Tema 3: Espacios L^p

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

0 Introducción

En este tema cambiamos el punto de vista adoptado hasta ahora y consideramos clases adecuadas de funciones integrables como espacios por derecho propio. Es este enfoque el que distingue el análisis matemático del siglo XIX del desarrollado a partir del siglo XX. Estableceremos desigualdades que serán relevantes no sólo a la hora de examinar las propiedades de estos espacios, sino también por su utilidad como herramientas de cálculo; en lo que sigue, deberemos tener presentes ambos aspectos. Los resultados obtenidos son aplicables en muchos ámbitos, por ejemplo en la teoría de series de Fourier y en la representación de funcionales lineales sobre espacios de funciones.

1 Espacios normados, espacios de Banach y espacios L^p

El espacio de las funciones integrables respecto de una medida arbitraria es un caso particular de una familia de espacios de funciones integrables, los llamados *espacios* L^p, que estudiaremos en este tema. Puesto que tales espacios poseen una estructura algebraico-topológica precisa, repasaremos en primer lugar los conceptos necesarios para entender sus propiedades.

1.1 Espacios normados y de Banach

En esta sección consideraremos métricas definidas en espacios dotados de una estructura algebraica, más concretamente en espacios vectoriales, ya que las funciones integrables poseen una tal estructura.

Recordemos que una *métrica* o *distancia* d sobre un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to [0,\infty)$ que satisface, para cualesquiera $x,y,z \in X$, los siguientes axiomas:

(i) $d(x,y) \geq 0$;

(ii) $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;

(iii) *(simetría)* $d(x,y) = d(y,x)$;

(iv) *(desigualdad triangular)* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Cuando X es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (generalmente, $\mathbb{K}$ será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), revisten particular importancia las métricas d que, para cualesquiera $x,y,z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, verifican:

(i) $d(x+z,y+z) = d(x,y)$, es decir, d es invariante por traslaciones;

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$, es decir, d es proporcional a la razón de una homotecia.

En efecto, nótese que si d es invariante por traslaciones entonces la distancia entre dos elementos cualesquiera queda completamente determinada conociendo $d(x,0)$ para todo $x \in X$, toda vez que $d(x,y) = d(x-y,0)$. Definimos entonces la *longitud* o *norma* de un vector x por $\|x\| = d(x,0)$. Esto sugiere, en un contexto abstracto, la siguiente definición axiomática.

Definición 1.1 *Un* espacio normado *es un par* $(X, \|\cdot\|)$ *formado por un espacio vectorial* X *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *y una aplicación* $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$*, llamada* norma*, que, para cualesquiera* $x,y \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$*, satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\|x\| \geq 0$*;*

(ii) $\|x\| = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$*;*

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$*;*

(iv) *(desigualdad triangular)* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si no se exige la condición (ii)*, la aplicación* $\|\cdot\|$ *se llama* seminorma*.*

En un espacio seminormado $(X, \|\cdot\|)$, se tiene que $\|0\| = 0$ como consecuencia de (iii): fijado $x \in X$,

$$\|0\| = \|0x\| = |0|\,\|x\| = 0;$$

por tanto, que no se exija (ii) se reduce a permitir vectores no nulos de norma cero.

Observación 1.2 (i) *Todo espacio normado es, a su vez, un espacio métrico: dado $(X, \|\cdot\|)$, basta definir $d(x,y) = \|x-y\|$ para obtener un espacio métrico (X,d). Así, todas las nociones de espacios métricos están definidas también para los espacios normados; en particular, los conjuntos $U(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ y $B(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ son las* bolas unitarias abierta *y* cerrada *de X, respectivamente. Además,*

$$U(x,r) = x + rU(0,1), \quad B(x,r) = x + rB(0,1) \qquad (x \in X,\ r > 0).$$

(ii) *El recíproco de lo anterior es, en general, falso: no todo espacio métrico es normado. Por ejemplo, el conjunto X formado por todas las sucesiones de escalares $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x(n) \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N})$ es espacio vectorial, con las operaciones algebraicas definidas término a término: $x+y = \{(x+y)(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda x = \{(\lambda x)(n)\}_{n=1}^{\infty}$, donde*

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n), \quad (\lambda x)(n) = \lambda x(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Si definimos

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n) - y(n)|}{1 + |x(n) - y(n)|},$$

se puede probar que (X,d) es un espacio métrico (d es la denominada métrica de Fréchet*). Pero d no proviene de una norma: suponiendo lo contrario, para cualesquiera $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se debería verificar*

$$\|x\| = d(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|}$$

y $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\lambda x(n)|}{1 + |\lambda x(n)|} = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|}, \tag{1}$$

lo cual no sucede en general, como se comprueba sin más que considerar la sucesión de escalares $x \in X$ definida por $x(n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$; para esta sucesión, (1) se convierte en

$$\frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} = \frac{|\lambda|}{2},$$

igualdad que es falsa a menos que $\lambda = 0$ ó $|\lambda| = 1$.

Otro ejemplo sencillo es la métrica discreta

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

definida sobre cualquier espacio vectorial, pues para $x \neq 0$ se tiene $\|2x\| = d(2x,0) = 1$, mientras que $|2|\,\|x\| = 2d(x,0) = 2$.

Las métricas generadas por normas cumplen las propiedades de interés en espacios vectoriales:

Proposición 1.3 *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, la aplicación $d : X \times X \to [0,\infty)$ definida por $d(x,y) = \|x-y\|$ $(x,y \in X)$, es una distancia sobre X que verifica:*

(i) *$d(x+z, y+z) = d(x,y)$ $(x,y,z \in X)$;*

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$ $(x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

Recíprocamente, si X es un espacio vectorial y (X,d) es un espacio métrico donde se satisfacen (i) y (ii), entonces $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, con $\|x\| = d(x,0)$.

Demostración. Evidente. □

Recordemos que un espacio métrico (X,d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy de elementos de X converge en la métrica de X a un elemento del espacio.

Definición 1.4 *Sea X un espacio vectorial normado, sobre el que se considera la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ $(x,y \in X)$. Si (X,d) es completo, X se dice un* espacio de Banach*.*

Ejemplo 1.5 *A continuación presentamos algunos ejemplos y contraejemplos de espacios normados y de Banach.*

(i) *$X = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, con la norma del valor absoluto, son espacios de Banach.*

(ii) *$X = \mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$, con la norma*

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x(i)|^p \right\}^{1/p} \qquad (x = (x(1), \ldots, x(n)),\ 1 \le p < \infty)$$

son espacios de Banach: los axiomas (i), (ii) y (iii) de norma se satisfacen trivialmente, y la desigualdad triangular se deduce de la desigualdad de Minkowski (cf. Sección 2.3); establezcamos la completitud.

Sea $\{x_k = (x_k(1), \ldots, x_k(n))\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $j,k \ge N$ implica $\left\|x_j - x_k\right\|_p < \varepsilon$, y, por tanto, $\left|x_j(i) - x_k(i)\right| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$. Esto significa que, para cada $i = 1, \ldots, n$, la sucesión $\{x_k(i)\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el cuerpo escalar, que es completo; luego, existe $\lim_{k\to\infty} x_k(i) = x(i) \in \mathbb{K}$. Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $k \ge M$ implica $|x_k(i) - x(i)| < \varepsilon n^{-1/p}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Poniendo $x = (x(1), \ldots, x(n)) \in X$, encontramos que

$$\|x_k - x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_k(i) - x(i)|^p \right\}^{1/p} < \varepsilon \quad (k \ge M).$$

Se concluye que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x en la métrica de X.

(iii) *Para $1 \le p < \infty$, sobre*

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{K}) = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : x(n) \in \mathbb{K}\ (n \in \mathbb{N}),\ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}$$

definimos

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right\}^{1/p}.$$

Al igual que en (ii), la desigualdad de Minkowski (esta vez, para sumas infinitas) permite probar que $\|\cdot\|_p$ es una norma en ℓ^p. La completitud de este espacio será consecuencia de la completitud del espacio L^p (cf. Sección 3).

(iv) *Sobre*

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{K}) = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : x(n) \in \mathbb{K}\ (n \in \mathbb{N}),\ \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ acotada} \right\},$$

definimos

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|.$$

Así definido, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, como veremos en la Sección 3. También son de Banach sus subespacios

$$c = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty : \textit{existe} \lim_{n\to\infty} x(n) \right\}$$

y

$$c_0 = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in c : \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \right\}.$$

(v) *$X = C[a,b]$ (funciones continuas sobre $[a,b]$), con la norma $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, es de Banach. Este enunciado no es más que una reformulación del hecho, bien conocido, de que toda sucesión uniformemente de Cauchy de funciones continuas converge uniformemente a una función continua.*

(vi) *El mismo espacio vectorial anterior $X = C[a,b]$, con la norma*

$$\|f\|_p = \left\{ \int_a^b |f|^p \, dx \right\}^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty),$$

no es completo. En efecto: si, por ejemplo, hacemos $a = -1$, $b = 1$, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ nx, & 0 < x \le n^{-1} \\ 1, & n^{-1} < x \le 1 \end{cases}$$

es de Cauchy en $C[-1,1]$ con respecto a $\|\cdot\|_p$; pero su límite,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

no es continuo en $x = 0$. Todo espacio normado no completo puede completarse en un espacio de Banach, y la compleción del que nos ocupa es, precisamente, el espacio $L^p[a,b]$ que nos disponemos a estudiar en la Sección 1.2. Lo haremos en un marco general. □

Terminamos esta sección enunciando, sin demostración, algunas propiedades básicas de los espacios normados.

Proposición 1.6 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Si definimos en $X \times X$ la norma producto $\|(x,y)\|_{X\times X} = \|x\| + \|y\|$, y en $\mathbb{K} \times X$ la norma producto $\|(\alpha,x)\|_{\mathbb{K}\times X} = |\alpha| + \|x\|$, entonces las aplicaciones $(x,y) \mapsto x+y$ y $(\alpha,x) \mapsto \alpha x$, definidas, respectivamente, de $X \times X$ y de $\mathbb{K} \times X$ en X, son continuas. Además, la norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.*

Corolario 1.7 *Si X es un espacio normado, $x_0 \in X$, $\lambda_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, entonces las aplicaciones $x \mapsto x + x_0$ (traslación de vector x_0) y $x \mapsto \lambda_0 x$ (homotecia de razón λ_0), definidas de X en X, son biyectivas y bicontinuas (es decir, homeomorfismos).*

Definición 1.8 *Las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales también se conocen como* operadores lineales.

Dado que todo espacio normado es métrico (y, por tanto, topológico), tiene sentido estudiar la continuidad de los operadores lineales entre espacios normados.

Teorema 1.9 *Un operador lineal $T : X \to Y$ entre dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es continuo si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \le M\|x\|_X$ para todo $x \in X$.*

Proposición 1.10 *Si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ es un operador lineal, son equivalentes:*

(i) *T es continuo en algún punto de X.*

(ii) *T es continuo en $0 \in X$.*

(iii) *T es continuo (en todo punto de X).*

(iv) *T es uniformemente continuo.*

(v) *T es una función lipschitziana.*

1.2 Espacios L^p: definición y primeras propiedades

Definición 1.11 *Si $(X, \mathscr{S}, \mu)$ es un espacio de medida y $1 \le p < \infty$[1], definimos $L^p(X, \mu)$, o, cuando no hay riesgo de ambigüedad, $L^p(\mu)$, como la clase de todas las funciones medibles reales f tales que $\int |f|^p \, d\mu < \infty$, donde convenimos que dos funciones iguales c.t.p. representan el mismo elemento de $L^p(\mu)$.*

Sobre la recta real, si $X = [a,b]$ y $\mu = m$ es la medida de Lebesgue, escribiremos $L^p[a,b]$ para denotar el espacio correspondiente.

En sentido estricto, los elementos del espacio $L^p(\mu)$ no son funciones, sino clases de equivalencia de funciones. De hecho, $L^p(\mu)$ es el espacio cociente inducido en el conjunto

$$\left\{ f : f \text{ medible}, \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

por la relación de equivalencia «$f \sim g$ si, y sólo si, $f = g$ c.t.p.». Como dos funciones iguales c.t.p. tienen la misma integral sobre cualquier conjunto medible, esta distinción entre funciones y clases de equivalencia carece de importancia a un amplio rango de efectos, y escribiremos $f \in L^p(\mu)$ como abreviatura de «f es medible y $\int |f|^p \, d\mu < \infty$». En general, el valor de $f \in L^p(\mu)$ en un punto específico es irrelevante.

Con las operaciones algebraicas (suma y producto por escalares reales) definidas punto a punto, $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial real. Esto es consecuencia del teorema siguiente y del hecho de que el cuerpo de los reales es un espacio vectorial sobre sí mismo.

Teorema 1.12 *Fijado $1 \le p < \infty$, sean $f, g \in L^p(\mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; entonces, $\alpha f + \beta g \in L^p(\mu)$.*

Demostración. Si $f \in L^p(\mu)$, es claro que $\alpha f \in L^p(\mu)$ para cada escalar α. Además, $f, g \in L^p(\mu)$ implica $f + g \in L^p(\mu)$ ya que

$$|f+g|^p \le (|f| + |g|)^p \le 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \le 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right). \qquad \square$$

Ahora, si F es la clase de equivalencia de $f \in L^p(\mu)$ y G es la clase de $g \in L^p(\mu)$, y si α, β son escalares, se define $\alpha F + \beta G$ como la clase de $\alpha f + \beta g$; se comprueba que esta definición es independiente de la elección particular de los representantes $f \in F$, $g \in G$. Con el Teorema 1.12 quedó establecido que $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial, y resulta evidente que $O = \{f : f = 0 \text{ c.t.p.}\}$ es un subespacio vectorial de $L^p(\mu)$. En consecuencia, el cociente de $L^p(\mu)$ módulo O (que coincide con el cociente $L^p(\mu)/\sim$) es también un espacio vectorial, y podemos utilizar la misma notación para una clase de equivalencia y sus representantes.

La consideración de clases de equivalencia en vez de funciones (es decir, la identificación de las funciones que coinciden c.t.p.) es la manera de formalizar el paso de una seminorma a una norma para dar la siguiente definición.

Definición 1.13 *Sean $1 \le p < \infty$ y $f \in L^p(\mu)$. La* norma p *ó* p-norma *de f, denotada $\|f\|_p$, viene dada por*

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Claramente, si f y g son medibles y si $f = g$ c.t.p. se cumple que $\|f\|_p = \|g\|_p$, así que dos funciones pertenecientes a la misma clase de equivalencia tienen la misma norma, y es lícito definir la norma de una clase como la de uno cualquiera de sus representantes. En particular, $\|f\|_p = 0$ si, y sólo si, $f = 0$ c.t.p., es decir, si, y sólo si, $f \in O$, lo cual significa que $\|\cdot\|_p$ es

[1] La Definición 1.11 también tiene sentido para el rango $0 < p < 1$, pero pospondremos la discusión de los correspondientes espacios hasta la Sección 3.3.

únicamente una seminorma sobre $L^p(\mu)$, pero se convierte en una norma sobre el cociente de $L^p(\mu)$ módulo O. La igualdad $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$, válida para los representantes de una clase y cualquier escalar α, también se traslada a la clase. El uso del término «norma» en la Definición 1.13 quedará plenamente justificado por el Teorema 2.22, que establece, precisamente, la validez de la desigualdad triangular para esta definición.

Definición 1.14 *Si $(X, \mathscr{S}, \mu)$ es un espacio de medida, definimos $L^\infty(X,\mu)$, o, simplemente, $L^\infty(\mu)$, como la clase de las funciones medibles f tales que* $\operatorname{ess\,sup}|f| < \infty$*, con igual convenio que en la Definición 1.11. En paralelo con la Definición 1.13, la* norma ∞ *ó* ∞-norma *de f será*

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|. \tag{3}$$

Ejemplo 1.15 *Probar que $L^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial real.*

Resolución. Para cualesquiera escalares α, β y cualesquiera $f, g \in L^\infty(\mu)$, se cumple que

$$\operatorname{ess\,sup}|\alpha f + \beta g| \le |\alpha| \operatorname{ess\,sup}|f| + |\beta| \operatorname{ess\,sup}|g|$$

(cf. Ejemplo 2.57 del Tema 1). □

Ejemplo 1.16 *Demostrar que si $\mu(X) < \infty$ y $1 \le p < q \le \infty$, entonces $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.*

Resolución. Para $q < \infty$, sea $f \in L^q(\mu)$; como $|f|^p \le 1 + |f|^q$, donde la función mayorante es integrable, resulta que $f \in L^p(\mu)$. Para $q = \infty$ se verifica que $|f|^p \le (\operatorname{ess\,sup}|f|)^p$ c.t.p. (cf. Ejemplo 2.56 del Tema 1), y en un espacio de medida finita toda función acotada c.t.p. es integrable. □

2 Desigualdades

2.1 Funciones convexas

En esta sección examinaremos una clase particular de funciones, con vistas a aplicar su estudio en las secciones siguientes. Usaremos el convenio de representar mediante letras mayúsculas los puntos del grafo de una función, de manera que si ψ está definida en (a,b) y $t \in (a,b)$, entonces T es el punto $(t, \psi(t))$.

Definición 2.1 *Una función ψ definida en un intervalo abierto $I = (a,b)$ es* convexa *si para cualesquiera escalares $\alpha, \beta \ge 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$, se tiene*

$$\psi(\alpha x + \beta y) \le \alpha \psi(x) + \beta \psi(y) \quad (x, y \in I,\ x < y). \tag{4}$$

Los extremos a, b pueden tomar los valores $-\infty$, ∞, respectivamente.

La interpretación geométrica de esta definición es que el segmento que une los puntos X e Y nunca está por debajo de la gráfica de ψ. En efecto, pongamos $\beta = t$ en (4). Entonces, $0 \le t \le 1$, $\alpha = 1 - t$, y (4) se reescribe como

$$\psi((1-t)x + ty) \le (1-t)\psi(x) + t\psi(y) \quad (x, y \in I,\ x < y).$$

Es claro que $0 \le t \le 1$ y $z = (1-t)x + ty = x + t(y-x)$ implica $z \in [x,y]$. Recíprocamente, dado $z \in [x,y]$, basta tomar

$$t = \frac{z-x}{y-x}, \quad 1 - t = \frac{y-z}{y-x}$$

para que $0 \le t \le 1$ y $z = (1-t)x + ty$. Por tanto, (4) se expresa, equivalentemente, en la siguiente forma:

$$\psi(z) \le \frac{y-z}{y-x}\,\psi(x) + \frac{z-x}{y-x}\,\psi(y) \quad (x, y \in I,\ x < y,\ z \in [x,y]). \tag{5}$$

Si $\varphi_{x,y} : [x,y] \to \mathbb{R}$ es la función que comparece en el segundo miembro de (5), es decir,

$$\varphi_{x,y}(z) = \frac{y-z}{y-x}\,\psi(x) + \frac{z-x}{y-x}\,\psi(y) \quad (x,y \in I,\ x<y,\ z \in [x,y]),$$

la condición (5) se reformula diciendo que $\psi(z) \le \varphi_{x,y}(z)$ para todo $z \in [x,y]$. Observamos que $\varphi_{x,y}$ es una función polinómica de grado menor o igual que 1. Puesto que, evidentemente, $\varphi_{x,y}(x) = \psi(x)$ y $\varphi_{x,y}(y) = \psi(y)$, la gráfica de $\varphi_{x,y}$ es el segmento rectilíneo que une los puntos X e Y, el cual es secante a la gráfica de ψ. Por tanto, la función ψ es convexa si, y sólo si, la gráfica de ψ en cualquier intervalo cerrado y acotado $[x,y] \subset I$ se mantiene por debajo o en el segmento que une los puntos X e Y.

Definición 2.2 *Si en la Definición 2.1 se cumple que*

$$\psi(\alpha x + \beta y) < \alpha\psi(x) + \beta\psi(y)$$

para cualesquiera $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$, se dice que ψ es estrictamente convexa.

Definición 2.3 *Una función ψ definida en un intervalo abierto (a,b) se denomina* cóncava *(respectivamente,* estrictamente cóncava*) si $-f$ es convexa (respectivamente, estrictamente convexa).*

En lo que sigue trabajaremos solamente con funciones convexas, pues todo el estudio que vamos a hacer se traspone inmediatamente a funciones cóncavas sin más que sustituir una función por su opuesta.

A fin de obtener propiedades importantes de las funciones convexas, conviene expresar las condiciones (4) y (5) de forma más simétrica con respecto a las tres variables que intervienen en ellas. Si denotamos por $\psi(x,y)$ el cociente incremental $[\psi(y) - \psi(x)]/(y-x)$, la primera propiedad clave de las funciones convexas se resume diciendo que sus cocientes incrementales son funciones crecientes (Corolario 2.5).

Teorema 2.4 *Supongamos que ψ es convexa en $I = (a,b)$, y que $a < s < t < u < b$. Entonces, $\psi(s,t) \le \psi(s,u) \le \psi(t,u)$. Si ψ es estrictamente convexa, no se da la igualdad en ninguna de estas desigualdades.*

Demostración. Consideremos la primera de las desigualdades. Por (5),

$$\psi(t) \le \left(\frac{u-t}{u-s}\right)\psi(s) + \left(\frac{t-s}{u-s}\right)\psi(u). \tag{6}$$

Luego, $(u-s)\psi(t) \le (u-t)\psi(s) + (t-s)\psi(u)$, o bien

$$(u-s)[\psi(t) - \psi(s)] \le (t-s)[\psi(u) - \psi(s)],$$

de donde

$$\frac{\psi(t) - \psi(s)}{t-s} \le \frac{\psi(u) - \psi(s)}{u-s}, \tag{7}$$

como se requería. Si ψ es estrictamente convexa, no se da la igualdad en (6) y, por lo tanto, tampoco en (7).

Un razonamiento análogo establece la segunda desigualdad: si en (6) cambiamos de signo y sumamos $\psi(u)$ a ambos miembros, obtenemos

$$(u-s)[\psi(u) - \psi(t)] \ge (t-u)\psi(s) + (s-t)\psi(u) + (u-s)\psi(u) = (u-t)[\psi(u) - \psi(s)],$$

es decir,

$$\frac{\psi(u) - \psi(s)}{u-s} \le \frac{\psi(u) - \psi(t)}{u-t};$$

y similarmente respecto a la convexidad estricta. □

Corolario 2.5 *Sean $I=(a,b)$ un intervalo abierto, $\psi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, y $x \in I$. La función $\psi_x : I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$, definida por el cociente incremental*

$$\psi_x(z) = \psi(x,z) = \frac{\psi(z)-\psi(x)}{z-x} \quad (z \in I \setminus \{x\}),$$

es creciente.

Demostración. En efecto, dados $x \in I$ y $z,y \in I \setminus \{x\}$ con $z<y$, consideramos los tres casos posibles, para probar que siempre $\psi_x(z) \leq \psi_x(y)$.

- Si $x<z<y$, usamos la primera desigualdad de la tesis del Teorema 2.4 con $x=s$, $z=t$, $y=u$, obteniendo directamente $\psi_x(z) = \psi(x,z) \leq \psi(x,y) = \psi_x(y)$.
- Si $z<y<x$, usamos la segunda desigualdad de la tesis del Teorema 2.4 con $z=s$, $y=t$, $x=u$, obteniendo $\psi_x(z) = \psi(z,x) \leq \psi(y,x) = \psi_x(y)$.
- Finalmente, si $z<x<y$, usamos la desigualdad entre el primer y el último miembro de la tesis del Teorema 2.4 con $z=s$, $x=t$, $y=u$, obteniendo $\psi_x(z) = \psi(z,x) \leq \psi(x,y) = \psi_x(y)$. □

Teorema 2.6 *Supongamos que ψ está definida en $I=(a,b)$. Entonces, ψ es convexa en I si, y sólo si, para cualesquiera $x,y \in I$ tales que $x<y$, el grafo de ψ en (a,x) e (y,b) no queda por debajo de la recta que une X e Y.*

Demostración. Supongamos que ψ es convexa y que $y<t<b$. Entonces, por el Corolario 2.5, $\psi_x(y) \leq \psi_x(t)$, esto es, la pendiente de XY es menor o igual que la de XT:

$$\frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x} \leq \frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}.$$

Luego, despejando, T queda por encima o en la recta que une X con Y:

$$\psi(t) \geq \frac{(t-x)\,[\psi(y)-\psi(x)]+(y-x)\psi(x)}{y-x} = \frac{(t-x)\psi(y)+(y-t)\psi(x)}{y-x} = \frac{y-t}{y-x}\,\psi(x) + \frac{t-x}{y-x}\,\psi(y);$$

y similarmente para $a<s<x$.

Recíprocamente, si ψ no es convexa existen $x,y,z \in I$, con $z<x<y$, tales que X queda por encima del segmento ZY:

$$\psi(x) > \frac{y-x}{y-z}\,\psi(z) + \frac{x-z}{y-z}\,\psi(y),$$

en cuyo caso Z yace bajo la recta que une X con Y:

$$\psi(z) < \frac{y-z}{y-x}\,\psi(x) + \frac{z-x}{y-x}\,\psi(y),$$

contrariamente a la condición del enunciado. □

Teorema 2.7 *Toda función convexa en un intervalo abierto es continua.*

Demostración. Supongamos que ψ es convexa en $I=(a,b)$, y sea $x_0 \in I$; queremos probar que ψ es continua en x_0. Elegimos s,t,u tales que $a<s<x_0<t<u<b$. Sea $y=f_1(x)$ la ecuación de la recta que pasa por S y X_0, e $y=f_2(x)$ la de la recta que pasa por X_0 y U. El Teorema 2.6 asegura que $f_1(t) \leq \psi(t)$ y, siendo ψ convexa, $\psi(t) \leq f_2(t)$. Como f_1 y f_2 son continuas por la derecha en x_0 y se cortan en X_0, haciendo $t \to x_0$ encontramos que $\psi(x_0+)$ existe y

$$\psi(x_0+) = f_1(x_0+) = f_2(x_0+) = \psi(x_0).$$

Un argumento similar prueba que también existe $\psi(x_0-) = \psi(x_0)$ y, con ello, que ψ es continua en x_0. □

Observación 2.8 *Si en la Definición 2.1 no hubiéramos especificado un intervalo abierto, no se verificaría el Teorema 2.7, como muestra la función ψ definida por $\psi(x) = 0$ $(x \in [0,1))$, $\psi(1) = 1$.*

Teorema 2.9 *Sea ψ una función derivable en un intervalo $I = (a,b)$.*

(i) Se tiene que ψ es convexa en I si, y sólo si, ψ' es monótona creciente.

(ii) Si, además, existe ψ'' en I, entonces ψ es convexa en I si, y sólo si, $\psi'' \geq 0$ en I, y estrictamente convexa si $\psi'' > 0$ en I.

Demostración. Supongamos que ψ es derivable y convexa, y sean $s,t,u,v \in I$, con $s < t < u < v$. El Corolario 2.5 muestra que $\psi(s,t) = \psi_t(s) \leq \psi_t(u) = \psi(t,u)$ y $\psi(t,u) = \psi_u(t) \leq \psi_u(v) = \psi(u,v)$, así que $\psi(s,t) \leq \psi(u,v)$. Hagamos $t \to s$ y $u \to v$; entonces, también por el Corolario 2.5, $\psi(s,t)$ decrece a $\psi'(s)$, mientras que $\psi(u,v)$ crece a $\psi'(v)$. Luego, $\psi'(s) \leq \psi'(v)$ para todo $s < v$, probando que ψ' es monótona creciente y, de existir ψ'', nunca es negativa.

Recíprocamente, si ψ es derivable pero no convexa, existen $s,t,u \in I$, con $s < t < u$, tales que T está por encima del segmento SU. En tal caso, como anteriormente, la pendiente de ST es mayor que la de TU; pero, por el teorema del valor medio, la pendiente de ST es $\psi'(\alpha)$ para algún $\alpha \in (s,t)$, mientras que la de TU es $\psi'(\beta)$ para algún $\beta \in (t,u)$. Esto significa que ψ' no es monótona creciente e impide, en su caso, que $\psi'' \geq 0$.

Si ψ no fuese estrictamente convexa, existirían puntos alineados S,T,U sobre su grafo y tendríamos que $\psi'(\alpha) = \psi'(\beta)$ para α y β apropiados, con $\alpha < \beta$. Pero entonces, de nuevo por el teorema del valor medio, $\psi'' = 0$ en algún punto intermedio entre α y β. □

Ejemplo 2.10 *Se cumple que:*

(i) e^x es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$;

(ii) x^α es convexa en $(0,\infty)$ para $\alpha \geq 1$;

(iii) $-x^\alpha$ es estrictamente convexa en $(0,\infty)$ para $0 < \alpha < 1$;

(iv) $x \ln x$ es estrictamente convexa en $(0,\infty)$.

Ejemplo 2.11 *La función $\psi(x) = x^4$ es estrictamente convexa en $(-1,1)$, pero $\psi''(0) = 0$. Por tanto, la condición $\psi'' > 0$ no es necesaria para la convexidad estricta de ψ.*

Ejemplo 2.12 *Si una función f definida sobre $I = (a,b)$ satisface*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x,y \in I),$$

se dice que f es convexa en el punto medio. *Probar que una función f es continua y convexa en el punto medio si, y sólo si, es convexa en el sentido de la Definición 2.1.*

Resolución. Toda función convexa en un intervalo abierto es continua (Teorema 2.7) y, obviamente, convexa en el punto medio.

Recíprocamente, supongamos que f es continua y convexa en el punto medio, pero no convexa. Existen $x,y,z \in I$ tales que $x < y < z$, con Y yaciendo por encima del segmento XZ. Definimos k y m de la siguiente manera:

$$k = \inf\{t : S \text{ está por encima de } XZ \text{ si } t < s \leq y\}, \quad m = \sup\{t : S \text{ está por encima de } XZ \text{ si } y \leq s < t\}.$$

Por la continuidad de f tenemos que $k < y < m$, que K y M pertenecen a la recta que pasa por X y Z, y que S queda por encima del segmento KM para todo $s \in (k,m)$. En particular, si $r = (k+m)/2$, entonces R está por encima de KM; pero esto contradice la convexidad en el punto medio de f. □

2.2 Desigualdades de Jensen y Young

Teorema 2.13 (Desigualdad de Jensen) *Sea $(X, \mathscr{S}, \mu)$ un espacio de medida, con $\mu(X) = 1$. Si ψ es convexa en (a,b), $-\infty < a < b < \infty$, y si f es una función medible tal que $a < f(x) < b$ para todo x, entonces*

$$\psi\left(\int f\,d\mu\right) \leq \int \psi \circ f\,d\mu. \tag{8}$$

Demostración. Claramente, f es integrable; pongamos $t = \int f\,d\mu$, de modo que $\mu(X) = 1$ implica $a < t < b$. Sea $\beta = \sup\{\psi(x,t) : x \in (a,t)\}$. Si $s \in (a,t)$, es obvio que $\beta(t-s) \geq \psi(t) - \psi(s)$. Pero, por el Corolario 2.5, cuando $u \in (t,b)$ se cumple que $\beta \leq (\psi(u) - \psi(t))/(u-t)$, así que $\beta(t-u) \geq \psi(t) - \psi(u)$ $(u \in [t,b))$. Consecuentemente,

$$\psi(\gamma) \geq \psi(t) + \beta(\gamma - t) \quad (\gamma \in (a,b)). \tag{9}$$

Pongamos $\gamma = f(x)$ para obtener

$$(\psi \circ f)(x) \geq \psi(t) + \beta[f(x) - t)] \tag{10}$$

cualquiera que sea x. De la medibilidad de f y la continuidad de ψ se infiere que $\psi \circ f$ es medible (Ejercicio 28 del Tema 1). Pero el segundo miembro de (10) es integrable, de modo que (Ejercicio 59 del Tema 2) existe $\int \psi \circ f\,d\mu$. Integrando ambos miembros de (10) y teniendo en cuenta el valor de t, se concluye (8). □

Ejemplo 2.14 *Cuando ψ es estrictamente convexa, se da la igualdad en (8) si, y sólo si, $f = \int f\,d\mu$ c.t.p..*

Resolución. Es claro que si $f = \int f\,d\mu$ c.t.p., se da la igualdad. Recíprocamente, asumiendo que ψ es estrictamente convexa, se da la igualdad en (9) sólo si $\gamma = t$; pues si $\gamma \in (a,t)$ y se toma $v \in (\gamma,t)$, entonces $\psi(\gamma,t) < \psi(v,t) \leq \beta$; y si $\gamma \in (t,b)$ y se toma $u \in (t,\gamma)$, entonces $\beta \leq \psi(t,u) < \psi(t,\gamma)$. Ahora, la igualdad se da en (8) sólo si se da c.t.p. en (10), es decir, sólo si $f(x) = t = \int f\,d\mu$ c.t.p.. □

Ejemplo 2.15 (Desigualdad de Jensen discreta) *Sean $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{S} = \mathscr{P}(X)$, $\mu(\{x_i\}) = \alpha_i \geq 0$; la desigualdad de Jensen expresa que*

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i),$$

donde $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ y ψ es cualquier función convexa en $\mathbb{R}$. Si ψ es estrictamente convexa, se da la igualdad si, y sólo si, todos los x_i para los que $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ son iguales.

Resolución. Aplíquese el Teorema 2.13, con $f(x_i) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, y el Ejemplo 2.14. Nótese que la condición «c.t.p.» equivale aquí a «excepto aquellos x_i para los que $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$». □

Ejemplo 2.16 *Sea $g : X \to (0,\infty)$ y supongamos que $\ln g$ es integrable con respecto a μ, donde $\mu(X) = 1$. Demostrar que*

$$\exp\left(\int \ln g\,d\mu\right) \leq \int g\,d\mu. \tag{11}$$

Resolución. Ya que $\ln g$ es medible y la función $f(x) = e^x$ es continua, se tiene que g es medible (Ejercicio 28 del Tema 1). No se pierde generalidad suponiendo que g es integrable, pues de lo contrario no hay nada que probar. Nótese que la tesis del Teorema 2.13 permanece válida cuando a y b son infinitos si f y $\psi \circ f$ se asumen integrables, toda vez que, en la demostración de dicho teorema, t y β son entonces finitos y se puede desarrollar el mismo argumento. Así pues, para obtener (11) basta con particularizar $\psi(x) = e^x$ (cf. Ejemplo 2.10) y $f = \ln g$ en (8). □

Corolario 2.17 (Desigualdad de Young) *Sean $\alpha, \beta > 0$ y $0 < \lambda < 1$. Se verifica que*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta,$$

con igualdad si, y sólo si, $\alpha = \beta$.

Demostración. Por el Teorema 2.9 (cf. Ejemplo 2.10), $\psi(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) es estrictamente convexa. La desigualdad de Jensen discreta (Ejemplo 2.15) muestra que

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} = \exp(\lambda \ln\alpha + (1-\lambda)\ln\beta) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta,$$

con igualdad si, y sólo si, $\ln\alpha = \ln\beta$, esto es, $\alpha = \beta$. □

Ejemplo 2.18 *Dar una demostración alternativa de la desigualdad de Young, que no se apoye en la desigualdad de Jensen.*

Resolución. Se define $\varphi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda$ ($t > 0$). Así, $\varphi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-1} = \lambda(1-t^{\lambda-1})$ es negativa si $0 < t < 1$, nula si $t = 1$, y positiva si $t > 1$. Por tanto, el único punto crítico $t = 1$ corresponde a un mínimo. Como $\varphi(t) \geq \varphi(1) = 0$, sigue que $t^\lambda \leq 1 - \lambda + \lambda t$ ($t > 0$). Haciendo $t = \alpha/\beta > 0$ se deduce la desigualdad, con igualdad si, y sólo si, $\alpha/\beta = 1$. □

2.3 Desigualdades de Hölder y Minkowski

Definición 2.19 *Si p y q son números reales positivos tales que $p+q = pq$, o, equivalentemente,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{12}$$

se dice que p y q forman un par de exponentes conjugados.

Por la propia definición de conjugación, es claro que si p, q son exponentes conjugados, entonces $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$; un caso especialmente destacable es $p = q = 2$, único exponente autoconjugado.

Teorema 2.20 (Desigualdad de Hölder) *Sean $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados, y sean $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Entonces $fg \in L^1(\mu)$, y*

$$\int |fg|\, d\mu \leq \left\{ \int |f|^p\, d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int |g|^q\, d\mu \right\}^{1/q}. \tag{13}$$

Demostración. La desigualdad de Young (Corolario 2.17) muestra que, si $\alpha, \beta > 0$, entonces

$$\alpha^{1/p}\beta^{1/q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}. \tag{14}$$

Si $\|f\|_p = 0$ ó $\|g\|_q = 0$ entonces $fg = 0$ c.t.p., y (13) es trivial. Si $\|f\|_p > 0$ y $\|g\|_q > 0$, hacemos

$$\alpha = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}, \quad \beta = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

en (14), para obtener

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}. \tag{15}$$

El segundo miembro es integrable, así que $fg \in L^1(\mu)$. Puesto que p, q son exponentes conjugados, integrando ambos miembros resulta

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\,\|g\|_q,$$

que es (13). □

El caso particular más importante del Teorema 2.20 ocurre cuando $p = q = 2$ y recibe el nombre de *desigualdad de Schwarz*, *Cauchy-Schwarz* o *Cauchy-Bunyakowskii-Schwarz*[2].

Ejemplo 2.21 *Sean p, q, f, g como en el enunciado del Teorema 2.20. Probar que la desigualdad de Hölder (13) es una igualdad si, y sólo si,*

$$s|f|^p + t|g|^q = 0 \text{ c.t.p.} \tag{16}$$

para ciertas constantes s y t, no simultáneamente nulas.

Resolución. Sin más que reemplazar f, g por sus valores absolutos en caso necesario, no se pierde generalidad asumiendo que estas funciones son no negativas.

Supongamos que se da la igualdad en (13). Si, digamos, $\|f\|_p = 0$, entonces $f = 0$ c.t.p. y se satisface (16) para $t = 0$ y cualquier $s \neq 0$; lo mismo sucede cuando $\|g\|_q = 0$. Si $\|f\|_p > 0$ y $\|g\|_q > 0$, debemos tener igualdad c.t.p. en (15) y, por lo tanto, en (14). Pero la igualdad en (14) obliga a que $\alpha = \beta$, de modo que $f^p = rg^q$ c.t.p. con $r = \|f\|_p^p / \|g\|_q^q > 0$, lo que proporciona (16) también en este caso.

Recíprocamente, si se verifica (16), cabe sustituir en (13) para eliminar f ó g y obtener la igualdad. En efecto, asumiendo que podamos escribir $f^p = rg^q$ c.t.p. para alguna constante r (necesariamente no negativa, puesto que f y g se suponen no negativas), la sustitución en el primer y en el segundo miembro de (13) de la expresión de f derivada de esta representación conduce, respectivamente, a

$$\begin{gathered} r^{1/p} \int g^{1+q/p}\, d\mu = r^{1/p} \int g^q \, d\mu, \\ \left\{ r \int g^q \, d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int g^q \, d\mu \right\}^{1/q} = r^{1/p} \int g^q \, d\mu. \end{gathered}$$

Se procedería de modo similar si, para cierta $r \geq 0$, se tuviese $g^q = rf^p$ c.t.p.. □

Teorema 2.22 (Desigualdad de Minkowski) *Sea $1 \leq p < \infty$, y sean $f, g \in L^p(\mu)$. Entonces,*

$$\left\{ \int |f+g|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int |g|^p \, d\mu \right\}^{1/p}. \tag{17}$$

Demostración. El caso $p = 1$ es trivial; supondremos, pues, que $p > 1$, y que p y q son exponentes conjugados. Tampoco hay nada que probar si $\|f+g\|_p = 0$, por lo que asumiremos $\|f+g\|_p > 0$. Además, el Teorema 1.12 asegura que $\|f+g\|_p < \infty$.

Puesto que

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \leq (|f|+|g|)\,|f+g|^{p-1} = |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1},$$

la desigualdad de Hölder permite escribir:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \, d\mu &\leq \int |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \\ &\leq \|f\|_p \, \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \, \|(f+g)^{p-1}\|_q. \end{aligned} \tag{18}$$

Pero $(p-1)q = p$, de modo que el segundo miembro de (18) es igual a

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{p/q}.$$

[2] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) fue un matemático alemán conocido, sobre todo, por su trabajo en análisis complejo: lema de Schwarz, derivada schwarziana, función de Schwarz, principio de reflexión de Schwarz...; también lleva su nombre, por ejemplo, el teorema que garantiza la igualdad de las derivadas parciales cruzadas de segundo orden de las funciones de clase C^2. No debe ser confundido con Laurent-Moïse Schwartz (1915-2002), matemático francés creador de la teoría de distribuciones y receptor, en 1950, de la Medalla Fields.

Teniendo en cuenta, de nuevo, que p y q son exponentes conjugados, se concluye que

$$\|f+g\|_p = \|f+g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

como se requería. $\square$

Ejemplo 2.23 *Sean p, f, g como en el enunciado del Teorema 2.22. Probar que se da la igualdad en la desigualdad de Minkowski (17):*

(*i*) *Para $p=1$, si, y sólo si, c.t.p. se tiene, o bien $fg=0$, o bien $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} g$.*

(*ii*) *Para $p>1$, si, y sólo si, $sf=tg$ c.t.p., donde s y t son constantes no negativas, no simultáneamente nulas.*

Resolución.

(*i*) $p=1$: se cumple que $\displaystyle\int (|f|+|g|-|f+g|)\,d\mu \geq 0$, con igualdad si, y sólo si, $|f+g|=|f|+|g|$ c.t.p.. Como $|f+g|$ y $|f|+|g|$ son no negativas, la identidad $|f+g|=|f|+|g|$ c.t.p. equivale a

$$f^2+2fg+g^2 = (f+g)^2 = |f+g|^2 = (|f|+|g|)^2 = |f|^2+2|fg|+|g|^2 \quad \text{c.t.p.},$$

que, tras simplificar, se reduce a $fg=|fg|$ c.t.p., lo cual ocurre si, y sólo si, $fg\geq 0$ c.t.p., condición equivalente a la enunciada.

(*ii*) $p>1$: suponiendo que se da la igualdad en la desigualdad de Minkowski, distinguimos dos posibilidades.

- Si $\|f\|_p\,\|g\|_p=0$ y, digamos, $\|f\|_p=0$, entonces $f=0$ c.t.p., y de forma obvia se verifica que $sf=tg$ c.t.p. para $t=0$ y cualquier $s>0$; sucede análogamente cuando $\|g\|_p=0$.
- Si $\|f\|_p\,\|g\|_p>0$ (en cuyo caso, $\|f+g\|_p=\|f\|_p+\|g\|_p>0$) y se tiene la igualdad en (17), también debemos tenerla en (18), lo que obliga a que la desigualdad triangular $|f+g|\leq|f|+|g|$ sea una igualdad c.t.p. y a que se dé la igualdad en dos desigualdades de Hölder. Esta última restricción entraña que

  $$\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|f+g|^{(p-1)q}}{\|(f+g)^{p-1}\|_q^q} = \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p} \quad \text{c.t.p.},$$

  o bien

  $$\|g\|_p\,|f| = \|f\|_p\,|g| \quad \text{c.t.p.}.$$

  Por consiguiente, $sf=\pm tg$ c.t.p., donde $s=\|g\|_p>0$ y $t=\|f\|_p>0$. Como, además, $|f+g|=|f|+|g|$ c.t.p., las funciones f y g deben ser simultáneamente nulas o tener el mismo signo c.t.p. (tal como se vio en (*i*)), y se concluye que $sf=tg$ c.t.p., con $s,t>0$.

Recíprocamente, asumiendo que $sf=tg$ c.t.p. para ciertas constantes $s,t\geq 0$, no simultáneamente nulas, y, sin pérdida de generalidad, que $s>0$, de modo que $f=rg$ c.t.p. con $r\geq 0$, basta sustituir directamente en (17) para comprobar que se obtiene la igualdad:

$$\left\{\int |f+g|^p\,d\mu\right\}^{1/p} = (1+r)\left\{\int |g|^p\,d\mu\right\}^{1/p} = \left\{\int |f|^p\,d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int |g|^p\,d\mu\right\}^{1/p}. \quad \square$$

Cuando p y q son exponentes conjugados y $q\to 1$, necesariamente $p\to\infty$ (cf. (12)). Esto sugiere considerar $p=1$, $q=\infty$ como exponentes conjugados y establecer análogos de la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) para este caso, y de la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22) para el caso $p=\infty$. Dichos análogos se corresponden con los Teoremas 2.24 y 2.26, respectivamente.

Teorema 2.24 *Si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^\infty(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$, con $\|fg\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.*

Demostración. Como $|g| \le \operatorname{ess\,sup}|g|$ c.t.p. (cf. Ejemplo 2.56 del Tema 1), tenemos que $|fg| \le |f|\,\|g\|_\infty$ c.t.p.. Por tanto, fg es integrable, y basta integrar esta última desigualdad para obtener el resultado. $\square$

Ejemplo 2.25 *Sean $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^\infty(\mu)$. Probar que $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ si, y sólo si, $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.*

Resolución. La desigualdad $\|fg\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$ puede ser escrita como

$$\int |fg|\,d\mu \le \|g\|_\infty \int |f|\,d\mu,$$

o bien

$$\int_E |f|\,(\|g\|_\infty - |g|)\,d\mu = \int |f|\,(\|g\|_\infty - |g|)\,d\mu \ge 0,$$

donde $E = \{x : f(x) \neq 0\}$. Como $|f|\,(\|g\|_\infty - |g|)\,\chi_E \ge 0$ c.t.p., una condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad en la desigualdad anterior es que $|g| = \|g\|_\infty$ en c.t.p. de E. $\square$

Teorema 2.26 *Si $f, g \in L^\infty(\mu)$, entonces $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

Demostración. Véase el Ejemplo 2.57 del Tema 1. $\square$

Ejemplo 2.27 *Sean $f, g \in L^\infty(\mu)$. Demostrar que*

$$\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \tag{19}$$

si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \ge 0\}) > 0.$$

Resolución. Asumiendo esta última condición, dado $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x : |f(x)+g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty - 2\varepsilon\}) \\
&\qquad \ge \mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \ge 0\}) \\
&\qquad > 0.
\end{aligned}$$

En efecto, todo x que pertenece al conjunto del segundo miembro también está en el del primero:

$$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty - 2\varepsilon < |f(x)| + |g(x)| = |f(x)+g(x)|,$$

y basta con aplicar la monotonía de μ. Por tanto,

$$\|f+g\|_\infty > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty - 2\varepsilon$$

(si $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty - 2\varepsilon$, sería $|f+g| \le \|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty - 2\varepsilon$ c.t.p., así que $\mu(\{x : |f(x)+g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty - 2\varepsilon\}) = 0$). De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se infiere que $\|f+g\|_\infty \ge \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, y combinando esta desigualdad con la de Minkowski (Teorema 2.26), se concluye (19).

Recíprocamente, asumiendo (19) y dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$A = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}, \qquad M_f = \{x : |f(x)| \le \|f\|_\infty\},$$

$$B = \{x : |f(x)| + |g(x)| > \|f+g\|_\infty - \varepsilon\}, \qquad M_g = \{x : |g(x)| \le \|g\|_\infty\},$$
$$C = \{x : f(x)g(x) \ge 0\}.$$

Sea $x \in A^c \cap M_f \cap M_g$. Si ocurre que $|f(x)| \le \|f\|_\infty - \varepsilon$, entonces

$$|f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty - \varepsilon + \|g\|_\infty = \|f+g\|_\infty - \varepsilon,$$

así que $x \in B^c$. Similarmente, $|g(x)| \le \|g\|_\infty - \varepsilon$ implica $x \in B^c$. Así pues, $A^c \cap M_f \cap M_g \subset B^c$, o bien $B \subset A \cup M_f^c \cup M_g^c$. Como $\mu(M_f^c) = \mu(M_g^c) = 0$, se sigue que

$$\mu(B \cap C) \le \mu(A \cap C) = \mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \ge 0\}).$$

Pero el conjunto

$$B \cap C = \{x : |f(x) + g(x)| > \|f+g\|_\infty - \varepsilon\}$$

tiene medida estrictamente positiva, pues de lo contrario $\|f+g\|_\infty - \varepsilon$ sería una cota esencial de $|f+g|$ menor que $\|f+g\|_\infty$. Esto completa la prueba. □

Como ya habíamos adelantado, si identificamos las funciones que coinciden c.t.p., las normas (2) y (3) hacen de $L^p(\mu)$ ($1 \le p \le \infty$) un espacio métrico, cf. Proposición 1.3. En la próxima Sección 3 probaremos que estos espacios métricos son completos, lo que significa que los correspondientes espacios normados son de Banach, y estudiaremos algunas consecuencias que se derivan de esta estructura.

Teorema 2.28 *Para $1 \le p \le \infty$, la aplicación $\rho_p(f,g) = \|f-g\|_p$ define una métrica en $L^p(\mu)$: cualesquiera sean $f, g, h \in L^p(\mu)$,*

(*i*) $\rho_p(f,g) \ge 0$;

(*ii*) $\rho_p(f,g) = 0$ *si, y sólo si,* $f = g$;

(*iii*) $\rho_p(f,g) = \rho_p(g,f)$;

(*iv*) $\rho_p(f,g) \le \rho_p(f,h) + \rho_p(h,g)$.

Demostración. Se verifica (*ii*) en virtud del convenio relativo a la identificación de los elementos de $L^p(\mu)$ que coinciden c.t.p., mientras que (*iv*) se sigue inmediatamente de la desigualdad de Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26). Los enunciados restantes son obvios. □

3 Otras propiedades de los espacios L^p

3.1 Completitud

En esta sección probaremos que, para $1 \le p \le \infty$, $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach, es decir que, provisto de la distancia ρ_p del Teorema 2.28, $L^p(\mu)$ es un espacio métrico completo: toda sucesión de Cauchy respecto de esa distancia converge, en la misma métrica, a un elemento del espacio. En este punto, es oportuno citar las palabras de W. Rudin[3]:

> *El paso de la teoría de la integración de Riemann a la de Lebesgue es un proceso de compleción, de la misma fundamental importancia en análisis que la construcción del sistema de los números reales a partir de los racionales.*

Teorema 3.1 (Riesz-Fischer) *Si $1 \le p < \infty$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$, entonces existen una función f y una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ tales que $\lim_{i\to\infty} f_{n_i} = f$ c.t.p.. Además, $f \in L^p(\mu)$ y $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.*

[3] W. Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987, p. 6.

Demostración. Por hipótesis, $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ cuando $n,m \to \infty$. Construimos una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaciendo

$$\left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_p < \frac{1}{2^i} \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{20}$$

mediante el siguiente proceso inductivo:

- dado $\varepsilon = 2^{-1}$, existe n_1 tal que $\|f_n - f_{n_1}\|_p < 2^{-1}$ $(n \geq n_1)$;
- dado $\varepsilon = 2^{-2}$, existe $n_2 > n_1$ tal que $\|f_n - f_{n_2}\|_p < 2^{-2}$ $(n \geq n_2)$; en particular, $\|f_{n_2} - f_{n_1}\|_p < 2^{-1}$.
- suponiendo elegido n_i tal que $\|f_n - f_{n_i}\|_p < 2^{-i}$ $(n \geq n_i)$, existe $n_{i+1} > n_i$ tal que $\left\|f_n - f_{n_{i+1}}\right\|_p < 2^{-(i+1)}$ $(n \geq n_{i+1})$; en particular, $\left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_p < 2^{-i}$.

Pongamos $g_k = \sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$ $(k \in \mathbb{N})$ y $g = \sum_{i=1}^{\infty} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$. La desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22), en combinación con (20), proporciona:

$$\|g_k\|_p = \left\|\sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|\right\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_p < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = \frac{2^{-1} - 2^{-(k+1)}}{2^{-1}} = 1 - \frac{1}{2^k} < 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Aplicamos el lema de Fatou (Teorema 2.4 del Tema 2) a la sucesión de funciones medibles no negativas $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, para obtener

$$\|g\|_p^p = \int \left(\lim_{k\to\infty} g_k^p\right) d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int g_k^p \, d\mu \leq 1.$$

Por tanto, g es finita c.t.p. y, en consecuencia, la serie

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

es absolutamente convergente c.t.p.. Definimos f como la suma de esta serie donde converge, y arbitrariamente (por ejemplo, $f = 0$) donde no converge. Como $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = f_{n_k}$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$, se sigue que $f = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}$ c.t.p.. Cada función de la subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ está definida excepto quizá en un conjunto de medida nula, así que f sólo está definida en el mismo sentido; pero queda garantizado que representa un único elemento de $L^p(\mu)$.

Ahora queremos probar que $f \in L^p(\mu)$ y que la propia sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en la topología de este espacio. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n,m \geq N$ implica $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Por el lema de Fatou,

$$\int |f - f_m|^p \, d\mu = \int \left(\lim_{i\to\infty} |f_{n_i} - f_m|^p\right) d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int |f_{n_i} - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p \quad (m \geq N). \tag{21}$$

Luego, $f - f_N$, y por lo tanto $f = (f - f_N) + f_N$, están en el espacio vectorial $L^p(\mu)$. Además, en virtud de (21), $\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$ para $m \geq N$, lo que completa la demostración. □

Consideramos por separado el caso $p = \infty$, en el teorema siguiente.

Teorema 3.2 *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mu)$. Existe una función f tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p., $f \in L^\infty(\mu)$, y $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.*

Demostración. Usamos el hecho de que una función es mayor que su supremo esencial solamente en un conjunto de medida nula. Escribimos

$$A_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}, \quad B_n = \{x : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\} \qquad (n,m \in \mathbb{N}).$$

Si

$$E = \bigcup_{\substack{n,m=1\\ n\neq m}}^{\infty} A_{n,m} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

se tiene que $\mu(E) = 0$ y para cada $x \in E^c$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, cuyo límite denotamos por $f(x)$. Extendemos f a X definiendo $f(x)$ arbitrariamente en $x \in E$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n,m \geq N$ implica $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Si $x \in E^c$, entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (n,m \geq N),$$

y haciendo $n \to \infty$ encontramos que $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Sigue que $|f| \leq |f_m| + \varepsilon$ c.t.p. y, por lo tanto, $f \in L^\infty(\mu)$; de hecho, por construcción f es un elemento bien definido de $L^\infty(\mu)$, como en el caso $1 \leq p < \infty$ del Teorema 3.1. Finalmente, también se tiene que $\|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$, lo que prueba el resultado. □

3.2 Relaciones de inclusión

En esta sección exponemos los resultados de A. Villani[4] que caracterizan los espacios de medida $(X, \mathscr{S}, \mu)$ para los que se tiene alguna relación de inclusión entre los espacios $L^p(\mu)$.

Comenzamos con un lema previo.

Lema 3.3 *Sean $1 \leq p,q \leq \infty$. La inclusión conjuntista $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ implica que la aplicación inclusión $\imath : L^p(\mu) \hookrightarrow L^q(\mu)$ es continua.*

Demostración. Si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^p(\mu)$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge a f c.t.p. (Teoremas 3.1 y 3.2); la conclusión deseada se desprende fácilmente del teorema del grafo cerrado[5]. En efecto, si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^p(\mu)$ y $\lim_{n\to\infty} \imath f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = g$ en $L^q(\mu)$, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente a f c.t.p. y a g en $L^q(\mu)$, la cual admitirá, a su vez, otra subsucesión convergente c.t.p. a f y a g; la unicidad del límite obligará a que $f = g$ c.t.p., es decir, $\imath f = g$ c.t.p., como se pretendía. □

Denotemos por $\mathscr{S}_0$ la colección de todos los conjuntos $E \in \mathscr{S}$ de medida positiva.

Teorema 3.4 (Villani) *Las siguientes condiciones sobre el espacio de medida $(X, \mathscr{S}, \mu)$ son equivalentes:*

(i) $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ *para ciertos* $p,q \in [1,\infty]$ *con* $p < q$.

(ii) $\inf_{E\in\mathscr{S}_0} \mu(E) > 0$.

(iii) $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ *para cualesquiera* $p,q \in [1,\infty]$ *con* $p < q$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Por el Lema 3.3 y la caracterización de la continuidad de los operadores lineales entre espacios normados (Teorema 1.9), existe una constante $k > 0$ tal que $\|f\|_q \leq k\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mu)$. Sea $E \in \mathscr{S}$ con $0 < \mu(E) < \infty$, y particularicemos $f = \chi_E \in L^p(\mu)$ en esta caracterización.

- Si $q = \infty$, de modo que $\|\chi_E\|_\infty = 1$[6], entonces

$$1 = \|\chi_E\|_\infty \leq k\|\chi_E\|_p = k\,\mu(E)^{1/p},$$

probando que $\mu(E) \geq k^{-p}$.

[4] A. Villani: Another note on the inclusion $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 485–487.

[5] *Teorema del grafo cerrado.* Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal con la siguiente propiedad: para cada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que existen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, se verifica que $Tx = y$. Entonces, T es continuo.

[6] Para cualquier conjunto medible E con $\mu(E) > 0$, se tiene $\|\chi_E\|_\infty = 1$. Justifiquemos esta afirmación; por comodidad, denotaremos $\|\chi_E\|_\infty = \alpha$. Como $\{x : \chi_E(x) > 1\} = \emptyset$, necesariamente $\alpha \leq 1$. Se sabe que $\chi_E \leq \alpha$ c.t.p. (cf. Ejemplo 2.56 del Tema 1); si $\alpha < 1$, sería $\chi_E < 1$ c.t.p., esto es, $\{x : \chi_E(x) \geq 1\} = E$ tendría medida nula, una contradicción. Se concluye que $\alpha = 1$.

- Si $q<\infty$, entonces $\mu(E)^{1/q}\le k\,\mu(E)^{1/p}$ y, por lo tanto, $\mu(E)\ge k^{pq/(p-q)}$.

Como las estimaciones obtenidas son, evidentemente, válidas también cuando $\mu(E)=\infty$, queda probado (ii).
$(ii)\Rightarrow(iii)$ Sea $f\in L^p(\mu)$, y sea $E_n=\{x:|f(x)|>n\}$ $(n\in\mathbb{N})$. Entonces,

$$\|f\|_p^p=\int|f|^p\,d\mu\ge\int_{E_n}|f|^p\,d\mu\ge n^p\mu(E_n)$$

implica $\mu(E_n)\to 0$ cuando $n\to\infty$, de modo que, por (ii), algún $n_0\in\mathbb{N}$ es tal que $\mu(E_n)=0$ si $n\ge n_0$ (de lo contrario, existiría una subsucesión $\{E_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}_0$ con $\lim_{i\to\infty}\mu(E_{n_i})=0$, contraviniendo (ii)). Así pues, $|f|\le n_0$ c.t.p.. De la arbitrariedad de f se infiere que $L^p(\mu)\subset L^\infty(\mu)$, y de aquí, que $L^p(\mu)\subset L^q(\mu)$ para cualquier $q>p$:

$$\|f\|_q^q=\int|f|^q\,d\mu=\int|f|^{q-p}|f|^p\,d\mu\le\|f\|_\infty^{q-p}\|f\|_p^p<\infty\quad(f\in L^p(\mu)).$$

$(iii)\Rightarrow(i)$ Esto es trivial. □

Sea ahora $\mathscr{S}_\infty$ la colección de todos los conjuntos $E\in\mathscr{S}$ de medida finita.

Teorema 3.5 (Villani) *Las siguientes condiciones sobre el espacio de medida $(X,\mathscr{S},\mu)$ son equivalentes:*

(i) *$L^p(\mu)\supset L^q(\mu)$ para ciertos $p,q\in[1,\infty)$ con $p<q$.*

(ii) $\sup_{E\in\mathscr{S}_\infty}\mu(E)<\infty$.

(iii) *$L^p(\mu)\supset L^q(\mu)$ para cualesquiera $p,q\in[1,\infty)$ con $p<q$.*

Demostración. $(i)\Rightarrow(ii)$ Como antes, el Lema 3.3 proporciona una constante $k>0$ tal que $\|f\|_p\le k\|f\|_q$ para toda $f\in L^q(\mu)$; sigue que $\mu(E)\le k^{pq/(q-p)}$ para todo $E\in\mathscr{S}$ con $0<\mu(E)<\infty$. Esta estimación vale trivialmente si $\mu(E)=0$, y, por tanto, es cierta siempre que $E\in\mathscr{S}_\infty$, lo cual proporciona (ii).
$(ii)\Rightarrow(iii)$ Dada $f\in L^q(\mu)$, sea $E_n=\{x:(n+1)^{-1}\le|f(x)|<n^{-1}\}$ $(n\in\mathbb{N})$. Entonces

$$\mu(E_n)\le(n+1)^q\int|f|^q\,d\mu=(n+1)^q\|f\|_q^q<\infty\quad(n\in\mathbb{N}),$$

así que $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$. En efecto: de lo contrario, y ya que los E_n $(n\in\mathbb{N})$ son disjuntos dos a dos, podríamos escribir

$$\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(E_n)=\lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k}E_n\right)$$

con $\left\{\bigcup_{n=1}^{k}E_n\right\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}_\infty$, contradiciendo (ii). Ahora, para $p<q$ se verifica

$$\|f\|_p^p=\int|f|^p\,d\mu=\int_{\{x:|f(x)|\ge1\}}|f|^p\,d\mu+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|^p\,d\mu\le\int|f|^q\,d\mu+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\mu(E_n)\le\|f\|_q^q+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty,$$

lo que demuestra, por la arbitrariedad de f, que $L^q(\mu)\subset L^p(\mu)$.
$(iii)\Rightarrow(i)$ Esto es trivial. □

En el Teorema 3.5 se excluye $q=\infty$ del rango de exponentes considerado. La razón es que, como veremos a continuación, $L^\infty(\mu)\subset L^p(\mu)$ para algún (equivalentemente, para todo) p con $1\le p<\infty$ si, y sólo si, $\mu(X)<\infty$ (cf. Ejemplo 1.16).

Teorema 3.6 *Las siguientes condiciones sobre el espacio de medida $(X,\mathscr{S},\mu)$ son equivalentes:*

(i) *$L^p(\mu)\supset L^\infty(\mu)$ para algún $p\in[1,\infty)$.*

(ii) $\mu(X)<\infty$.

(*iii*) *$L^p(\mu) \supset L^\infty(\mu)$ para cualquier $p \in [1,\infty)$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si existe $p \in [1,\infty)$ tal que $L^\infty(\mu) \subset L^p(\mu)$ entonces, en particular, para la función $f \equiv 1 \in L^\infty(\mu)$ se obtiene

$$\mu(X) = \int |f|^p \, d\mu < \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si $\mu(X) < \infty$ y $f \in L^\infty(\mu)$, entonces

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \, \mu(X) < \infty \quad (1 \leq p < \infty).$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Evidente. $\square$

Concluimos con algunos ejemplos relativos a los Teoremas 3.4 y 3.5.

Ejemplo 3.7 (*i*) *Demostrar que, para $1 \leq p \leq \infty$, los espacios ℓ^p de sucesiones (Ejemplos 1.5 (iii), (iv)) son los espacios $L^p(X,\mu)$ asociados a un espacio de medida $(X,\mathscr{S},\mu)$ apropiado.*

(*ii*) *Escribir las expresiones de las desigualdades de Hölder y Minkowski para estos espacios.*

(*iii*) *Probar que $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$ $(1 \leq p < q \leq \infty)$.*

Resolución.

(*i*) Si $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{S} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ es la σ-álgebra formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, y $\mu_c : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ es la *medida cardinal* o *medida contadora* (*counting measure*, en inglés), definida por

$$\mu_c(E) = \begin{cases} \#E, & \#E \text{ finito} \\ \infty, & \#E \text{ infinito}, \end{cases}$$

entonces, claramente, toda aplicación $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es medible. Si, por abuso de lenguaje, identificamos estas aplicaciones con su rango, $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty$, obtenemos sucesiones de números reales. En este espacio de medida, para $1 \leq p < \infty$,

$$\int |x|^p \, d\mu_c = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty \{n\}} |x|^p \, d\mu_c = \sum_{n=1}^\infty \int_{\{n\}} |x|^p \, d\mu_c = \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p \, \mu_c(\{n\}) = \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p.$$

Además, como el único conjunto de medida nula es el vacío, toda sucesión esencialmente acotada está acotada, y la norma del supremo esencial coincide con la del supremo. Se concluye que $L^p(\mathbb{N},\mu_c) = \ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

(*ii*) Lo anterior permite discretizar las desigualdades de Hölder y Minkowski (cf. Teoremas 2.20 y 2.22), que se expresan, respectivamente, en la forma:

$$\sum_{n=1}^\infty |x(n)y(n)| \leq \left\{ \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{n=1}^\infty |y(n)|^q \right\}^{1/q},$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^\infty |x(n)+y(n)|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{i=1}^\infty |y(n)|^p \right\}^{1/p}.$$

Admitiendo también los exponentes conjugados $p = 1$, $q = \infty$ en la desigualdad de Hölder y el exponente $p = \infty$ en la de Minkowski (cf. Teoremas 2.24 y 2.26), estas se convierten, respectivamente, en:

$$\sum_{n=1}^\infty |x(n)y(n)| \leq \sum_{n=1}^\infty |x(n)| \, \sup_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)+y(n)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|.$$

(*iii*) No es difícil dar una demostración directa de estas inclusiones: si $x \in \ell^p$ $(1 \leq p < \infty)$ entonces, por la condición necesaria para la convergencia de series, $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$; y ya que toda sucesión convergente está acotada, $x \in \ell^\infty$. A partir de aquí, procediendo como en la demostración del Teorema 3.4, se prueba que $x \in \ell^q$ para todo q con $p < q < \infty$:

$$\|x\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^{q-p} |x(n)|^p \leq \|x\|_\infty^{q-p} \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p = \|x\|_\infty^{q-p} \|x\|_p^p < \infty.$$

No obstante, el resultado es inmediato a partir del Teorema 3.4, porque para la medida cardinal μ_c sobre $\mathscr{S} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ se cumple, claramente, que $\inf_{E\in\mathscr{S}_0} \mu(E) = 1 > 0$. □

Ejemplo 3.8 *En el Ejemplo 1.16 se dio una demostración directa de la inclusión $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ para $1 \leq p < q < \infty$, cuando $\mu(X) < \infty$.*

(*i*) *Obtener este resultado como consecuencia del Teorema 3.5.*

(*ii*) *Dar un ejemplo concreto de espacios L^p que guardan esta relación de inclusión.*

Resolución. Si $\mu(X) < \infty$ entonces, evidentemente, $\sup_{E\in\mathscr{S}_\infty} \mu(E) = \mu(X) < \infty$. Un ejemplo concreto de espacios L^p que guardan esta relación de inclusión son los espacios $L^p[a,b]$, donde $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es cualquier intervalo acotado con la medida de Lebesgue. □

El siguiente criterio será útil para la resolución del Ejemplo 3.10.

Proposición 3.9 (Criterio de comparación en el límite) *Sean $f, g : (a,\infty) \to [0,\infty)$ funciones medibles, con $g > 0$, tales que f, g son integrables en (a,b) para cualquier $b > a$, y existe*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Se verifica:

(*i*) *Si $L \in (0,\infty)$, entonces f es integrable si, y sólo si, g es integrable.*

(*ii*) *Si $L = 0$, entonces g integrable implica f integrable.*

(*iii*) *Si $L = \infty$, entonces f integrable implica g integrable.*

Demostración.

(*i*) Si $L \in (0,\infty)$, existe $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \frac{L}{2} \quad (x \geq M),$$

así que, para x grande,

$$\frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} g(x).$$

(*ii*) Si $L = 0$ entonces, para x grande, $f(x)/g(x) < 1$, así que $f(x) < g(x)$.

(*iii*) Si $L = \infty$ entonces, para x grande, $f(x)/g(x) > 1$, así que $f(x) > g(x)$. □

Se puede establecer un criterio análogo al de la Proposición 3.9 para funciones definidas en un intervalo $(0,a)$, reemplazando en el enunciado $x \to \infty$ por $x \to 0$ y suponiendo integrabilidad en (b,a) para cualquier $0 < b < a$.

Ejemplo 3.10 *Dada $f(x) = x^{-1}(1 + |\ln x|)^{-2}$, demostrar que:*

(*i*) *La función f es integrable en $(0,\infty)$.*

(ii) *Si* $1 \le p < \infty$, *entonces* $g_p = f^{1/p} \in L^p(0,\infty) \setminus L^\infty(0,\infty)$.

(iii) *Si, además,* $1 \le q < \infty$ *y* $q \neq p$, *entonces* $g_p \notin L^q(0,\infty)$.

Por tanto, existen espacios de medida $(X, \mathscr{S}, \mu)$ *donde los correspondientes espacios* $L^p(\mu)$ *no guardan entre sí ninguna relación de inclusión.*

Demostración. Se tiene que $f \in L^1(0,\infty)$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+|t|)^2}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2}\,dt + \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = 2.$$

Es claro que si $1 \le p < \infty$ y llamamos $g_p = f^{1/p}$, entonces $g_p \in L^p(0,\infty)$. Sin embargo, $g_p \notin L^q(0,\infty)$ para $1 \le q < \infty$ y $q \neq p$ porque

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{q/p}(1+|\ln x|)^{2q/p}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{q/p}(1+|\ln x|)^{2q/p}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{q/p}(1+|\ln x|)^{2q/p}}\,dx,$$

donde la primera integral es infinita si $q > p$, y la segunda lo es si $q < p$, como se comprueba aplicando el criterio de comparación en el límite (Proposición 3.9) con las integrales

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

respectivamente. En efecto: si $\alpha > 0$, entonces $x^\alpha \ln x \to 0$ cuando $x \to 0$; luego, para $0 < x < 1$, $q > p$ y $r = q/p > 1$, encontramos que

$$\frac{1}{x^r(1+|\ln x|)^{2r}} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{r-1}(1-\ln x)^{2r}} = \left[x^{\frac{r-1}{2r}}(1-\ln x)\right]^{-2r} \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } x \to 0.$$

Similarmente, si $\alpha < 0$, entonces $x^\alpha \ln x \to 0$ cuando $x \to \infty$; luego, para $1 < x < \infty$, $q < p$ y $r = q/p < 1$, resulta

$$\frac{1}{x^r(1+|\ln x|)^{2r}} : \frac{1}{x} = \left[x^{\frac{r-1}{2r}}(1+\ln x)\right]^{-2r} \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

Además, $g_p \notin L^\infty(0,\infty)$ porque $g_p(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$.

Nótese, por último, que cualquier función constante está en $L^\infty(0,\infty)$, pero no en $L^p(0,\infty)$ para $1 \le p < \infty$ (cf. Teorema 3.6). □

3.3 El rango $0 < p < 1$

Hasta ahora, hemos venido estudiando los espacios $L^p(\mu)$ cuando $1 \le p \le \infty$, aunque la Definición 1.11 y el Teorema 1.12 permanecen válidos si se extiende p al rango $0 < p < 1$. No obstante, para p en este rango, el espacio vectorial $L^p(\mu)$ no es un espacio de Banach. La razón fundamental es que, como veremos a continuación, cuando $0 < p < 1$ la función (2) no satisface la desigualdad triangular, es decir, no es una norma sobre $L^p(\mu)$. Aun así, es posible dotar a este espacio de una estructura de espacio métrico completo (no normable), tomando como distancia

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p \quad (f,g \in L^p(\mu)).$$

No profundizaremos en el análisis de tal estructura.

Proposición 3.11 *Sean* $0 < p < 1$ *y* q *un número real tal que* $p+q = pq$ *(nótese que* $q < 0$*). Sean también* f*,* g *dos funciones medibles no negativas, con* $f \in L^p(\mu)$*.*

(i) *Si* $\int g^q\,d\mu > 0$, *entonces* $\int fg\,d\mu \ge \left\{\int f^p d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int g^q\,d\mu\right\}^{1/q}$.

(*ii*) *Si* $g \in L^p(\mu)$, *entonces* $\left\{\int (f+g)^p \, d\mu\right\}^{1/p} \geq \left\{\int f^p \, d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int g^p \, d\mu\right\}^{1/p}$.

Demostración. Supondremos, adicionalmente, que $\int fg\, d\mu < \infty$ y $\int g^q \, d\mu < \infty$ en (*i*), y que $0 < \int (f+g)^p \, d\mu < \infty$ en (*ii*), pues de lo contrario no hay nada que probar.

(*i*) Sean $p' = 1/p$ y q' el exponente conjugado de p', de modo que $1 < p', q' < \infty$. Nótese que

$$\frac{1}{pq'} = p'\left(1 - \frac{1}{p'}\right) = p' - 1 = \frac{1}{p} - 1 = -\frac{1}{q}$$

implica $-pq' = q$; en particular, $q < 0$.

Pongamos $\psi = (fg)^p$, $\varphi = g^{-p}$; las funciones ψ, φ son medibles no negativas. Además, $\psi \in L^{p'}$ y $\varphi \in L^{q'}$, porque

$$\psi^{p'} = (fg)^{pp'} = fg, \qquad \varphi^{q'} = g^{-pq'} = g^q,$$

y se ha supuesto que fg y g^q son integrables. Por la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20),

$$\int \psi\varphi \, d\mu \leq \left\{\int \psi^{p'} \, d\mu\right\}^{1/p'} \left\{\int \varphi^{q'} \, d\mu\right\}^{1/q'}.$$

Como $\psi\varphi = f^p$, $\psi^{p'} = fg$ y $\varphi^{q'} = g^q$, esta desigualdad se convierte en

$$\int f^p \, d\mu \leq \left\{\int fg\, d\mu\right\}^{1/p'} \left\{\int g^q \, d\mu\right\}^{1/q'}.$$

Si dividimos los dos miembros por

$$\left\{\int g^q \, d\mu\right\}^{1/q'},$$

que se supone positiva y finita, resulta

$$\left\{\int f^p \, d\mu\right\} \left\{\int g^q \, d\mu\right\}^{-1/q'} \leq \left\{\int fg\, d\mu\right\}^{1/p'}.$$

Finalmente, elevamos ambos miembros a $1/p$ para obtener

$$\left\{\int f^p \, d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int g^q \, d\mu\right\}^{-1/pq'} \leq \left\{\int fg\, d\mu\right\}^{1/pp'},$$

o bien

$$\left\{\int f^p \, d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int g^q \, d\mu\right\}^{1/q} \leq \int fg\, d\mu.$$

(*ii*) Ahora se asume que $f, g \in L^p(\mu)$ y, adicionalmente, que la función $(f+g)^{(p-1)q} = (f+g)^p$ es integrable, con integral positiva. Aplicando (*i*) a cada uno de los sumandos del segundo miembro de la igualdad $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$, resulta:

$$\begin{aligned}
\int (f+g)^p \, d\mu &= \int f(f+g)^{p-1} \, d\mu + \int g(f+g)^{p-1} \, d\mu \\
&\geq \left\{\int f^p \, d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int (f+g)^{(p-1)q} \, d\mu\right\}^{1/q} + \left\{\int g^p \, d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int (f+g)^{(p-1)q} \, d\mu\right\}^{1/q} \\
&= \left[\left\{\int f^p \, d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int g^p \, d\mu\right\}^{1/p}\right] \left\{\int (f+g)^p \, d\mu\right\}^{1/q}.
\end{aligned}$$

Sin más que dividir ambos miembros por

$$\left\{\int (f+g)^p \, d\mu\right\}^{1/q},$$

que suponemos positiva y finita, se infiere la conclusión deseada. $\square$

Completaremos la sección con un contraejemplo donde se muestra que la desigualdad en el apartado (ii) de la Proposición 3.11 puede ser estricta.

Ejemplo 3.12 *Sean $f = \chi_{[0,1/2]}$, $g = \chi_{(1/2,1]}$. Probar que f, g son funciones en $L^p[0,1]$ $(0 < p < 1)$ tales que*

$$\left\{\int_0^1 f^p \, dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_0^1 g^p \, dx\right\}^{1/p} < \left\{\int_0^1 (f+g)^p \, dx\right\}^{1/p}.$$

Resolución. Se tiene, en efecto:

$$\left\{\int_0^1 f^p \, dx\right\}^{1/p} = \left\{\int_0^1 g^p \, dx\right\}^{1/p} = \frac{1}{2^{1/p}}, \quad \left\{\int_0^1 (f+g)^p \, dx\right\}^{1/p} = 1,$$

con $2^{1-1/p} < 1$. $\square$