{6}$$

La comparación de (4) y (6), junto con el hecho de que todas las medidas involucradas son finitas, proporciona $m(E' \cap F') = 0$. Ya que $E' \subset M$, podemos escribir

$$E' \setminus E = E' \cap (M \setminus E) \subset E' \cap F',$$

de modo que que $E' \setminus E$ es medible. Se concluye que $E = E' \setminus (E' \setminus E)$ también es medible. $\square$

13. Sea S un conjunto acotado. Probar que todo número real x es el punto medio de un intervalo abierto I tal que $S \cap I$ y $S \setminus I$ tienen medida exterior $m^*(S)/2$.

[*Sugerencia: Como* m^* *es invariante por traslaciones, no se pierde generalidad suponiendo* $x = 0$*. Las funciones* $f(\alpha) = m^*(S \cap (-\alpha, \alpha))$ *y* $g(\alpha) = m^*(S \setminus (-\alpha, \alpha))$ *satisfacen* $f(\alpha) + g(\alpha) = m^*(S)$ $(\alpha > 0)$*. Demuéstrese que* f *es continua y aplíquese el teorema de los valores intermedios en un intervalo adecuado.*]

Resolución. Si $m^*(S) = 0$, el resultado es obvio para cualquier intervalo. Supongamos entonces que $m^*(S) > 0$. Podemos asumir que $x = 0$: una vez resuelto este caso, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $S - x$ es acotado, con $m^*(S - x) > 0$; luego, existirá un intervalo abierto J, centrado en 0, tal que $(S - x) \cap J$ y $(S - x) \setminus J$ tienen medida exterior $m^*(S - x)/2$. Sin más que tomar $I = J + x$ obtenemos un intervalo abierto centrado en x, que verifica:

$$m^*(S \cap I) = m^*((S \cap I) - x) = m^*((S - x) \cap (I - x)) = m^*((S - x) \cap J)) = \frac{m^*(S - x)}{2} = \frac{m^*(S)}{2},$$
$$m^*(S \setminus I) = m^*((S \setminus I) - x) = m^*((S - x) \cap (I^c - x)) = m^*((S - x) \cap J^c) = m^*((S - x) \setminus J) = \frac{m^*(S - x)}{2} = \frac{m^*(S)}{2}.$$

Introducimos ahora las funciones auxiliares

$$f(\alpha) = m^*(S \cap (-\alpha, \alpha)), \quad g(\alpha) = m^*(S \setminus (-\alpha, \alpha)) \qquad (\alpha > 0).$$

Puesto que el intervalo $(-\alpha, \alpha)$ es medible, se verifica que

$$f(\alpha) + g(\alpha) = m^*(S) \quad (\alpha > 0). \tag{7}$$

Además, para $a = \alpha$ suficientemente pequeño, se tiene que

$$f(a) \leq |(-\alpha, \alpha)| = 2\alpha < \frac{m^*(S)}{2}.$$

Por último, como S se supone acotado, existe $b > 0$ tal que $S \subset (-b, b)$, así que $f(b) = m^*(S)$. Si f fuese continua en cualquier $\alpha > 0$, el teorema del valor intermedio garantizaría que f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ y, en particular, que $f(\alpha) = m^*(S)/2$ para algún $\alpha \in (a, b)$, obligando, en virtud de (7), a que también sea $g(\alpha) = m^*(S)/2$.

Probemos, pues, la continuidad de f en $\alpha > 0$. Fijado $h > 0$, la subaditividad de m^* permite escribir

$$m^*(S \cap (-\alpha - h, \alpha + h)) \leq m^*(S \cap (-\alpha - h, -\alpha)) + m^*(S \cap (-\alpha, \alpha)) + m^*(S \cap (\alpha, \alpha + h)),$$

de donde

$$\begin{aligned} f(\alpha + h) - f(\alpha) &\leq m^*(S \cap (-\alpha - h, -\alpha)) + m^*(S \cap (\alpha, \alpha + h)) \\ &\leq |(-\alpha - h, -\alpha)| + |(\alpha, \alpha + h)| \\ &= 2h \to 0, \quad \text{cuando } h \to 0. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$m^*(S \cap (-\alpha, \alpha)) \leq m^*(S \cap (-\alpha, -\alpha + h)) + m^*(S \cap (-\alpha + h, \alpha - h)) + m^*(S \cap (\alpha - h, \alpha)),$$

de donde

$$f(\alpha) - f(\alpha - h) \leq m^*(S \cap (-\alpha, -\alpha + h)) + m^*(S \cap (\alpha - h, \alpha))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |(-\alpha,-\alpha+h)| + |(\alpha-h,\alpha)| \\
&= 2h \to 0, \quad \text{cuando } h \to 0.
\end{aligned}
$$

Esto completa la resolución. □

14. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos. Verificar los siguientes asertos:

a) $\liminf_{i\to\infty} E_i \subset \limsup_{i\to\infty} E_i$.

b) Si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, existe $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

c) Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, existe $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$.

Resolución.

a) Se tiene que $x \in \liminf_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i$ si, y sólo si, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_i$ para todo $i \geq m$. Por otra parte, $x \in \limsup_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$ si, y sólo si, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $i \geq n$ tal que $x \in E_i$. Supongamos que $x \in \liminf_{i\to\infty} E_i$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_i$ para todo $i \geq m$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $i \geq \max\{n,m\}$. Entonces $i \geq n$ y como $i \geq m$, por hipótesis se tiene que $x \in E_i$. Así pues, $x \in \limsup_{i\to\infty} E_i$.

Alternativamente, se sigue de la definición que $\liminf_{i\to\infty} E_i$ es el conjunto de los puntos que pertenecen a todos los conjuntos E_i excepto a un número finito de ellos, mientras que $\limsup_{i\to\infty} E_i$ es el conjunto de los puntos que pertenecen a una infinidad de conjuntos E_i. Estas descripciones conducen inmediatamente a la inclusión afirmada.

b) Como la sucesión es creciente, se tiene

$$\liminf_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Por *a*),

$$\liminf_{i\to\infty} E_i \subset \limsup_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \liminf_{i\to\infty} E_i,$$

estableciendo *b*).

c) Como la sucesión es decreciente, se tiene

$$\limsup_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Por *a*),

$$\liminf_{i\to\infty} E_i \subset \limsup_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i = \liminf_{i\to\infty} E_i,$$

estableciendo *c*). □

15. Probar que el Teorema 2.29 (*ii*) sigue siendo válido si $m(E_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y que, en general, deja de ser cierto cuando se omite esta condición de finitud.

Resolución. Si $m\left(E_{i_0}\right) < \infty$, podemos aplicar el teorema a $E_{i_0}, E_{i_0+1}, \ldots$, obteniendo:

$$m\left(\bigcap_{j=i_0}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(E_j).$$

Ahora bien, puesto que $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es decreciente,

$$\bigcap_{j=i_0}^{\infty} E_j \subset E_{i_0} \subset E_{i_0-1} \subset \ldots \subset E_1,$$

es decir, $\bigcap_{j=i_0}^{\infty} E_j \subset \bigcap_{j=1}^{i_0-1} E_j$, así que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcap_{j=1}^{i_0-1} E_j \cap \bigcap_{j=i_0}^{\infty} E_j = \bigcap_{j=i_0}^{\infty} E_j,$$

y finalmente

$$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = m\left(\bigcap_{j=i_0}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(E_j).$$

Como contraejemplo para el caso en que $m(E_i) = \infty$ $(i \in \mathbb{N})$, sea $E_i = (i, \infty)$; entonces, $\lim_{i\to\infty} m(E_i) = \infty$ mientras que $\lim_{i\to\infty} E_i = \emptyset$, con $m(\lim_{i\to\infty} E_i) = 0$. □

16. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles. Suponiendo que $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty$, demostrar que:

a) $m\left(\liminf_{i\to\infty} E_i\right) \leq \liminf_{i\to\infty} m(E_i)$.

b) $m\left(\limsup_{i\to\infty} E_i\right) \geq \limsup_{i\to\infty} m(E_i)$.

c) Si existe $\lim_{i\to\infty} E_i$, entonces $m\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$.

Resolución. Consideramos las sucesiones de conjuntos

$$F_k = \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i, \quad G_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Nótese que $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ es creciente, mientras que $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente, con $m(G_1) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty$. Además (Ejercicio 14),

$$\lim_{k\to\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \liminf_{i\to\infty} E_i, \qquad \lim_{k\to\infty} G_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \limsup_{i\to\infty} E_i,$$

y existe $\lim_{i\to\infty} E_i$ si, y sólo si, $\lim_{k\to\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} G_k = \lim_{i\to\infty} E_i$. Las sucesiones numéricas $\{m(F_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m(G_k)\}_{k=1}^{\infty}$ también son monótonas y, por lo tanto, convergen a sendos límites, finitos o infinitos, que se corresponden con su supremo y su ínfimo, respectivamente.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $F_k \subset E_i$ $(i \geq k)$ implica $m(F_k) \leq \inf_{i\geq k} m(E_i)$, y, similarmente, $E_i \subset G_k$ $(i \geq k)$ implica $\sup_{i\geq k} m(E_i) \leq m(G_k)$. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} m(F_k) &= \sup_{k\in\mathbb{N}} m(F_k) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq k} m(E_i) = \liminf_{i\to\infty} m(E_i) \\ &\leq \limsup_{i\to\infty} m(E_i) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{i\geq k} m(E_i) \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} m(G_k) = \lim_{k\to\infty} m(G_k).\end{aligned}$$

En virtud del Teorema 2.29, y ya que $m(G_1) < \infty$, quedan establecidos *a*) y *b*):

$$\begin{aligned}m\left(\liminf_{i\to\infty} E_i\right) &= m\left(\lim_{k\to\infty} F_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(F_k) \leq \liminf_{i\to\infty} m(E_i) \\ &\leq \limsup_{i\to\infty} m(E_i) \leq \lim_{k\to\infty} m(G_k) = m\left(\lim_{k\to\infty} G_k\right) = m\left(\limsup_{i\to\infty} E_i\right).\end{aligned}$$

Si existe $\lim_{i\to\infty} E_i$, todas las desigualdades de esta cadena son igualdades: existe $\lim_{i\to\infty} m(E_i)$ y

$$m\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i),$$

probando c). □

17. Sea E un conjunto medible, con $m(E) < \infty$. Asumiendo únicamente la aditividad finita de m, demostrar que los siguientes enunciados, relativos a subconjuntos medibles de E, son equivalentes:

    a) Para cualquier $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, se tiene $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i)$.

    b) Para cualquier $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, se tiene $\lim_{i\to\infty} m(B_i) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$.

    c) Para cualquier $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, se tiene $\lim_{i\to\infty} m(B_i) = m(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$.

    Resolución. La equivalencia entre los tres asertos se establecerá con la siguiente cadena de implicaciones: $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$.

    $a) \Rightarrow b)$ Dada una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, expresamos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B_1 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (B_i \setminus B_{i-1}) \tag{8}$$

como una unión de conjuntos disjuntos dos a dos, donde, teniendo en cuenta la aditividad finita de m y el hecho de que $m(B_i) < \infty$ $(i \in \mathbb{N})$, podemos escribir

$$m(B_i \setminus B_{i-1}) = m(B_i) - m(B_{i-1}) \quad (i \in \mathbb{N},\ i \geq 2).$$

Aplicando ahora a) a (8), ya resulta b):

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= m(B_1) + \sum_{i=2}^{\infty} m(B_i \setminus B_{i-1}) \\ &= m(B_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} m(B_i \setminus B_{i-1}) = m(B_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} [m(B_i) - m(B_{i-1})] = \lim_{n\to\infty} m(B_n). \end{aligned}$$

$b) \Rightarrow c)$ Basta proceder como en la demostración del Teorema 2.29 (ii). Partiendo de la sucesión decreciente $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, producimos la sucesión creciente $\{E \setminus B_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sigue de b) que

$$\lim_{i\to\infty} m(E \setminus B_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \setminus B_i)\right) = m\left(E \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right).$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $E = (E \setminus B_i) \cup B_i$, con unión disjunta; así, la aditividad finita de m entraña que $m(E) = m(E \setminus B_i) + m(B_i)$. Como, por monotonía, $m(B_i) < \infty$, es posible despejar para obtener

$$m(E \setminus B_i) = m(E) - m(B_i) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Similarmente,

$$m\left(E \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = m(E) - m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

Por tanto,

$$m(E) - \lim_{i\to\infty} m(B_i) = m(E) - m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right),$$

de donde, al ser $m(E)<\infty$, concluimos:

$$\lim_{i\to\infty} m(B_i) = m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right).$$

$c) \Rightarrow a)$ Sea $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos; entonces, existe $\lim_{i\to\infty} B_i = \emptyset$. En efecto, basta advertir que $\limsup_{i\to\infty} B_i = \emptyset$ porque está formado por los puntos que pertenecen a una infinidad de conjuntos B_i (cf. Ejercicio 14). Escribimos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i \quad (n\in\mathbb{N}).$$

La aditividad finita de m conduce a

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(B_i) + m\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i\right) \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{9}$$

Como la sucesión $\{\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, con

$$\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i = \limsup_{i\to\infty} B_i = \emptyset,$$

$c)$ implica

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i\right) = 0.$$

Tomando ahora límites cuando $n\to\infty$ en (9), se obtiene $a)$. □

18. Dada una aplicación $f: X\to X'$, probar que:

    $a)$ Si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en X, entonces $\mathscr{A}' = \left\{B\subset X' : f^{-1}(B)\in\mathscr{A}\right\}$ es una σ-álgebra en X'.

    $b)$ Si $\mathscr{A}'$ es una σ-álgebra en X', entonces $\mathscr{A} = f^{-1}(\mathscr{A}') = \left\{f^{-1}(B)\subset X : B\in\mathscr{A}'\right\}$ es una σ-álgebra en X.

    $c)$ Si $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X')$, entonces $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$, donde, como habitualmente, $\sigma(\mathscr{E})$ representa la σ-álgebra generada por una familia de conjuntos $\mathscr{E}$.

Resolución.

$a)$
- Como $f^{-1}(X') = X\in\mathscr{A}$, resulta que $X'\in\mathscr{A}'$.
- Si $B\in\mathscr{A}'$, entonces $f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$, obligando a que $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c\in\mathscr{A}$. Consecuentemente, $B^c\in\mathscr{A}'$.
- Si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}'$, entonces $f^{-1}(B_n)\in\mathscr{A}$ $(n\in\mathbb{N})$, de donde $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)\in\mathscr{A}$. Por tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\in\mathscr{A}'$.

$b)$
- Como $X'\in\mathscr{A}'$ y $f^{-1}(X') = X$, se tiene que $X\in\mathscr{A}$.
- Si $A\in\mathscr{A}$, entonces $A = f^{-1}(B)$, con $B\in\mathscr{A}'$. Dado que $A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c)$, con $B^c\in\mathscr{A}'$, encontramos que $A^c\in\mathscr{A}$.
- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$, entonces $A_n = f^{-1}(B_n)$, con $B_n\in\mathscr{A}'$ $(n\in\mathbb{N})$. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, con $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\in\mathscr{A}'$, concluimos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathscr{A}$.

$c)$ Ya que $\mathscr{C}\subset\sigma(\mathscr{C})$, se sigue que $f^{-1}(\mathscr{C})\subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$. Por el apartado $b)$, $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$ es σ-álgebra; y como $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)$ es la menor σ-álgebra que contiene a $f^{-1}(\mathscr{C})$, resulta que $\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)\subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$.

Recíprocamente, por el apartado $a)$, la clase de conjuntos

$$\mathscr{C}_0 = \left\{B\subset X' : f^{-1}(B)\in\sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)\right\}$$

es una σ-álgebra en X'; y como $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_0$, necesariamente $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}_0$. Luego,

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\mathscr{C}_0) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right),$$

lo que establece c). □

2.3 Regularidad

19. Demostrar que se verifican las siguientes relaciones conjuntistas:

    a) $E \triangle F = F \triangle E$.

    b) $(E \triangle F) \triangle G = E \triangle (F \triangle G)$.

    c) $(E \triangle F) \triangle (G \triangle H) = (E \triangle G) \triangle (F \triangle H)$.

    d) $E \triangle F = \emptyset$ si, y sólo si, $E = F$.

    e) $E \triangle F \subset (E \triangle G) \cup (G \triangle F)$.

    f) $\bigcup_{i=1}^n E_i \triangle \bigcup_{j=1}^n F_j \subset \bigcup_{k=1}^n (E_k \triangle F_k)$.

Resolución.

a) Obvia, por la simetría de la definición.

b) Se cumple que $E \triangle F = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$, así que

$$(E \triangle F)^c = (E \cup F)^c \cup (E \cap F) = (E^c \cap F^c) \cup (E \cap F).$$

Usando esta identidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}(E \triangle F) \triangle G &= [(E \triangle F) \setminus G] \cup [G \setminus (E \triangle F)] \\ &= \Big\{[(E \setminus F) \cup (F \setminus E)] \cap G^c\Big\} \cup \Big\{G \cap [(E^c \cap F^c) \cup (E \cap F)]\Big\} \\ &= (E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G) \cup (E \cap F \cap G).\end{aligned}$$

Por simetría (apartado a)) y analogía,

$$\begin{aligned}E \triangle (F \triangle G) &= (F \triangle G) \triangle E \\ &= (F \cap G^c \cap E^c) \cup (F^c \cap G \cap E^c) \cup (F^c \cap G^c \cap E) \cup (F \cap G \cap E) \\ &= (E \triangle F) \triangle G.\end{aligned}$$

c) Las propiedades de simetría, a), y asociatividad, b), permiten escribir:

$$\begin{aligned}(E \triangle F) \triangle (G \triangle H) &= ((F \triangle E) \triangle G) \triangle H = (F \triangle (E \triangle G)) \triangle H = ((E \triangle G) \triangle F) \triangle H \\ &= (E \triangle G) \triangle (F \triangle H).\end{aligned}$$

d) Se verifica que $E \triangle F = \emptyset$ si, y sólo si, $E \setminus F = F \setminus E = \emptyset$, lo que equivale a que $E \subset F$ y $F \subset E$, es decir, a que $E = F$.

e) Se tiene que

$$E \setminus F = (E \cap F^c) \cap (G \cup G^c) = (E \cap F^c \cap G) \cup (E \cap F^c \cap G^c)$$

$$\subset (F^c \cap G) \cup (E \cap G^c) = (E \setminus G) \cup (G \setminus F),$$

y, similarmente,

$$F \setminus E \subset (F \setminus G) \cup (G \setminus E).$$

El resultado se sigue sin más que tomar uniones.

f) La relación

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n} F_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} (E_i \setminus F_j) \subset \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \setminus F_k)$$

conduce a

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} E_i \triangle \bigcup_{j=1}^{n} F_j &= \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n} F_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n} F_j \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \\ &\subset \Big[\bigcup_{k=1}^{n} (E_k \setminus F_k)\Big] \cup \Big[\bigcup_{k=1}^{n} (F_k \setminus E_k)\Big] \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \Big[(E_k \setminus F_k) \cup (F_k \setminus E_k)\Big] = \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \triangle F_k).\end{aligned}$$

Comprobemos con un contraejemplo sencillo que esta inclusión puede ser estricta. Tomamos

$$E_1 = \{1,2,3\}, \quad E_2 = \{3,4,5\}, \quad F_1 = \{2,3,5\}, \quad F_2 = \{1,3,4\}.$$

Entonces

$$E_1 \cup E_2 = \{1,2,3,4,5\} = F_1 \cup F_2, \quad E_1 \triangle F_1 = \{1,5\} = E_2 \triangle F_2,$$

así que

$$(E_1 \cup E_2) \triangle (F_1 \cup F_2) = \emptyset \subsetneq \{1,5\} = (E_1 \triangle F_1) \cup (E_2 \triangle F_2).$$ □

20. *a*) Supongamos que $m^*(A) < \infty$ y que E es un conjunto medible tal que $E \subset A$ y $m(E) = m^*(A)$. Probar que A es medible.

b) Combinar *a*) con el Ejercicio 11 para dar una resolución alternativa de la suficiencia de la condición (3) en el Ejercicio 12.

Resolución.

a) Como E es medible,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m(E) + m^*(A \setminus E).$$

Puesto que $m(E) = m^*(A)$ y $m^*(A) < \infty$, se infiere que $m^*(A \setminus E) = 0$, obligando a que $A \setminus E$ y $A = E \cup (A \setminus E)$ sean medibles.

b) Admitiendo que se verifica (3), queremos probar que E es medible. El Ejercicio 11 proporciona un conjunto medible A tal que $E \subset A$ y $m(A) = m^*(E)$. Poniendo $B = A \cap M$ encontramos que B es medible, $E \subset B$, $M \setminus B \subset M \setminus E$ y

$$m^*(E) \le m(B) \le m(A) = m^*(E),$$

es decir, $m(B) = m^*(E)$. Usando ahora (3) y la medibilidad de $B \subset M$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} m^*(E) + m^*(M \setminus E) &= m(M) \\ &= m(M \cap B) + m(M \setminus B) = m(B) + m(M \setminus B)\end{aligned}$$

$$= m^*(E) + m(M \setminus B).$$

Por tanto, $m(M \setminus B) = m^*(M \setminus E)$. Como $m^*(M \setminus E) < \infty$ y $M \setminus B$ es medible, con $M \setminus B \subset M \setminus E$, sigue del apartado *a*) que $M \setminus E$ es medible y, de aquí, que $E = M \setminus (M \setminus E)$ también lo es. □

21. Demostrar que si $m^*(E) < \infty$ y existen intervalos $I_1, \dots, I_n$ tales que $m^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \infty$, entonces cada intervalo I_i $(i = 1, \dots, n)$ es, necesariamente, finito.

   Resolución. Se verifica:

$$E \cup \bigcup_{i=1}^n I_i = \left(E \triangle \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \cup \bigcup_{i=1}^n (E \cap I_i).$$

   Si algún I_i $(i = 1, \dots, n)$ es infinito, el primer miembro tiene medida exterior infinita. Pero el segundo miembro siempre tiene medida exterior finita. □

22. En el Teorema 2.31 (vi), el número n de intervalos que forman J dependerá, en general, de ε. Verificar que la mejor aproximación posible de $E = \bigcup_{k=1}^\infty \left(k, k+2^{-k}\right)$ por n intervalos cumple que $n \to \infty$ para $\varepsilon \to 0$.

   Resolución. El conjunto E es medible, con $m(E) = 1 < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, la mejor aproximación posible de E por n intervalos es $J = \bigcup_{k=1}^n \left(k, k+2^{-k}\right)$, para la que se debe tener

$$\varepsilon \geq m^*(E \triangle J) = m(E \triangle J) = m\left(\bigcup_{k=n+1}^\infty \left(k, k+2^{-k}\right)\right) = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

   Por tanto, $n \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$. □

23. Encontrar una unión J de n intervalos que satisfaga el apartado (vi) del Teorema 2.31 cuando $E = C$ es el conjunto de Cantor, estimando el n que corresponde a un ε dado.

   Resolución. En la notación de la Sección 2.6.3, los intervalos C_N^k $(k = 1, \dots, 2^N,\ N \in \mathbb{N})$ recubren C. En la etapa N-ésima, para $C_N = \bigcup_{k=1}^{2^N} C_N^k$, se verifica

$$m(C \triangle C_N) = m(C_N \setminus C) = m(C_N) - m(C) = \frac{2^N}{3^N} \leq \varepsilon,$$

   siempre que

$$N \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2 - \ln 3}.$$

   Esta aproximación requiere $n = 2^N$ intervalos. Como $n = 2^N$ implica $\ln n = N \ln 2$, finalmente:

$$n \geq \exp \frac{\ln 2\ \ln \varepsilon}{\ln 2 - \ln 3}.$$ □

24. Sea $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, donde $E_k = (k, k+1/2)$ $(k \in \mathbb{N})$.

   a) Probar que, aunque E es medible, no es posible encontrar un conjunto J satisfaciendo las condiciones del Teorema 2.31 (vi) para ningún $\varepsilon > 0$.

   b) Explicar por qué este hecho no entra en contradicción con dicho teorema.

   Resolución. El conjunto E es medible porque es una unión contable de intervalos abiertos, que son conjuntos medibles.

   a) Sea $\{I_1, \dots, I_n\}$ cualquier colección finita de intervalos abiertos, finitos y disjuntos dos a dos. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=1}^n I_k \subset (-N, N)$. Luego,

$$E \triangle \bigcup_{k=1}^n I_k \supset E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k \supset E \setminus (-N, N) = \bigcup_{k=N}^\infty E_k.$$

Así, obtenemos:

$$m\left(E \triangle \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \geq m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=N}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

b) No se cumplen las hipótesis del Teorema 2.31 (vi), porque $m(E) = \infty$. Por tanto, no hay contradicción alguna. □

25. Justificar la Observación 2.32:

a) Manipulando convenientemente los intervalos abiertos que conforman J.

b) Dando una demostración alternativa de la implicación $(i) \Rightarrow (vi)$ del Teorema 2.31, que se apoye en la Definición 2.1 y en el Ejemplo 2.7. ¿Se puede lograr que los intervalos así obtenidos sean disjuntos dos a dos?

Resolución.

a) Fijemos $\varepsilon > 0$. Si se quiere que los intervalos sean semiabiertos (respectivamente, cerrados), una vez obtenidos los intervalos $I_1, \ldots, I_n$ abiertos, finitos y disjuntos dos a dos que el Teorema 2.31 (vi) asocia a ε, se eligen intervalos semiabiertos (respectivamente, cerrados) $J_i \subset I_i$ tales que $m(I_i - J_i) \leq \varepsilon/n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Los nuevos intervalos son finitos y disjuntos dos a dos y, por el Ejercicio 19, satisfacen

$$\begin{aligned} m\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^{n} J_i\right) &\leq m\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) + m\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \triangle \bigcup_{i=1}^{n} J_i\right) \\ &\leq m\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) + m\left(\bigcup_{i=1}^{n} (I_i \setminus J_i)\right) \\ &= m\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) + \sum_{i=1}^{n} m(I_i \setminus J_i) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

b) Dado $\varepsilon > 0$, la Definición 2.1 y el Ejemplo 2.7 proporcionan una sucesión $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ de intervalos (abiertos, cerrados o semiabiertos) tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq m^*(E) + \varepsilon/2$. Como $m^*(E) < \infty$, la serie es convergente y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |I_j| \leq \varepsilon/2$. Si llamamos $J = \bigcup_{j=1}^{n_0} I_j$, entonces

$$\begin{aligned} m^*(J \triangle E) = m^*(J \setminus E) + m^*(E \setminus J) &\leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \setminus E\right) + m^*\left(\bigcup_{j=n_0+1}^{\infty} I_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| - m^*(E) + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |I_j| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, cualquier unión finita de intervalos se puede convertir en una unión finita de intervalos del mismo tipo, disjuntos dos a dos. En efecto, supongamos que se parte de una colección de intervalos semiabiertos por la derecha. Si se dispone en ella de dos intervalos no disjuntos $[a_1, b_1)$ y $[a_2, b_2)$, los reemplazamos por su unión. En caso de que alguno de los dos intervalos esté contenido en el otro, esta unión, que coincide con el mayor de ambos, es un intervalo de la forma deseada. En caso contrario, $a_1 \neq a_2$ (si $a_1 = a_2$ se daría alguna de las inclusiones), y no se pierde generalidad suponiendo que $a_1 < a_2$. Como $[a_2, b_2)$ no está contenido en $[a_1, b_1)$, necesariamente $b_2 > b_1$, en cuyo caso

$$[a_1, b_1) \cup [a_2, b_2) = [a_1, b_2)$$

tiene, asimismo, la forma deseada. Dado que la cantidad de intervalos iniciales es finita y se mantiene o disminuye en cada paso, la reiteración del proceso un número finito de veces proporciona una colección finita de intervalos disjuntos dos a dos, cuya unión es igual a la de partida. El algoritmo también funciona para intervalos semiabiertos por la izquierda, intervalos abiertos e intervalos cerrados, respectivamente. □

2.4 Funciones medibles

26. Se define $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}, & 0<x\leq 1\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Hallar la medida del conjunto $\{x: f(x)\geq 0\}$.

Resolución. Para $t\geq 0$ se tiene que $\mathrm{sen}\,t\geq 0$ si, y sólo si, $t\in[2n\pi,(2n+1)\pi]$ ($n\in\mathbb{N}_0$); haciendo $t=x^{-1}$, con $0<x\leq 1$, encontramos que $\mathrm{sen}\,x^{-1}\geq 0$ si, y sólo si, x está en el conjunto

$$\left[\frac{1}{\pi},1\right]\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)\pi},\frac{1}{2n\pi}\right].$$

Consiguientemente,

$$\{x: f(x)\geq 0\}=\{0\}\cup\left[\frac{1}{\pi},1\right]\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)\pi},\frac{1}{2n\pi}\right].$$

El segundo miembro es una unión de intervalos cerrados disjuntos dos a dos, cuya medida vale

$$\left(1-\frac{1}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\right)=1-\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Para este cálculo se ha tenido en cuenta el desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

(también conocido como serie de Mercator), según el cual

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

Finalmente, aunque el ejercicio no lo pide ni es necesario para resolverlo, nótese que la función f es medible, porque es continua (Ejemplo 2.40):

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}=0=f(0).$$

□

27. Demostrar que las funciones monótonas son medibles.

Resolución. Si f es monótona entonces, para cada $\alpha\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(\alpha,\infty)$ es un intervalo y, por lo tanto, medible.

En efecto, diremos que $I\subset\mathbb{R}$ es un intervalo si para cualesquiera $a,b\in I$ tales que $a<b$, se tiene que $(a,b)\subset I$. Esta definición incluye el conjunto vacío, los conjuntos unitarios, los intervalos acotados, los intervalos semiinfinitos (rayos), y toda la recta real.

Supongamos que f es monótona, y sea $\alpha\in\mathbb{R}$; se quiere ver que $f^{-1}(\alpha,\infty)$ es un intervalo, es decir, que dados $a<b\in\mathbb{R}$ con $f(a)>\alpha$ y $f(b)>\alpha$, y dado $x\in(a,b)$, se cumple que $f(x)>\alpha$. Esto es cierto, ya que, si f es creciente, entonces $a<x$ implica $\alpha<f(a)<f(x)$; mientras que, si f es decreciente, entonces $x<b$ implica $f(x)>f(b)>\alpha$. □

28. Sean f una función continua y g una función medible. Probar que la composición $f\circ g$ es medible.

Resolución. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, como (α,∞) es abierto y f es continua, se tiene que $f^{-1}(\alpha,\infty)$ es abierto y, por lo tanto, expresable en la forma $f^{-1}(\alpha,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, donde I_n $(n\in\mathbb{N})$ son intervalos abiertos. Así pues,

$$\{x : f(g(x)) > \alpha\} = \left\{x : g(x) \in f^{-1}(\alpha,\infty)\right\} = g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(I_n)$$

es medible.

También se puede razonar de la siguiente forma: si $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $(f\circ g)^{-1}(\alpha,\infty)=g^{-1}\circ f^{-1}(\alpha,\infty)$. Como f es continua, el conjunto $f^{-1}(\alpha,\infty)$ es abierto; en particular, un boreliano. Y puesto que g es medible, el Ejemplo 2.48 garantiza que $g^{-1}\circ f^{-1}(\alpha,\infty)=g^{-1}\left(f^{-1}(\alpha,\infty)\right)$ es medible. □

29. Demostrar que para cualquier función medible f se tiene que $\operatorname{ess\,sup} f \le \sup f$.

    Resolución. Es suficiente advertir que $\{\alpha : f\le\alpha\}\subset\{\alpha : f\le\alpha \text{ c.t.p.}\}$, y tomar ínfimos. □

30. Probar los siguientes asertos:

    a) Si f es medible y $f=g$ c.t.p., entonces $\operatorname{ess\,sup} f=\operatorname{ess\,sup} g$.

    b) Si f es continua, entonces $\operatorname{ess\,sup} f=\sup f$.

    Resolución.

    a) Por el Teorema 2.53, g es medible. Además, $f-g=0$ c.t.p. implica $\operatorname{ess\,sup}(f-g)=0$, y sigue del Ejemplo 2.57 que

    $$\operatorname{ess\,sup} f \le \operatorname{ess\,sup}(f-g)+\operatorname{ess\,sup} g=\operatorname{ess\,sup} g.$$

    Como también $g-f=0$ c.t.p., intercambiando los papeles de f y g resulta que $\operatorname{ess\,sup} g\le\operatorname{ess\,sup} f$. La doble desigualdad proporciona la igualdad.

    b) Puesto que f es continua, es medible (Ejemplo 2.40). Si $\alpha\in\mathbb{R}$ es tal que $f\le\alpha$ c.t.p. entonces el abierto $f^{-1}(\alpha,\infty)=\{x : f(x)>\alpha\}$ tiene medida nula, y el Ejercicio 8 obliga a que sea $\{x : f(x)>\alpha\}=\emptyset$, es decir, a que $f\le\alpha$ en todo punto. Consecuentemente,

    $$\operatorname{ess\,sup} f=\inf\{\alpha : f(x)\le\alpha \text{ c.t.p.}\}\ge\inf\{\alpha : f(x)\le\alpha\}=\sup f.$$

    El Ejercicio 29 completa la resolución. □

31. Sean f y g funciones medibles, con $g\ge 0$. Demostrar que $fg\le(\operatorname{ess\,sup} f)g$ c.t.p..

    Resolución. Es consecuencia del Ejemplo 2.56. □

32. Sea f una función medible que no es infinita c.t.p.. Probar que f está acotada en algún conjunto de medida positiva.

    Resolución. Que f sea infinita c.t.p. significa que $m(\{x : f(x)<\infty\})=0$; que no sea infinita c.t.p. se traduce entonces en que $m(\{x : f(x)<\infty\})>0$. Nótese que

    $$\{x : f(x)<\infty\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f(x)<n\},$$

    donde los conjuntos $E_n=\{x : f(x)<n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ constituyen una sucesión creciente. Por tanto,

    $$\lim_{n\to\infty} m(E_n)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)>0,$$

    de modo que $m(E_n)>0$ para n suficientemente grande. □

2.5 Medibilidad Borel y Lebesgue

33. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos. Demostrar que:

a) Si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, entonces $m^*(\lim_{i\to\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} m^*(E_i)$.

b) Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, entonces $m^*(\lim_{i\to\infty} E_i) \le \lim_{i\to\infty} m^*(E_i)$. Esta desigualdad puede ser estricta, aunque $m^*(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Resolución.

a) Como la sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es creciente, existe $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, y también $\lim_{i\to\infty} m^*(E_i)$ (puede ser infinito). Además, $m^*(E_n) \le m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ $(n \in \mathbb{N})$ implica

$$\lim_{n\to\infty} m^*(E_n) \le m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

Inversamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n un conjunto medible tal que $A_n \supset E_n$ y $m(A_n) = m^*(E_n)$ (Ejercicio 11), y pongamos $B_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$; entonces B_n es medible y $E_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \subset B_n \subset A_n$, así que $m^*(E_n) = m(B_n)$. Por otra parte, $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$. Se concluye que

$$m^*\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(B_i) = \lim_{i\to\infty} m^*(E_i).$$

b) Como la sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es decreciente, existe $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, y también $\lim_{i\to\infty} m^*(E_i)$ (puede ser infinito). Además, $m^*(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) \le m^*(E_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ implica

$$m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \lim_{n\to\infty} m^*(E_n).$$

En virtud del Teorema 2.29 (ii), el contraejemplo que muestre que la desigualdad puede ser estricta debe ser buscado entre conjuntos no medibles. Sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de subconjuntos no medibles del intervalo $[0,1]$, disjuntos dos a dos, obtenida en la demostración del Teorema 2.62; nótese que $m^*(V_n) = \alpha$ $(n \in \mathbb{N})$, con $0 < \alpha \le 1$. Pongamos

$$E_i = \bigcup_{n=i}^{\infty} V_n \subset [0,1] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Se tiene entonces:

- La sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es decreciente, con $\lim_{i\to\infty} E_i = \emptyset$. En efecto, $\lim_{i\to\infty} E_i = \limsup_{n\to\infty} V_n$; pero este conjunto, formado por los puntos que pertenecen a una infinidad de V_n, es vacío, porque los V_n son disjuntos dos a dos. Nótese, adicionalmente, que $\liminf_{n\to\infty} V_n \subset \limsup_{n\to\infty} V_n = \emptyset$ implica la existencia de $\lim_{n\to\infty} V_n = \emptyset$.
- Para cada $i \in \mathbb{N}$, $1 \ge m^*(E_i) \ge m^*(V_i) = \alpha > 0$.

Por tanto,

$$m^*\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right) = 0 < \alpha \le \lim_{i\to\infty} m^*(E_i),$$

aun cuando $m^*(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$. □

34. Probar que existe una función no medible $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\{x : g(x) = \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$; compárese con el Teorema 2.35 y el Ejemplo 2.36. [*Sugerencia: Partiendo de un conjunto no medible, constrúyase una función inyectiva g tal que* $\{x : g(x) > 0\}$ *no sea medible.*]

Resolución. Sean $V \subset (0,1)$ un conjunto no medible y $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ una función inyectiva, por ejemplo $f(x) = e^x$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in V \\ -f(x), & x \notin V. \end{cases}$$

Como f es inyectiva y toma valores estrictamente positivos, g también es inyectiva, de modo que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x : g(x) = \alpha\} = g^{-1}(\{\alpha\})$ es vacío o unitario y, por lo tanto, medible. Sin embargo, la función g no es medible, porque $\{x : g(x) > 0\} = V$. □

35. Sea f una función medible en $[a,b]$ y derivable c.t.p.. Demostrar que existe una función g que es medible en $[a,b]$ e igual a f' c.t.p..

    Resolución. Definimos $g(x) = f'(x)$ en los puntos de $[a,b]$ donde f' existe, y arbitrariamente en el resto. Extendemos f a $[b,b+1]$, definiéndola como una constante en este intervalo. Entonces, $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ c.t.p., donde

    $$g_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

    Fijado $0 < h \le 1$, la función $f_h(x) = f(x+h)$ es medible en $[a,b]$. En efecto, sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in [a,b]$. Se tiene que $f_h(x) > \alpha$ si, y sólo si, $f(x+h) > \alpha$, lo que equivale a que $x+h \in \{z : f(z) > \alpha\}$, o bien $x \in \{z : f(z) > \alpha\} - h$. Como el trasladado de un conjunto medible es medible (Teorema 2.61), el conjunto

    $$\{x : f_h(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\} - h$$

    es medible. De la medibilidad de $f_{1/n}$ y f se sigue, aplicando el Teorema 2.41, que cada g_n $(n \in \mathbb{N})$ es medible, y el Ejemplo 2.54 permite concluir que g también lo es. □

36. Dar un ejemplo de una función no medible f tal que $|f|$ es medible.

    Resolución. Nos apoyaremos en los Ejemplos 2.37 y 2.38. Si V es un conjunto no medible (Teorema 2.62) entonces $f = \chi_V - 1/2$ tampoco es medible (Teorema 2.41), pero $|f| \equiv 1/2$ sí lo es. □

37. Probar que $\sup_{\alpha\in A} f_\alpha$ no es necesariamente medible, aunque cada f_α lo sea.

    Resolución. Nos apoyaremos, de nuevo, en el Ejemplo 2.38 y el Teorema 2.62. Dado un conjunto no medible V, consideramos la familia $\{\chi_{\{\alpha\}} : \alpha \in V\}$. Cada una de estas funciones es medible porque es la función característica de un conjunto unitario, que es cerrado y, por tanto, medible. Sin embargo, $\sup_{\alpha\in V} \chi_{\{\alpha\}} = \chi_V$ no es medible. □

38. Demostrar que existen conjuntos de medida nula que no son de Borel.

    Resolución. Sea E un conjunto medible que no es de Borel (Teorema 2.65). El Teorema 2.31 permite escribir $E = P \cup (E \setminus P)$, donde P es un F_σ (en particular, un boreliano) y $m(E \setminus P) = 0$. El conjunto $E \setminus P$ no puede ser de Borel, porque de lo contrario E, unión de dos borelianos, también lo sería. □

39. Probar que el Teorema 2.53 deja de verificarse si en su enunciado se reemplaza «medible» por «medible Borel».

    Resolución. Sea E un conjunto de medida nula que no es de Borel (Ejercicio 38). Si $f \equiv 0$ y $g = \chi_E$, entonces $f = g$ excepto en E (por tanto, c.t.p.), aunque f es medible Borel y g, no. □

40. Encontrar el cardinal de la clase de los conjuntos medibles.

    Resolución. La función de Cantor f, definida en la demostración del Teorema 2.65, aplica $[0,1]$ en el conjunto de Cantor C y es inyectiva; por tanto, $\mathfrak{c} = \#[0,1] \le \#C$. Pero, puesto que $C \subset [0,1]$, también se tiene $\#C \le \mathfrak{c}$. Por el teorema de

Schröder-Bernstein, $\#C = \mathfrak{c}$. Todo subconjunto de C es medible (Ejemplo 2.11), así que $2^{\mathfrak{c}} = \#\mathscr{P}(C) \leq \#\mathscr{M}$. Como $\#\mathscr{M} \leq \#\mathscr{P}(\mathbb{R}) = 2^{\mathfrak{c}}$, invocando, de nuevo, el teorema de Schröder-Bernstein concluimos que $\#\mathscr{M} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Véase el Ejercicio 42 para otra forma de calcular el cardinal de C. □

41. Encontrar el cardinal de la clase de las funciones medibles reales.

Resolución. Sea $\mathscr{F}$ la clase de las funciones medibles reales. La correspondencia entre los conjuntos medibles y sus funciones características es biyectiva (Ejemplo 2.38), de modo que, por el Ejercicio 40, $2^{\mathfrak{c}} \leq \#\mathscr{F}$. Pero el cardinal del conjunto de todas las funciones reales sobre $\mathbb{R}$ (asumiendo el AE para la aritmética de cardinales) es $2^{\mathfrak{c}} \geq \#\mathscr{F}$:

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}\cdot\aleph_0} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Por el teorema de Schröder-Bernstein, $\#\mathscr{F} = 2^{\mathfrak{c}}$. □

2.6 Anexo: Representación ternaria del conjunto de Cantor

42. Demostrar que el conjunto de Cantor C es compacto, perfecto [todo punto de C es de acumulación], diseminado [el interior de su clausura es vacío], totalmente inconexo [dados $x, y \in C$, $x < y$, existe $z \in (x, y)$ tal que $z \notin C$] y tiene la potencia del continuo [está en biyección con $\mathbb{R}$].

Resolución.

- *Es compacto*. Basta observar que es cerrado y también acotado, porque está contenido en [0,1].
- *Es perfecto*. Sea $x \in C$; queremos probar que x es un punto de acumulación de C, es decir, que todo entorno reducido de x contiene puntos en C. Comenzamos recordando que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, donde, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, C_n es unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos cuyos extremos están en C (pues un extremo de cualquier intervalo de C_n es extremo de algún intervalo de C_{n+1}). Dado $\varepsilon > 0$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-k} < \varepsilon$. Entonces $x \in C_k$ y, por tanto, x está en alguno de los 2^k intervalos de longitud 3^{-k} que componen C_k. Basta elegir $x_k \neq x$ como uno de los extremos de dicho intervalo para que $|x - x_k| \leq 3^{-k} < \varepsilon$.
- *Es diseminado*. Como C es cerrado, basta ver que carece de interior. Esto es consecuencia de que $m(C) = 0$: si existiera $I = (a, b) \subset C$ se tendría $b - a = |I| = m(I) \leq m(C) = 0$, así que $I = \emptyset$.
- *Es totalmente inconexo*. Como acabamos de ver, C no contiene intervalos abiertos no vacíos; luego, cualquier intervalo abierto con extremos en C debe tener puntos fuera de C.
- *Tiene el mismo cardinal que* $\mathbb{R}$. Cada $x \in [0, 1]$ admite una representación ternaria de la forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}$, con $x_n \in \{0, 1, 2\}$. Esta representación es única excepto cuando $x = a3^{-m}$ para ciertos $a, m \in \mathbb{N}$ tales que $0 < a < 3^m$ y 3 no divide a a. En tal caso, x admite un desarrollo finito de la forma

$$x = \frac{x_1}{3} + \cdots + \frac{x_m}{3^m},$$

donde $x_m = 1$ (si $a \equiv 1 \bmod 3$), o bien $x_m = 2$ (si $a \equiv 2 \bmod 3$). Cuando $x_m = 2$, usamos la representación finita de x, pero si $x_m = 1$, preferimos el desarrollo

$$x = \frac{x_1}{3} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{3^{m-1}} + \frac{0}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}.$$

De esta manera asignamos una única representación ternaria a cada $x \in [0, 1]$. El conjunto de Cantor coincide con los $x \in [0, 1]$ en cuya representación ternaria $x_n \in \{0, 2\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (Proposición 2.75). Claramente, la aplicación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mapsto \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

es biyectiva entre C y $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$; se concluye que $\#C = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. En la resolución del Ejercicio 40 se expone otra forma de computar este cardinal. $\square$

43. Probar que todo conjunto perfecto no vacío $E \subset \mathbb{R}$ es incontable.

Resolución. Denotaremos por $U(x,r)$ el intervalo abierto de centro x y radio $r > 0$ y por $\overline{U}(x,r)$ el intervalo cerrado respectivo.

Razonando por contradicción, sea $E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de E. Se forma inductivamente la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ como sigue. Tomamos $y_1 = x_2$ y elegimos $0 < \varepsilon_1 < 1/2$ tal que $x_1 \notin U(y_1, \varepsilon_1)$. Como E es perfecto, existe $y_2 \in E \cap U(y_1, \varepsilon_1)$ tal que $y_2 \neq x_2$ y $\overline{U}(y_2, \varepsilon_2) \subset U(y_1, \varepsilon_1)$, con $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1/2$ y $x_2 \notin U(y_2, \varepsilon_2)$. Ahora, elegimos $y_3 \in E \cap U(y_2, \varepsilon_2)$ tal que $y_3 \neq x_3$ y $\overline{U}(y_3, \varepsilon_3) \subset U(y_2, \varepsilon_2)$, con $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2/2$ y $x_3 \notin U(y_3, \varepsilon_3)$. Reiterando este proceso se consigue una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy en E, cuyo límite y_0 está en E, porque los conjuntos perfectos son cerrados. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U(y_n, \varepsilon_n)$ contiene a y_0, pero no a x_n. Así pues, $y_0 \neq x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, de modo que no existe tal enumeración de E.

Nótese que este resultado se extiende a cualquier espacio métrico completo, con la misma demostración. $\square$

44. Dado $0 < \xi < 1/2$, el conjunto de tipo Cantor C_ξ es el subconjunto del intervalo $[0,1]$ que resulta de aplicar el algoritmo de formación del conjunto de Cantor C, pero de modo que cada uno de los 2^n intervalos cerrados retenidos en la etapa n-ésima tiene longitud ξ^n. Demostrar que C_ξ es medible, con $m(C_\xi) = 0$.

Resolución. Conviene advertir que para replicar la construcción del conjunto de Cantor en la forma indicada se ha de tomar necesariamente $0 < \xi < 1/2$, pues si $\xi = 1/2$ los intervalos retenidos son contiguos y su unión es todo $[0,1]$, mientras que para $\xi > 1/2$, dichos intervalos se solapan. Nótese también que $C = C_{1/3}$.

Sea, pues, $0 < \xi < 1/2$. En la notación de la Sección 2.6.3, el conjunto C_ξ es el que se obtiene siguiendo el algoritmo de formación del conjunto de Cantor C, pero de modo que cada intervalo $C_{\xi,n}^k$ $(k = 1, \ldots, 2^n)$ retenido en la etapa n-ésima tiene longitud ξ^n. El n-ésimo conjunto residual es entonces $C_{\xi,n} = \bigcup_{k=1}^{2^n} C_{\xi,n}^k$; estos conjuntos constituyen una sucesión decreciente. Por analogía con C, el conjunto $C_\xi = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\xi,n}$, obtenido a partir de intervalos mediante las operaciones de σ-álgebra, también es medible y, por el Teorema 2.29 (ii) (o el Ejercicio 15), su medida es el límite, cuando $n \to \infty$, de las medidas de los conjuntos residuales, que son finitas. Pero

$$\lim_{n\to\infty} m(C_{\xi,n}) = \lim_{n\to\infty} 2^n \xi^n = \lim_{n\to\infty} (2\xi)^n = 0,$$

toda vez que $2\xi < 1$. $\square$

45. Dado $0 < \alpha \leq 1$, el conjunto de tipo Cantor $C^{(\alpha)}$ de α-tercios intermedios es el subconjunto del intervalo $[0,1]$ que resulta de aplicar el algoritmo de formación del conjunto de Cantor C, pero de modo que en la etapa n-ésima se retiran intervalos abiertos centrales de longitud $\alpha/3^n$. Probar que $C^{(\alpha)}$ es medible, con $m(C^{(\alpha)}) = 1 - \alpha$.

Resolución. Sea $0 < \alpha \leq 1$. El conjunto $C^{(\alpha)}$ de α-tercios intermedios se construye siguiendo el algoritmo de formación del conjunto de Cantor C, pero retirando en la etapa n-ésima intervalos abiertos centrales $I_n^{(\alpha),j}$ $(j = 1, \ldots, 2^{n-1})$ de longitud $\alpha/3^n$. Nótese que $C = C^{(1)}$. Comoquiera que $C^{(\alpha)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^{(\alpha)}$, donde $C_n^{(\alpha)} = \bigcup_{k=1}^{2^n} C_n^{(\alpha),k}$ es la unión de los intervalos retenidos en la etapa n-ésima, resulta que $C^{(\alpha)}$ es medible. Además, la medida de los intervalos retirados es

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_n^{(\alpha),j}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\alpha}{3^n} = \frac{\alpha}{2} \frac{2/3}{1/3} = \alpha,$$

lo que, por complementación, proporciona el valor $m(C^{(\alpha)}) = 1 - \alpha$. $\square$

46. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset [0,1]$ tal que $m(A) > 0$ y $m(A \cap I) < |I|$ para cualquier intervalo abierto $I \subset [0,1]$.

Resolución. Fijado $\alpha \in (0,1)$, sea $C^{(\alpha)}$ el conjunto de tipo Cantor del Ejercicio 45, de modo que $m(C^{(\alpha)}) = 1-\alpha > 0$. Si I es un subintervalo abierto de $[0,1]$, entonces $|I| = m(I\cap C^{(\alpha)}) + m(I\setminus C^{(\alpha)})$, por lo que queremos probar que $m(I\setminus C^{(\alpha)}) > 0$. Pero, al igual que C, el conjunto $C^{(\alpha)}$ es cerrado y diseminado, así que $I\setminus C^{(\alpha)}$ es un abierto no vacío, y basta apelar al Ejercicio 8. □

47. *a*) Demostrar que $[0,1]$ puede ser escrito como unión de una familia contable de conjuntos perfectos diseminados y un conjunto de medida nula.

    b) Deducir que existe un conjunto de medida nula que es de segunda categoría, es decir, que no puede ser expresado como unión contable de conjuntos diseminados.

    Resolución.

    a) Consideramos, de nuevo, conjuntos de tipo $C^{(\alpha)}$ (Ejercicio 45). Si $E_n = C^{(1/n)}$ entonces $n < m$ implica $E_n \subset E_m$ $(n,m \in \mathbb{N})$, y tomando $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ podemos escribir:

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1, \qquad m([0,1]\setminus E) = 1 - m(E) = 0.$$

    b) El conjunto E es de primera categoría y su complementario en $[0,1]$ tiene medida nula. El teorema de categoría de Baire obliga a que dicho complementario sea de segunda categoría en el espacio métrico completo $[0,1]$. □

48. Probar que un conjunto perfecto diseminado puede contener un conjunto no medible.

    Resolución. Al igual que en la solución del Ejercicio 47, escribimos $[0,1]$ como unión de una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos de tipo Cantor y un conjunto de medida nula. Para el conjunto no medible V del Teorema 2.62 se tiene entonces que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap V)\cup A$, donde, por la completitud de la medida de Lebesgue, A es medible. Luego, algún $E_m\cap V \subset E_m$ no es medible. □

49. Demostrar que una función medible de una función continua no es, necesariamente, medible.

    Resolución. Dado $0 < \alpha \le 1$, sea $C^{(\alpha)}$ el conjunto de Cantor de α-tercios intermedios (Ejercicio 45). Existe una función inyectiva y continua F definida sobre $[0,1]$ tal que $F(C^{(\alpha)}) = C$. En efecto, para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $F_n : [0,1] \to [0,1]$ la función creciente lineal a trozos que aplica los extremos de cada intervalo $C_n^{(\alpha),k}$, retenido en la etapa n-ésima de la construcción de $C^{(\alpha)}$, en los extremos del intervalo C_n^k, retenido en la misma etapa de la construcción de C $(k = 1,\dots,2^n)$. Nótese que si $n > m$, las funciones F_n y F_m difieren únicamente en $C_m^{(\alpha),k}$ $(k = 1,\dots,2^m)$, así que $|F_n(x) - F_m(x)| \le |C_m^k| = 3^{-m}$. Se desprende que la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy y, por lo tanto, converge uniformemente a una función continua F sobre $[0,1]$. Además, F es inyectiva: en efecto, supongamos que $(x,y)\subset[0,1]$; si alguno de los puntos x ó y pertenece a alguno de los intervalos retirados, es claro que $F(x) < F(y)$; si, por el contrario, $x,y\in C^{(\alpha)}$ entonces, como $C^{(\alpha)}$ es diseminado, se debe tener $I_n^{(\alpha),k} \subset (x,y)$ para ciertos n,k, de donde se sigue que $|F(x)-F(y)| \ge 3^{-n} > 0$. Por último, como $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$, el teorema del valor intermedio obliga a que $F([0,1]) = [0,1]$; y como $F\big(I_n^{(\alpha),k}\big) = I_n^k$ $(k = 1,\dots,2^{n-1},\ n\in\mathbb{N})$, se concluye que $F(C^{(\alpha)}) = C$.

    Nótese que toda función real, inyectiva y continua definida sobre un intervalo es estrictamente monótona, y en tal caso admite una inversa continua sobre su rango. Esto significa que F es, de hecho, un homeomorfismo.

    Apelamos ahora a la resolución del Ejercicio 48 para encontrar un subconjunto no medible B de un cierto conjunto de Cantor de α-tercios intermedios E. Por la completitud de la medida de Lebesgue, el conjunto $P = F(B) \subset C$ es medible. De este modo, χ_P es medible, χ_B no lo es, y $\chi_P\circ F = \chi_B$, lo que proporciona el contraejemplo deseado. □

50. Sea f la función de Cantor definida en la demostración del Teorema 2.65. Probar que el rango de f no cubre el conjunto de Cantor C.

Resolución. El número $2/3 \in C$ tiene representaciones ternarias $0.200\ldots$ y $0.122\ldots$, ninguna de las cuales está en el rango de f (la primera es finita, y la segunda contiene un 1). □

51. Supongamos que $x \in [0,1]$ admite el desarrollo $x = 0.x_1x_2\ldots x_n\ldots$ en base ℓ para algún entero ℓ, donde, en caso de ambigüedad, se usa la representación infinita. Demostrar que $f_n(x) = x_n$ es una función medible de x, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resolución. Fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f_n(0) = 0$ y

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\ell^{n-1}-1} \sum_{r=0}^{\ell-1} r\chi_{I_{k,r}}(x)$$

para $x \neq 0$, donde

$$I_{k,r} = \left(\frac{k}{\ell^{n-1}} + \frac{r}{\ell^n}, \frac{k}{\ell^{n-1}} + \frac{r+1}{\ell^n} \right]$$

(se consideran intervalos semiabiertos por la izquierda para respetar el convenio de elegir la expresión infinita de x en caso de ambigüedad). Por tanto, f_n es medible. □

52. Sea G el conjunto de los números reales que pueden ser expresados en la forma

$$\frac{c_1}{5} + \frac{c_2}{5^2} + \cdots + \frac{c_n}{5^n} + \cdots,$$

donde $c_n = 0$ ó $c_n = 4$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $m(G) = 0$.

Resolución. El conjunto G es de tipo Cantor. En la notación utilizada para describir el algoritmo de formación del conjunto de Cantor, los intervalos removidos de $[0,1]$ para obtener G son $I_1^1 = (1/5, 4/5)$, $I_2^1 = (1/5^2, 4/5^2)$, $I_2^2 = (21/5^2, 24/5^2), \ldots$. Como los intervalos retenidos en la etapa n-ésima tienen longitud ξ^n $(n \in \mathbb{N})$, con $\xi = 1/5 < 1/2$, encontramos que $G = C_{1/5}$ (Ejercicio 44), así que $m(G) = m(C_{1/5}) = 0$. También podemos hacer el cálculo por complementación:

$$m(G) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{5^n} = 1 - \frac{3}{2} \frac{2/5}{3/5} = 0.$$ □

53. Demostrar que el subconjunto de $[0,1]$ formado por los números cuya expresión decimal excluye al dígito 5 tiene medida nula.

Resolución. Sea $A \subset [0,1]$ el conjunto de los números cuya representación decimal contiene al menos un 5, y sea $0.a_1a_2a_3\ldots \in A$. Si $n \in \mathbb{N}$ es la primera posición en la que aparece un 5 en esta representación, hay 9 asignaciones posibles ($\{0,1,\ldots,9\} \setminus \{5\}$) para cada uno de los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, es decir, 9^{n-1} asignaciones posibles para el conjunto de estos coeficientes. Por otro lado, para cada una de tales asignaciones existe un intervalo de longitud 10^{-n} de números que incluyen un 5 en la posición n-ésima de su desarrollo. Esto significa que la medida del conjunto de los puntos que no tienen al 5 en ninguna de las $n-1$ primeras posiciones y lo tienen en la n-ésima es $9^{n-1} \cdot 10^{-n}$. Como, para $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos en cuestión son disjuntos y A es la unión de todos ellos, obtenemos:

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-1}}{10^n} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n = \frac{1}{9} \frac{9/10}{1 - 9/10} = 1.$$

La medida del conjunto de interés es entonces $m([0,1] \setminus A) = 0$. □

54. Sean k un entero positivo y $\{n_i\}_{i=1}^m$ una secuencia finita de enteros positivos, todos ellos menores que k. Probar que el conjunto formado por los números de $[0,1]$ cuyo desarrollo en base k no contiene a la secuencia $\{n_i\}_{i=1}^m$ es de medida nula.

Resolución. El conjunto de los números cuyo desarrollo no contiene a un entero h, $0 \leq h \leq k-1$, tiene medida cero, como en el Ejercicio 53. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, la medida del conjunto donde h aparece en alguna de las n primeras posiciones es

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(k-1)^{j-1}}{k^j}=\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)^j=\frac{1}{k-1}\,\frac{\frac{k-1}{k}-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n+1}}{1-\frac{k-1}{k}}=\frac{k}{k-1}\,\frac{k-1}{k}\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\right]=1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n,$$

que tiende a 1 cuando $n\to\infty$; o bien, el conjunto donde h no aparece en ninguna de las n primeras posiciones tiene medida $(k-1)^n/k^n$, que tiende a 0 cuando $n\to\infty$.

Sea $x_r,x_{r+1},\dots,x_{r+n}$ la secuencia dada, y escribamos $h=k^nx_r+k^{n-1}x_{r+1}+\cdots+x_{r+n}$. Nótese que $0\le x_r,x_{r+1},\dots,x_{r+n}\le k-1$ implica $0\le h\le k^{n+1}-1$: la primera estimación es obvia, y en cuanto a la segunda, se cumple que

$$h=k^nx_r+k^{n-1}x_{r+1}+\cdots+x_{r+n}\le(k^n+k^{n-1}+\cdots+1)(k-1)=\frac{1-k^{n+1}}{1-k}(k-1)=k^{n+1}-1.$$

Si h aparece en el desarrollo de x en base k^{n+1} entonces este desarrollo será de la forma

$$\begin{aligned}&\frac{a_1}{k^{n+1}}+\frac{a_2}{k^{2(n+1)}}+\cdots+\frac{a_{p-1}}{k^{(p-1)(n+1)}}+\frac{h}{k^{p(n+1)}}+\frac{a_{p+1}}{k^{(p+1)(n+1)}}+\cdots\\&=\frac{a_1}{k^{n+1}}+\frac{a_2}{k^{2(n+1)}}+\cdots+\frac{a_{p-1}}{k^{(p-1)n+p-1}}+\frac{k^nx_r+k^{n-1}x_{r+1}+\cdots+x_{r+n}}{k^{p(n+1)}}+\frac{a_{p+1}}{k^{(p+1)n+p+1}}+\cdots\\&=\frac{a_1}{k^{n+1}}+\frac{a_2}{k^{2(n+1)}}+\cdots+\frac{a_{p-1}}{k^{(p-1)n+p-1}}+\frac{x_r}{k^{(p-1)n+p}}+\frac{x_{r+1}}{k^{(p-1)n+p+1}}+\cdots+\frac{x_{r+n}}{k^{(p-1)n+p+n}}+\frac{a_{p+1}}{k^{(p-1)n+p+2n+1}}+\cdots,\end{aligned}$$

de modo que la secuencia $x_r,x_{r+1},\dots,x_{r+n}$ aparece en el desarrollo de x en base k. Denotando A el conjunto de los $x\in[0,1]$ tales que h aparece en el desarrollo de x en base k^{n+1}, y B el conjunto de los $x\in[0,1]$ tales que la secuencia $x_r,x_{r+1},\dots,x_{r+n}$ aparece en el desarrollo de x en base k, acabamos de ver que A es un subconjunto (propio) de B. La primera parte del argumento proporciona $m(A)=1$, lo que obliga a que $m(B)=1$ y, por complementación, resuelve el ejercicio. □

3 Espacios de medida abstractos

55. Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números no negativos. Definimos una función de conjunto μ sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ poniendo $\mu(A)=\sum_{n\in A}a_n$ si $A\subset\mathbb{N}$ no es vacío, y $\mu(\emptyset)=0$. Demostrar que $(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}),\mu)$ es un espacio de medida. Demostrar también que la medida μ es completa y, si $a_n<\infty$ para cada $n\in\mathbb{N}$, que es σ-finita.

Resolución. Notemos, en primer lugar, que μ está bien definida, porque la reordenación de una serie de términos no negativos no altera el carácter ni la suma de la serie.

Trivialmente, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ es una σ-álgebra sobre $\mathbb{N}$. También resulta claro que μ satisface los dos primeros axiomas de una medida: es no negativa, y $\mu(\emptyset)=0$. En cuanto al tercero, dada una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)=\sum_{j\in\bigcup_{n=1}^\infty A_n}a_j=\sum_{n=1}^\infty\sum_{j\in A_n}a_j=\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n).$$

La completitud de μ es, igualmente, obvia, ya que todo subconjunto de cualquier conjunto de $\mathbb{N}$ (tenga este medida nula o no) es, a su vez, un subconjunto de $\mathbb{N}$, y por lo tanto es medible.

Por último, cualquier $E\subset\mathbb{N}$ se puede escribir como $E=\bigcup_{n\in E}\{n\}$, con $\mu(\{n\})=a_n<\infty$ $(n\in\mathbb{N})$, en su caso.

Eligiendo $a_n=1$ para cada $n\in\mathbb{N}$ se obtiene la llamada *medida cardinal*, que asigna a un conjunto A el número de elementos de A, si $\#A$ es finito, o el valor ∞, si $\#A$ es infinito. □

56. Sea $\{(X_n,\mathscr{S}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios medibles, donde X_n $(n\in\mathbb{N})$ son subconjuntos de un conjunto X, disjuntos dos a dos. Probar que $(Y,\mathscr{S})$ es un espacio medible, donde $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ y $\mathscr{S}$ es la clase formada por todas las uniones de la forma $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, con $E_n\in\mathscr{S}_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Resolución. Se trata de comprobar que $\mathscr{S}$ así definida es una σ-álgebra sobre Y. En primer lugar, es claro que $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(Y)$. Además:

a) $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\in\mathscr{S}$, ya que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{S}_n$ es una σ-álgebra sobre X_n y, por lo tanto, contiene a X_n.

b) Si $E\in\mathscr{S}$ entonces $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, con $E_n\in\mathscr{S}_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Luego,

$$Y\setminus E=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\right)\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}(X_n\setminus E_k),$$

donde, para cada $n,k\in\mathbb{N}$, $n\neq k$, $X_n\supset X_n\setminus E_k\supset X_n\setminus X_k=X_n$ implica

$$X_n\setminus E_k=\begin{cases}X_n\setminus E_n, & k=n\\ X_n, & k\neq n;\end{cases}$$

y como $X_n\setminus E_n\in\mathscr{S}_n$ $(n\in\mathbb{N})$, finalmente:

$$Y\setminus E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\setminus E_n)\in\mathscr{S}.$$

c) Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}$. Dado $n\in\mathbb{N}$, existe $\{E_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $E_{n,j}\in\mathscr{S}_j$ $(j\in\mathbb{N})$ y $E_n=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{n,j}$. Entonces,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{n,j}\right)=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{n,j}\right)\in\mathscr{S},$$

ya que $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{n,j}\in\mathscr{S}_j$ para cada $j\in\mathbb{N}$. □

57. Si $E\subset\mathbb{R}$ es un conjunto de medida nula que no es de Borel (Ejercicio 38), ¿será $\chi_E=0$ c.t.p. respecto de la medida de Borel?

Resolución. Sea $\mu=m|_{\mathscr{B}}$ la medida de Borel en $\mathbb{R}$. El conjunto $\{x:\chi_E(x)\neq 0\}=E$ no es medible Borel, luego no tiene sentido plantear que $\mu(E)=0$ y, por tanto, no cabe afirmar que $\chi_E=0$ c.t.p. $[\mu]$. □

58. Demostrar, mediante un contraejemplo, que si μ no es completa entonces f medible y $f=g$ c.t.p. no implica g medible.

Resolución. Sea $\mu=m|_{\mathscr{B}}$ la medida de Borel en $\mathbb{R}$, y sea $E\in\mathscr{M}\setminus\mathscr{B}$ tal que $m(E)=0$ (Ejercicio 38). El Teorema 2.31 proporciona un boreliano $G\in\mathscr{G}_\delta$ tal que $E\subset G$, con $m(G\setminus E)=0$; luego, $\mu(G)=m(G)=m(G\setminus E)+m(E)=0$. Dada una función μ-medible f, pongamos $g=\chi_E+\chi_G+f$, de modo que $\{x:f(x)\neq g(x)\}=G$:

$$g(x)-f(x)=\begin{cases}2, & x\in E\\ 1, & x\in G\setminus E\\ 0, & x\notin G.\end{cases}$$

Como $\mu(G)=0$, se tiene que $f=g$ c.t.p. $[\mu]$; pero g no es μ-medible, pues, si lo fuera, $\chi_E=g-f-\chi_G$ también sería μ-medible, lo cual es falso. □

59. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, y sea $F\subset X$. Probar que:

a) $F \setminus \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} (F \setminus E_n)$.

b) $F \setminus \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} (F \setminus E_n)$.

Resolución. Ambas relaciones se siguen directamente de la Definición 2.28. En efecto:

a) $F \setminus \liminf_{n\to\infty} E_n = F \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (F \setminus E_n) = \limsup_{n\to\infty} (F \setminus E_n)$.

b) $F \setminus \limsup_{n\to\infty} E_n = F \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} (F \setminus E_n) = \liminf_{n\to\infty} (F \setminus E_n)$. $\square$

60. Demostrar que si χ^* y χ_* son, respectivamente, las funciones características de $\limsup_{n\to\infty} E_n$ y $\liminf_{n\to\infty} E_n$, entonces $\chi^* = \limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}$ y $\chi_* = \liminf_{n\to\infty} \chi_{E_n}$.

Resolución. Para cada $x \in X$, $\{\chi_{E_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de ceros y unos.

Se tiene que $\chi^*(x) = 1$ si, y sólo si, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$, es decir, si, y sólo si, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, tal que $x \in E_n$. Por otro lado, $\limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = 1$ si, y sólo si, $\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} \chi_{E_n}(x) = 1$; equivalentemente, si para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sup_{n\geq k} \chi_{E_n}(x) = 1$; esto quiere decir que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, tal que $\chi_{E_n}(x) = 1$, o bien $x \in E_n$. Hemos probado que $\chi^*(x) = 1$ si, y sólo si, $\limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = 1$.

Similarmente, $\chi^*(x) = 0$ si, y sólo si, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c$, es decir, si, y sólo si, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, se tiene que $x \in E_n^c$. Por otro lado, $\limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = 0$ si, y sólo si, $\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} \chi_{E_n}(x) = 0$; equivalentemente, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{n\geq k} \chi_{E_n}(x) = 0$; esto quiere decir que para algún $k \in \mathbb{N}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, se cumple que $\chi_{E_n}(x) = 0$, o bien $x \in E_n^c$. Hemos probado que $\chi^*(x) = 0$ si, y sólo si, $\limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = 0$.

Por tanto, $\chi^* = \limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}$. Se establece análogamente que $\chi_* = \liminf_{n\to\infty} \chi_{E_n}$. $\square$

61. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}$, donde $\mathscr{S}$ es una σ-álgebra, y sea μ una medida sobre $\mathscr{S}$. Probar que:

a) $\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

b) Si $\mu(X) < \infty$, entonces $\limsup_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} E_n)$; el resultado puede ser falso si se omite la condición $\mu(X) < \infty$.

Compárese con el Ejercicio 16.

Resolución. Comenzamos observando que el Ejercicio 16 es un caso particular del que nos ocupa ($\mu = m$), con la salvedad de que la condición $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$ se reemplaza ahora por la más fuerte $\mu(X) < \infty$. Por tanto, cabe resolver el presente ejercicio procediendo de forma análoga a como se desarrolló la resolución del Ejercicio 16, sin más que reemplazar el Teorema 2.29 por el Teorema 3.9 y tener en cuenta que cualquier medida μ es monótona: si $A \subset B$ son conjuntos medibles, entonces $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$, con $\mu(B \setminus A) \geq 0$, implica $\mu(B) \geq \mu(A)$. A continuación se propone una resolución alternativa, que también descansa en la monotonía de μ.

a) El Teorema 3.9 asegura que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n\right).$$

Si $\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) < \infty$ entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \mu\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} E_n\right) + \varepsilon \leq \mu(E_n) + \varepsilon \quad (n \geq N).$$

Consecuentemente,

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n) + \varepsilon.$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ permite inferir la validez de $a)$.

Si $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) = \infty$ entonces, dado $K > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \leq \mu\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} E_n\right) \leq \mu\left(E_n\right) \quad (n \geq N).$$

Consecuentemente,

$$K \leq \liminf_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right).$$

La arbitrariedad de $K > 0$ obliga a que $\liminf_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right) = \infty$ y prueba $a)$ también en este caso.

$b)$ Combinando la hipótesis de que $\mu(X) < \infty$ con el Ejercicio 59 $b)$, el apartado $a)$ y el Ejercicio 1 $d)$ del Tema 2, se obtiene

$$\begin{aligned}\mu(X) - \mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(X \setminus \limsup_{n\to\infty} E_n\right) = \mu\left(\liminf_{n\to\infty}(X \setminus E_n)\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mu(X \setminus E_n) = \liminf_{n\to\infty}\left[\mu(X) - \mu(E_n)\right] = \mu(X) - \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n),\end{aligned}$$

y de aquí, cancelando $\mu(X)$ en ambos miembros, la desigualdad de $b)$.

Para ver que el resultado del apartado $b)$ puede fallar cuando $\mu(X) = \infty$, consideremos $\mu = m$ y los intervalos $E_n = (n, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$; como la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, se cumple que

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset,$$

pero $\mu(E_n) = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$