Tema 3: Espacios L^p
Problemas resueltos

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Espacios normados, espacios de Banach y espacios L^p

1.1 Espacios normados y de Banach

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Demostrar la equivalencia de los siguientes asertos:

   a) X es un espacio de Banach.

   b) Toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente en X: si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X.

   Resolución. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_k$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq N$ implica

$$\|s_m - s_n\| = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \Big\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon.$$

   Esto significa que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, y al ser X completo, converge.

   b) $\Rightarrow$ *a*) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Construimos una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ de esta sucesión haciendo $x_{n_0} = 0$ y eligiendo

$$\begin{aligned}
&n_1 \in \mathbb{N}: && \|x_{n_1} - x_m\| < \frac{1}{2} && (m > n_1)\\
&n_2 > n_1: && \|x_{n_2} - x_m\| < \frac{1}{2^2} && (m > n_2)\\
&\quad\vdots\\
&n_k > n_{k-1}: && \big\|x_{n_k} - x_m\big\| < \frac{1}{2^k} && (m > n_k).
\end{aligned}$$

   Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\big\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

   Como, por hipótesis, $\sum_{k=1}^{\infty} \big(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\big)$ es convergente, sigue que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \big(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\big) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \big(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\big) = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}.$$

   Si una sucesión de Cauchy admite una subsucesión convergente, la propia sucesión converge. Por tanto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, y X es completo. □

2. Probar, mediante un contraejemplo, que el recíproco del enunciado del Ejercicio 1 *b*) es falso, es decir, que no toda serie convergente en un espacio de Banach converge absolutamente.

   Resolución. Recordemos que en el espacio de Banach más simple, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

   (cuya suma se obtiene evaluando en $x = 1$ el desarrollo de Maclaurin de la función $y = \ln(x+1)$) no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \qquad \square$$

1.2 Espacios L^p: definición y primeras propiedades

3. Demostrar que si $f,g \in L^1(\mu)$, entonces $\left|f^2+g^2\right|^{1/2} \in L^1(\mu)$.

   Resolución. Se tiene que $\left|f^2+g^2\right|^{1/2} \leq |f|+|g|$, donde la función mayorante es integrable. □

4. Probar que si $0<a<\infty$ y $0<p<\infty$, entonces:

   a) $x^{-1/p} \in L^{p-\sigma}(0,a)$ si $0<\sigma<p$, pero no si $\sigma=0$.

   b) $x^{-1/p}(\ln 1/x)^{-2/p} \in L^{p+\sigma}(0,a)$ si $\sigma=0$, pero no si $\sigma>0$.

   Resolución.

   a) Esto es inmediato: si $0<\sigma<p$,

$$\int_0^a \frac{1}{x^{(p-\sigma)/p}}\,dx = \int_0^a \frac{1}{x^{1-\sigma/p}}\,dx = \left.\frac{p\,x^{\sigma/p}}{\sigma}\right|_0^a = \frac{p\,a^{\sigma/p}}{\sigma};$$

   si $\sigma=0$,

$$\int_0^a \frac{1}{x^{(1/p)p}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \ln x\Big|_{1/n}^a = \infty.$$

   b) Si $\sigma=0$, integramos sobre $\left(n^{-1},a\right)$ para obtener $\left(\ln a^{-1}\right)^{-1}-(\ln n)^{-1}$, con límite finito cuando $n\to\infty$:

$$\begin{aligned}\int_{1/n}^a \frac{1}{x^{(1/p)p}(\ln 1/x)^{(2/p)p}}\,dx &= \int_{1/n}^a \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{-\ln n}^{\ln a}\frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{-\ln n}^{\ln a}\\ &= -\frac{1}{\ln a}-\frac{1}{\ln n} \longrightarrow -\frac{1}{\ln a} \quad \text{cuando } n\to\infty.\end{aligned}$$

   Si $\sigma>0$, que la integral es infinita se sigue del hecho de que $\alpha>0$ implica $x^\alpha \ln x \to 0$ cuando $x\to 0$:

$$\frac{1}{x^{(1/p)(p+\sigma)}(\ln 1/x)^{(2/p)(p+\sigma)}} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{1+\sigma/p}(\ln x)^{2(1+\sigma/p)}} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{r-1}(\ln x)^{2r}} = \frac{1}{(x^{\frac{r-1}{2r}}\ln x)^{2r}} \longrightarrow \infty$$

   cuando $x\to 0$, donde $r=1+\sigma/p>1$ (cf. Ejemplo 3.10). □

5. Demostrar que si $0<a<\infty$ y $0<p<\infty$, entonces $\ln x^{-1} \in L^p(0,a)$.

   Resolución. Aplicaremos el criterio de comparación cerca del origen. Se tiene que

$$\frac{\left(\ln x^{-1}\right)^p}{x^{-1/2}} = \frac{(-1)^p(\ln x)^p}{x^{-1/2}} = (-1)^p\left(x^{\frac{1}{2p}}\ln x\right)^p \longrightarrow 0$$

   cuando $x\to 0$. Por tanto, para x pequeño, $\left(\ln x^{-1}\right)^p \leq x^{-1/2}$, donde la función mayorante es integrable en $(0,a)$. □

6. Probar que si $0<a<\infty$, entonces $e^{1/x}\notin L^p(0,a)$ para ningún p, $0<p\leq\infty$.

   Resolución. Si $\alpha>0$, entonces $t^\alpha e^{1/t}\to\infty$ cuando $t\to 0$. Por tanto, para x pequeño, $\left(e^{1/x}\right)^p > x^{-1}$:

$$\frac{\left(e^{1/x}\right)^p}{x^{-1}} = x\left(e^{1/x}\right)^p = \left(x^{1/p}e^{1/x}\right)^p \longrightarrow \infty$$

   cuando $x\to$ 0. Por otra parte, es claro que $e^{1/x}$ no está acotada en $(0,a)$ y, siendo continua, tampoco está esencialmente acotada. □

7. Demostrar que $x^{-1/2}(1+|\ln x|)^{-1} \in L^p(0,\infty)$ si $p=2$, pero no si $p \neq 2$.

   Resolución. Este ejercicio se reduce al Ejemplo 3.10.

   - Si $p=2$, integramos explícitamente sobre $(0,1)$ y $(1,\infty)$ para obtener una integral finita.
   - Si $p>2$, $\int_0^1 x^{-p/2}(1-\ln x)^{-p}\,dx$ es infinita, como en el Ejercicio 4 *b*).
   - Si $p<2$, $\int_1^\infty x^{-p/2}(1+\ln x)^{-p}\,dx$ es, de nuevo, infinita, por comparación con $\int_1^\infty x^{-1}\,dx$.

   Desarrollemos la resolución con más detalle.

   a) Para $p=2$ tenemos (cambio de variable $\ln x = t$, con $dt = dx/x$ y t entre $-\infty$ y 0):

   $$\int_0^1 \frac{1}{x(1-\ln x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2}\,dt = \frac{1}{1-t}\Big|_{-\infty}^0 = 1,$$

   y también (cambio de variable $\ln x = t$, con $dt = dx/x$ y t entre 0 e ∞):

   $$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+\ln x)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{1}{1+t}\Big|_0^\infty = 1.$$

   Por tanto, la integral es finita y vale 2.

   b) Si $p>2$, comparamos con x^{-1} en $(0,1)$: se tiene

   $$\frac{1}{x^{p/2}(1-\ln x)^p} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{p/2-1}(1-\ln x)^p} = \frac{1}{\left[x^{\frac{p-2}{2p}}(1-\ln x)\right]^p}$$
   $$= \frac{1}{\left(x^{\frac{p-2}{2p}} - x^{\frac{p-2}{2p}}\ln x\right)^p} = \frac{1}{(x^\alpha - x^\alpha \ln x)^p} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty,$$

   ya que $\alpha = \dfrac{p-2}{2p} > 0$ y en tal caso, $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ y $x^\alpha \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. La integral es infinita.

   c) Si $0<p<2$, comparamos con x^{-1} en $(1,\infty)$: se tiene

   $$\frac{1}{x^{p/2}(1+\ln x)^p} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{p/2-1}(1+\ln x)^p} = \frac{1}{\left[x^{\frac{p-2}{2p}}(1+\ln x)\right]^p}$$
   $$= \frac{1}{\left(x^{\frac{p-2}{2p}} + x^{\frac{p-2}{2p}}\ln x\right)^p} = \frac{1}{(x^\alpha + x^\alpha \ln x)^p} \xrightarrow[x\to \infty]{} \infty,$$

   ya que $\alpha = \dfrac{p-2}{2p} < 0$ y en tal caso, $x^\alpha \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ y $x^\alpha \ln x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. La integral es infinita.

   Por último, nótese que $x^{-1/2}(1+|\ln x|)^{-1} \notin L^\infty(0,\infty)$, porque esta función tiende a ∞ cuando $x \to 0$. $\square$

8. Sea $f : X \to [0,\infty)$ una función medible, esencialmente acotada. Probar que si $0 < \mu(X) < \infty$ y se define

   $$I_n = \left\{\int f^n\,d\mu\right\}^{1/n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   entonces $\lim_{n\to\infty} I_n = \operatorname{ess\,sup} f$.

   Resolución. Sea $M = \operatorname{ess\,sup} f$, de modo que $f \leq M$ c.t.p.. Se quiere ver que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|I_n - M| < 2\varepsilon$.

Por una parte, como $\lim_{n\to\infty}\mu(X)^{1/n}=1$, dado $0<\varepsilon<M/2$, existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$I_n \le M\,\mu(X)^{1/n} < M\left(1+\frac{2\varepsilon}{M}\right)=M+2\varepsilon \quad (n\ge n_1). \tag{1}$$

Por otra parte, pongamos

$$X(\varepsilon)=\{x: f(x)>M-\varepsilon\}.$$

Se tiene que

$$\int f^n\,d\mu \ge \int_{X(\varepsilon)} f^n\,d\mu \ge (M-\varepsilon)^n\,\mu(X(\varepsilon)).$$

Puesto que $\mu(X(\varepsilon))>0$ (de lo contrario, $M-\varepsilon$ sería una cota esencial de f menor que M), existe $n_2\in\mathbb{N}$ tal que $n\ge n_2$ implica $\mu(X(\varepsilon))^{1/n}\ge 1-\varepsilon(M-\varepsilon)^{-1}$. Así,

$$I_n \ge (M-\varepsilon)\,\mu(X(\varepsilon))^{1/n} \ge (M-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{M-\varepsilon}\right)=M-2\varepsilon \quad (n\ge n_2). \tag{2}$$

Sin más que tomar $N\ge\max\{n_1,n_2\}$, la combinación de (1) y (2) proporciona el resultado que se busca. □

2 Desigualdades

2.1 Funciones convexas

9. Demostrar que toda función convexa admite derivadas laterales, luego es continua, en todo punto interior de su intervalo de definición. Más precisamente, sean $I=(a,b)$ un intervalo abierto, $\psi: I\to\mathbb{R}$ una función convexa, y $c\in I$. Entonces:

   a) ψ es derivable por la izquierda y por la derecha en c. De hecho, en la notación del Corolario 2.5,

   $$\psi'_-(c)=\sup\{\psi_c(x): x\in I,\ x<c\},\quad \psi'_+(c)=\inf\{\psi_c(x): x\in I,\ x>c\}.$$

   b) ψ es continua en c.

Resolución.

a) Nos apoyaremos en el hecho de que la función ψ_c es creciente (Corolario 2.5). Tomando $t\in I$ con $t>c$, para $x\in I$ con $x<c$ se tiene $\psi_c(x)\le\psi_c(t)$, luego el conjunto $\{\psi_c(x): x\in I,\ x<c\}$ es no vacío y acotado superiormente. Si S_c es su supremo, entonces $\psi'_-(c)=S_c$. En efecto, dado $\varepsilon>0$, por definición de supremo existirá $s\in I$, con $s<c$, tal que $\psi_c(s)>S_c-\varepsilon$. Tomando $\delta=c-s>0$, para $s=c-\delta<x<c$ tendremos $S_c-\varepsilon<\psi_c(s)\le\psi_c(x)\le S_c$, de donde $|S_c-\psi_c(x)|=S_c-\psi_c(x)<\varepsilon$. Esto prueba que $\lim_{x\to c-}\psi_c(x)=S_c$, como se quería. El cálculo de la derivada por la derecha es análogo.

b) Supongamos que existe

$$\lim_{x\to c+}\frac{\psi(x)-\psi(c)}{x-c}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c+}\psi(x) &= \psi(c)+\lim_{x\to c+}[\psi(x)-\psi(c)]\\
&= \psi(c)+\lim_{x\to c+}\left[(x-c)\,\frac{\psi(x)-\psi(c)}{x-c}\right]\\
&= \psi(c)+\lim_{x\to c+}(x-c)\,\lim_{x\to c+}\frac{\psi(x)-\psi(c)}{x-c}
\end{aligned}$$

$$= \psi(c).$$

Análogamente, si existe

$$\lim_{x\to c-} \frac{\psi(x)-\psi(c)}{x-c},$$

también existe $\lim_{x\to c-} \psi(x) = \psi(c)$. Como ψ es continua por la derecha y por la izquierda de c, es continua en c. □

2.2 Desigualdades de Jensen y Young

10. Sean $z_i > 0$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1,\dots,n)$, con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Probar que

$$\prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i,$$

y que se da la igualdad si, y sólo si, $z_1 = \dots = z_n$.

Resolución. En la desigualdad de Jensen discreta (Ejemplo 2.15), tomamos $x_i = \ln z_i$ $(i = 1,\dots,n)$ y $\psi(x) = e^x$ para obtener

$$\prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln z_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i,$$

con igualdad si, y sólo si, todos los z_i $(i = 1,\dots,n)$ son iguales entre sí. □

11. *(Desigualdad entre la media aritmética y la geométrica)* Demostrar que si $\xi_i > 0$ $(i = 1,\dots,n)$, entonces

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

con igualdad si, y sólo si, todos los ξ_i $(i = 1,\dots,n)$ tienen el mismo valor.

Resolución. Este es un caso particular del Ejercicio 10, para $z_i = \xi_i$ y $\alpha_i = 1/n$ $(i = 1,\dots,n)$. □

12. Supóngase que ψ es una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $\psi \circ f$ es integrable sobre $[0,1]$ y

$$\psi\left(\int_0^1 f\,dx\right) \leq \int_0^1 \psi \circ f\,dx$$

para toda función medible acotada f. Probar que ψ es convexa.

Resolución. Si ψ no es convexa, existen a,b,λ,μ tales que $a < b$, $\lambda,\mu > 0$, $\lambda+\mu = 1$, y $\psi(\lambda a+\mu b) > \lambda\psi(a)+\mu\psi(b)$. Sea l cualquier número tal que $0 < l < \lambda$, sea $m = 1-l/\lambda = (\lambda-l)\lambda$, y sea $n = l(1/\lambda-1) = l\mu/\lambda$. Entonces, $l,m,n > 0$ y $l+m+n = 1$. Definimos una función medible acotada f sobre $[0,1]$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [0,l) \\ \lambda a+\mu b, & x \in [l,l+m) \\ b, & x \in [l+m,1]. \end{cases}$$

Se tiene

$$\int_0^1 f\,dx = la+(\lambda a+\mu b)m+nb = (l+\lambda m)a+(n+\mu m)b = \lambda a+\mu b,$$

pero

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi\circ f\,dx &= l\psi(a)+m\psi(\lambda a+\mu b)+n\psi(b)\\ &= \psi(\lambda a+\mu b)-\frac{l}{\lambda}\left[\psi(\lambda a+\mu b)-\lambda\,\psi(a)-\mu\,\psi(b)\right]\\ &< \psi(\lambda a+\mu b).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \psi\circ f\,dx < \psi\left(\int_0^1 f\,dx\right),$$

una contradicción. □

2.3 Desigualdades de Hölder y Minkowski

13. Justificar la siguiente generalización de las desigualdades de Hölder (Teorema 2.20) y Minkowski (Teorema 2.22): *Sean* $(X,\mathscr{S},\mu)$ *un espacio de medida,* $f,g: X\to[0,\infty]$ *funciones medibles,* $1<p<\infty$ *y* $p+q=pq$*. Entonces:*

   a) *Desigualdad de Hölder:*

   $$\int fg\,d\mu \le \left\{\int f^p\,d\mu\right\}^{1/p}\left\{\int g^q\,d\mu\right\}^{1/q}.$$

   b) *Desigualdad de Minkowski:*

   $$\left\{\int (f+g)^p\,d\mu\right\}^{1/p} \le \left\{\int f^p\,d\mu\right\}^{1/p}+\left\{\int g^p\,d\mu\right\}^{1/p}.$$

   Resolución.

   a) Llamamos

   $$A=\left\{\int f^p\,d\mu\right\}^{1/p},\quad B=\left\{\int g^q\,d\mu\right\}^{1/q}.$$

   Los casos en que $A=0$ ó $B=0$, o bien $0<A,B<\infty$, fueron discutidos en el Teorema 2.20. Si $0<A\le\infty$ y $B=\infty$, o bien $A=\infty$ y $0<B\le\infty$, el segundo miembro es infinito, y la desigualdad se verifica trivialmente.

   b) Llamamos ahora

   $$C=\left\{\int (f+g)^p\,d\mu\right\}^{1/p}.$$

   Los casos $C=0$ ó $0<C<\infty$ ya fueron contemplados en el Teorema 2.22. Supongamos que $C=\infty$, de modo que $f+g\notin L^p(\mu)$. Como, por el Teorema 1.12, $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial, si la suma de dos funciones no está en $L^p(\mu)$, al menos una de ellas tampoco pertenecerá a este espacio; luego, el segundo miembro es infinito y se da la igualdad. □

14. Enunciar y demostrar análogas discretas de las desigualdades de Hölder (Teoremas 2.20 y 2.24) y Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26), similares a la proporcionada en el Ejemplo 2.15 para la desigualdad de Jensen.

   Resolución. Sean $a_i,b_i\ge 0$ $(i=1,2,\dots,n)$. Se verifica:

   a) *(Hölder)* Si $1<p<\infty$ y $1/p+1/q=1$,

   $$\sum_{i=1}^n a_ib_i \le \left\{\sum_{i=1}^n a_i^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{i=1}^n b_i^q\right\}^{1/q}.$$

b) *(Hölder)*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \max_{1\le i\le n} b_i \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

c) *(Minkowski)* Si $1 \le p < \infty$,

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right\}^{1/p}.$$

d) *(Minkowski)*

$$\max_{1\le i\le n} (a_i + b_i) \le \max_{1\le i\le n} a_i + \max_{1\le i\le n} b_i.$$

Para establecer, por ejemplo, *a*), se toma $X = \{1,\dots,n\}$, $a(i) = a_i$, $\mu(\{i\}) = 1$ $(i = 1,2,\dots,n)$, de modo que $\int a\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i$, y se aplica la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20).

Alternativamente, basta con particularizar sucesiones eventualmente nulas en las desigualdades discretas obtenidas en el Ejemplo 3.7. □

15. Probar que

$$\int_0^\pi x^{-1/4} \operatorname{sen} x\, dx \le \pi^{3/4}.$$

Resolución. Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20):

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^{-1/4} \operatorname{sen} x\, dx &\le \left\{\int_0^\pi x^{-1/2}\, dx\right\}^{1/2} \left\{\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx\right\}^{1/2} \\ &= \left\{2\sqrt{x}\,\Big|_0^\pi\right\}^{1/2} \left\{\frac{\pi}{2}\right\}^{1/2} = \pi^{1/4}\pi^{1/2} = \pi^{3/4}.\end{aligned}$$

□

16. Demostrar que las siguientes desigualdades son inconsistentes para funciones $f \in L^2(0,\pi)$:

$$\int_0^\pi [f(x) - \operatorname{sen} x]^2\, dx \le \frac{4}{9}, \qquad \int_0^\pi [f(x) - \cos x]^2\, dx \le \frac{1}{9}.$$

Resolución. Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ están en $L^2(0,\pi)$:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Conjuntamente con la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22) para $p = 2$, las desigualdades del enunciado implican

$$\|\operatorname{sen} x - \cos x\|_2 = \|(f - \operatorname{sen} x) - (f - \cos x)\|_2 \le \|f - \operatorname{sen} x\|_2 + \|f - \cos x\|_2 \le \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Pero el primer término de esta desigualdad vale $\sqrt{\pi} > 1$:

$$\begin{aligned}\|\operatorname{sen} x - \cos x\|_2^2 &= \int_0^\pi (\operatorname{sen} x - \cos x)^2\, dx \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx - \int_0^\pi \operatorname{sen} 2x + \int_0^\pi \cos^2 x\, dx \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx + \int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \pi.\end{aligned}$$

□

17. Probar que si $f, g \in L^1(\mu)$, entonces:

a) $\sqrt{|fg|} \in L^1(\mu)$.

$b)$ $|f|^p\,|g|^q \in L^1(\mu)$ si $p,q \in (0,1)$, $p+q=1$.

Resolución. Tomando $p=q=1/2$, el apartado $a)$ es un caso particular de $b)$. Para probar $b)$, escribimos $|f|^p = F$, $|g|^q = G$, $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$. Entonces $\alpha,\beta \in (1,\infty)$ son exponentes conjugados, con $F \in L^\alpha(\mu)$ y $G \in L^\beta(\mu)$, así que, por la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20), $FG \in L^1(\mu)$. $\square$

18. Sean $f_n \in L^2(a,b)$ $(n \in \mathbb{N})$, $f \in L^2(a,b)$, y $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

    $a)$ Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^2\,dx$.

    $b)$ Probar que si a y b son finitos, entonces $\displaystyle\int_a^t f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^t f_n\,dx \quad (a \le t \le b)$.

    $c)$ Verificar los apartados $a)$ y $b)$ para $(a,b) = (-\pi,\pi)$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r}\operatorname{sen} rx$, y $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

Resolución.

$a)$ La desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22), con $p=2$, proporciona $\big|\,\|f\|_2 - \|f_n\|_2\,\big| \le \|f - f_n\|_2$ $(n \in \mathbb{N})$.

$b)$ Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20),

$$\left|\int_a^t f\,dx - \int_a^t f_n\,dx\right| = \left|\int_a^b \chi_{(a,t)}\,(f - f_n)\,dx\right| \le \sqrt{t-a}\,\|f - f_n\|_2 \quad (a \le t \le b,\ n \in \mathbb{N}).$$

$c)$ Para comprobar $a)$, integramos explícitamente usando que $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$; para verificar $b)$, integramos usando la serie de Fourier estándar de t^2.

Procedemos con $a)$:

$$\int_a^b f^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{6},$$

$$\int_a^b f_n^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r}\operatorname{sen} rx\right]^2 dx = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 rx\,dx = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2rx}{2} = \pi\sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\pi\sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^3}{6} = \int_a^b f^2\,dx.$$

En el desarrollo anterior hemos usado la relación

$$\left(\sum_{r=1}^n a_r\right)^2 = \sum_{r=1}^n a_r^2 + 2\sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^n a_r\,a_s$$

particularizada en

$$a_r = \frac{(-1)^{r-1}}{r}\operatorname{sen} rx, \quad a_r\,a_s = \frac{(-1)^{r+s}}{rs}\operatorname{sen} rx\operatorname{sen} sx \qquad (x \in [-\pi,\pi],\ r,s = 1,\dots,n),$$

con

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} rx\operatorname{sen} sx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(r-s)x - \cos(r+s)x]\,dx = 0.$$

Procedemos con $b)$. La serie de Fourier de una función g tiene la forma

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx,$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\operatorname{sen} nx\,dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Determinemos la serie de la función $g(x) = x^2$. Como esta función es par, los coeficientes b_n $(n \in \mathbb{N})$ se anulan. Por su parte, los coeficientes a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ son

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx.$$

Luego,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

e, integrando por partes dos veces,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi}\left[x^2\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} nx\,dx \\ &= \left[\frac{4x\cos nx}{n^2\pi}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx \\ &= (-1)^n\frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3\pi}\operatorname{sen} nx\Big|_0^{\pi} = (-1)^n\frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Además, $g(x) = x^2$ es el límite uniforme de su serie de Fourier, porque esta función admite derivadas de cualquier orden. Obtenemos así la representación

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Fijemos $a \le t \le b$; entonces,

$$\int_a^t f\,dx = \int_{-\pi}^t \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{-\pi}^t = \frac{t^2-\pi^2}{4},$$

$$\begin{aligned} \int_a^t f_n\,dx &= \int_{-\pi}^t\left[\sum_{r=1}^n\frac{(-1)^{r-1}}{r}\operatorname{sen} rx\right]dx = \sum_{r=1}^n\frac{(-1)^{r-1}}{r}\int_{-\pi}^t\operatorname{sen} rx\,dx \\ &= \sum_{r=1}^n\frac{(-1)^r}{r^2}\cos rx\Big|_{-\pi}^t = \sum_{r=1}^n\frac{(-1)^r}{r^2}(\cos rt - \cos r\pi) \\ &= \sum_{r=1}^n\frac{(-1)^r}{r^2}[\cos rt - (-1)^r] = \sum_{r=1}^n\frac{(-1)^r}{r^2}\cos rt - \sum_{r=1}^n\frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Atendiendo ahora al desarrollo en serie de Fourier de t^2, encontramos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^t f\,dx = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r^2}\cos rt - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{4}\left(t^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) - \frac{\pi^2}{6} = \frac{t^2-\pi^2}{4},$$

con lo cual queda verificado b). □

19. Sea $1 \le p < \infty$, y sea $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \|f\|_p$.

Resolución. Por la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22), $\left|\|f_n\|_p - \|f\|_p\right| \leq \|f_n - f\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

20. Sea $f \geq 0$, $f \in L^1(x,1)$ para cada $x \in (0,1]$. Supóngase que $t^{p-1} f^p(t) \in L^1(0,1)$, donde $1 < p < \infty$. Probar que $F(x) = \int_x^1 f\,dt$ satisface $F(x) = o(\ln 1/x)^{1-1/p}$ cuando $x \to 0+$.

Resolución. El Ejemplo 1.52 del Tema 2 proporciona una función $\varphi \geq 1$, medible en $[0,1]$, tal que $\varphi(t)t^{p-1}f^p(t) \in L^1[0,1]$ y $\varphi(0+) = \infty$. Si q es el exponente conjugado de p, la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) permite escribir

$$\begin{aligned} F(x) = \int_x^1 f\,dt &= \int_x^1 \frac{1}{\varphi^{1/p}(t)t^{(p-1)/p}}\,\varphi^{1/p}(t)t^{(p-1)/p}f(t)\,dt \\ &\leq \left\{\int_x^1 t^{p-1}\varphi(t)f^p(t)\,dt\right\}^{1/p}\left\{\int_x^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t)\,dt\right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Luego,

$$F(x) \leq M\left\{\int_x^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t)\,dt\right\}^{1/q},$$

donde M es una constante. Dado $\varepsilon > 0$, existe x_0 tal que $\varphi^{-q/p}(x) < \varepsilon$ si $0 < x < x_0$, y entonces, para x pequeño ($\ln 1/x > (1/\varepsilon - 1)\ln 1/x_0$, o bien $0 < x < x_0^{1/\varepsilon - 1}$),

$$\begin{aligned} \int_x^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t)\,dt &= \int_x^{x_0} t^{-1}\varphi^{-q/p}(t)\,dt + \int_{x_0}^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t)\,dt \\ &\leq \varepsilon(\ln 1/x - \ln 1/x_0) + \ln 1/x_0 = (1-\varepsilon)\ln 1/x_0 + \varepsilon \ln 1/x \\ &\leq 2\varepsilon \ln 1/x. \end{aligned}$$

Combinando esta estimación con la precedente, queda resuelto el ejercicio. □

21. Sean $1 < p < \infty$, $f \geq 0$, $f \in L^p(0,\infty)$, y $F(x) = \int_0^x f\,dx$. Demostrar que si p y q son exponentes conjugados, entonces $F(x) = o\left(x^{1/q}\right)$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$.

Resolución.

- Para $x \to 0$, la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) proporciona $F(x) \leq x^{1/q}\left\{\int_0^x f^p\,dt\right\}^{1/p}$, donde, por el Teorema 2.8 del Tema 2, $\int_0^x f^p\,dt \to 0$ cuando $x \to 0$.
- Para $x \to \infty$: dado $\varepsilon > 0$, existe y tal que $\int_y^\infty f^p\,dt < \varepsilon^p$ (teorema de la convergencia monótona); sea, pues, $x > y$. Entonces,

  $$F(x) - F(y) \leq \left\{\int_y^x f^p\,dt\right\}^{1/p}(x-y)^{1/q} \leq \varepsilon x^{1/q},$$

  o bien $F(x) \leq F(y) + \varepsilon x^{1/q}$. Por otra parte, es claro que $\lim_{x\to\infty} x^{-1/q}F(y) = 0$. Consecuentemente, para x grande, $F(x) < 2\varepsilon x^{1/q}$. □

22. Extender la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) a n funciones. Más precisamente, probar que si $1 < k_1, k_2, \ldots, k_n < \infty$, con $\sum_{i=1}^n 1/k_i = 1$, y si $f_i \in L^{k_i}(\mu)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, entonces

$$\int |f_1 f_2 \cdots f_n|\,d\mu \leq \left\{\int |f_1|^{k_1}\,d\mu\right\}^{1/k_1} \cdots \left\{\int |f_n|^{k_n}\,d\mu\right\}^{1/k_n}. \tag{3}$$

Resolución. Para $n = 2$, obtenemos la desigualdad de Hölder. Procediendo por inducción, supongamos que el resultado se verifica para $n-1$, $n \geq 3$, y sea $\alpha = (1-k_n^{-1})^{-1}$. Como $1 < \alpha, k_n < \infty$ son exponentes conjugados, la desigualdad de Hölder conduce a

$$\int |f_1 \cdots f_n| \, d\mu \leq \left\{ \int |f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha \, d\mu \right\}^{1/\alpha} \left\{ \int |f_n|^{k_n} \, d\mu \right\}^{1/k_n}. \tag{4}$$

Pero, para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$, se cumple que $1 < k_i \alpha^{-1} < \infty$ (porque $k_i^{-1} + k_n^{-1} < 1$ implica $k_i > (1-k_n^{-1})^{-1} = \alpha$), y además $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha k_i^{-1} = 1$, así que, por hipótesis inductivas,

$$\int |f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha \, d\mu \leq \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \int |f_i|^{k_i} \, d\mu \right\}^{\alpha/k_i}. \tag{5}$$

La inserción de (5) en (4) establece (3) y completa la inducción. □

23. Extender el Ejemplo 2.21 a n funciones. Más precisamente, demostrar que se da la igualdad en la desigualdad del Ejercicio 22 si, y sólo si, alguna de las f_i $(i = 1, \ldots, n)$ es nula c.t.p., o para cada par $i, j = 1, \ldots, n$, existen constantes no nulas c_i, c_j tales que

$$c_i |f_i|^{k_i} = c_j |f_j|^{k_j}. \tag{6}$$

Resolución. Si $f_i = 0$ c.t.p. para algún $i = 1, \ldots, n$, o se cumple (6), la igualdad es trivial. En este último caso podríamos escribir, por ejemplo,

$$|f_i| = r_i^{k_i^{-1}} |f_1|^{k_1 k_i^{-1}}$$

para ciertas constantes $r_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, con lo que el primer y el segundo miembro de (3) adoptarían, respectivamente, la forma

$$\int |f_1 \cdots f_n| \, d\mu = \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \int |f_1|^{k_1 \sum_{i=1}^n k_i^{-1}} \, d\mu = \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \int |f_1|^{k_1} \, d\mu,$$

$$\left\{ \int |f_1|^{k_1} \, d\mu \right\}^{1/k_1} \cdots \left\{ \int |f_n|^{k_n} \, d\mu \right\}^{1/k_n} = \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \left\{ \int |f_1|^{k_1} \, d\mu \right\}^{\sum_{i=1}^n k_i^{-1}} = \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \int |f_1|^{k_1} \, d\mu.$$

Recíprocamente, el caso $n = 2$ viene dado por el Ejemplo 2.21. Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$ funciones y consideremos el caso de n funciones, descartando que $f_i = 0$ c.t.p. para algún $i = 1, \ldots, n$. Sin más que combinar la hipótesis de que (6) se verifica para $n-1$ funciones con la condición a la que obliga la igualdad en (4), se prueba (6) en el caso de n funciones. En efecto, si se da la igualdad en (4), entonces

$$|f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha = r_\alpha |f_n|^{k_n},$$

mientras que, por hipótesis inductivas,

$$|f_i| = r_i |f_1|^{k_1 k_i^{-1}} \quad (i = 1, \ldots, n-1);$$

aquí, r_α y r_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ son constantes positivas apropiadas. Así pues,

$$r_\alpha |f_n|^{k_n} = |f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha = \left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i \right)^\alpha |f_1|^{\alpha k_1 \sum_{i=1}^{n-1} k_i^{-1}} = r\, |f_1|^{\alpha k_1 (1-k_n^{-1})} = r\, |f_1|^{k_1},$$

donde $r = \left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i \right)^\alpha$. Se concluye que $|f_n| = r_n |f_1|^{k_1 k_n^{-1}}$ para cierta constante $r_n > 0$, completando la inducción. □

24. Probar que si $\alpha,\beta,\gamma>0$ y $0<p<(\alpha+\beta+\gamma)^{-1}$, entonces

$$\int_0^2 \frac{dx}{\left(x^\alpha\,|x-1|^\beta\,|x-2|^\gamma\right)^p}<\infty.$$

Resolución. En el Ejercicio 22, tomamos $n=3$, $f_1(x)=x^{-p\alpha}$, $f_2(x)=|x-1|^{-p\beta}$, $f_3(x)=|x-2|^{-p\gamma}$, $\delta=p(\alpha+\beta+\gamma)<1$, $k_1=\delta/(p\alpha)$, $k_2=\delta/(p\beta)$, y $k_3=\delta/(p\gamma)$ (nótese que $1<k_1,k_2,k_3<\infty$, con $\sum_{i=1}^{3}1/k_i=1$), para obtener el resultado:

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \frac{dx}{\left(x^\alpha\,|x-1|^\beta\,|x-2|^\gamma\right)^p}\\
&\leq\left\{\int_0^2 x^{(-p\alpha)\delta/(p\alpha)}\,dx\right\}^{(p\alpha)/\delta}\left\{\int_0^2 |x-1|^{(-p\beta)\delta/(p\beta)}\,dx\right\}^{(p\beta)/\delta}\left\{\int_0^2 |x-2|^{(-p\gamma)\delta/(p\gamma)}\,dx\right\}^{(p\gamma)/\delta}\\
&=\left\{\int_0^2 x^{-\delta}\,dx\right\}^{p\alpha/\delta}\left\{\int_0^2 |x-1|^{-\delta}\,dx\right\}^{p\beta/\delta}\left\{\int_0^2 |x-2|^{-\delta}\,dx\right\}^{p\gamma/\delta}<\infty,
\end{aligned}$$

por cuanto $\delta<1$. □

25. Extender la desigualdad de Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26) a n funciones.

Resolución. Sea $1\leq p\leq\infty$, y sean $f_i\in L^p(\mu)$ $(i=1,\dots,n)$. Entonces,

$$\left\|\sum_{i=1}^n f_i\right\|_p\leq\sum_{i=1}^n\|f_i\|_p.$$

La demostración es inmediata, por inducción finita a partir del caso $n=2$. □

26. Sea f una función medible no negativa esencialmente acotada, con $\operatorname{ess\,sup} f=M>0$. Si $0<\mu(X)<\infty$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int f^{n+1}\,d\mu}{\int f^n\,d\mu}=M.$$

Resolución. Fijemos $n\in\mathbb{N}$. Reemplazando f por f/M, no se pierde generalidad al suponer que $\operatorname{ess\,sup} f=1$. En tal caso, $f^{n+1}\leq f^n$ c.t.p., de modo que el límite superior requerido no es mayor que 1. Pero $(n+1)/n$ y $n+1$ son exponentes conjugados, así que, por la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20),

$$\int f^n\,d\mu\leq\left\{\int f^{n+1}\,d\mu\right\}^{\frac{n}{n+1}}\mu(X)^{\frac{1}{n+1}},$$

o bien

$$\left\{\int f^n\,d\mu\right\}^{n+1}\leq\left\{\int f^{n+1}\,d\mu\right\}^n\mu(X).$$

Luego,

$$\frac{\int f^n\,d\mu}{\mu(X)}\leq\frac{\left\{\int f^{n+1}\,d\mu\right\}^n}{\left\{\int f^n\,d\mu\right\}^n}.$$

Extráiganse raíces n-ésimas, hágase $n\to\infty$ y aplíquese el Ejercicio 8 para obtener que el límite inferior requerido no es menor que 1 y resolver el ejercicio. □

27. Probar que la sucesión de la que se toma límite en el Ejercicio 26 es creciente.

Resolución. Pongamos $I_n = \int f^n \, d\mu$ ($n \in \mathbb{N}$). Por la desigualdad de Schwarz, para $n \geq 2$,

$$I_n^2 = \left\{ \int f^{(n-1)/2} f^{(n+1)/2} \, d\mu \right\}^2 \leq I_{n-1} \, I_{n+1}. \qquad \square$$

28. Demostrar que si $f \in L^{p_1}(\mu)$ y $g \in L^{p_2}(\mu)$, con $0 < p_1, p_2 < \infty$, entonces $fg \in L^p(\mu)$ para algún p.

Resolución. Escribimos $p_1' = p_1\lambda$, $p_2' = p_2\lambda$, donde $\lambda = 1/p_1 + 1/p_2$, de manera que $1 < p_1', p_2' < \infty$ son exponentes conjugados. Como $f \in L^{p_1}(\mu)$, se tiene que $f^{1/\lambda} \in L^{p_1'}(\mu)$ y, similarmente, $g^{1/\lambda} \in L^{p_2'}(\mu)$. El Teorema 2.20 (desigualdad de Hölder) asegura que $(fg)^{1/\lambda} \in L^1(\mu)$, así que el índice p buscado es

$$p = \frac{1}{\lambda} = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}. \qquad \square$$

29. Encontrar el mínimo de

$$P_f = \left\{ \int_E f \, d\mu \right\} \left\{ \int_E \frac{1}{f} \, d\mu \right\}$$

tomado sobre el conjunto de las funciones f que son medibles y positivas c.t.p. en un conjunto medible E, de medida finita. ¿En qué funciones se alcanza este mínimo? Para un espacio de medida y conjunto E apropiados, probar que P_f no está acotado superiormente.

Resolución. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20) al producto de $\sqrt{f}$ y $1/\sqrt{f}$ encontramos que

$$\sqrt{P_f} \geq \int_E 1 \, d\mu = \mu(E),$$

lo que resuelve la primera parte del ejercicio: el mínimo es $\mu(E)^2$ (se alcanza en $f \equiv 1$). Por el Ejemplo 2.21, se da la igualdad cuando $sf + t/f = 0$ c.t.p. para ciertas constantes no nulas s y t, es decir, cuando f es constante c.t.p.. Respecto a la última parte, considerando $E = (a,b)$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue y tomando $f(x) = (x-a)^2$, resulta $P_f = \infty$. $\square$

30. Sean f y g funciones integrables esencialmente acotadas, y sean $0 < p = \operatorname{ess\,inf} f \leq \operatorname{ess\,sup} f = P$, $0 < q = \operatorname{ess\,inf} g \leq \operatorname{ess\,sup} g \leq Q$. Demostrar que

$$4 \int f^2 \, d\mu \int g^2 \, d\mu \leq \left\{ \sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}} \right\}^2 \left\{ \int fg \, d\mu \right\}^2.$$

Resolución. Se tiene que $pqg \leq qQf \leq PQg$ c.t.p., o bien

$$\frac{p}{Q} g \leq f \leq \frac{P}{q} g \quad \text{c.t.p.}.$$

Escribamos

$$F_y = f^2 + yfg \left(\frac{\sqrt{PQ}}{\sqrt{pq}} + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{PQ}} \right) + y^2 g^2 = \left(f + yg \frac{\sqrt{PQ}}{\sqrt{pq}} \right) \left(f + yg \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{PQ}} \right).$$

Si $\alpha = \sqrt{Pp}/\sqrt{Qq}$, entonces

$$F_{-\alpha} = \left(f - \frac{P}{q} g \right) \left(f - \frac{p}{Q} g \right) \leq 0 \quad \text{c.t.p.},$$

mientras que

$$F_\alpha = \left(f + \frac{P}{q} g \right) \left(f + \frac{p}{Q} g \right) > 0$$

en un conjunto de medida positiva (de lo contrario, $F_\alpha \leq 0$ c.t.p., obligando a que $f \leq 0$ c.t.p.; una contradicción, salvo en el caso trivial de que el espacio ambiente tenga medida nula). Luego, $\int F_y \, d\mu$ no es mayor que cero para $y = -\alpha$, y es positiva para $y = \alpha$. Como la función

$$\int F_y \, d\mu = \int f^2 \, d\mu + y \left(\frac{\sqrt{PQ}}{\sqrt{pq}} + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{PQ}} \right) \int fg \, d\mu + y^2 \int g^2 \, d\mu$$

es cuadrática en y, debe tener una raíz real (discriminante no negativo), lo que proporciona la estimación deseada. □

3 Otras propiedades de los espacios L^p

3.1 Completitud

31. Sean $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mu)$, con $f \geq 0$. Probar que $f_n = \min\{f, n\} \in L^p(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

   Resolución. Fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq f_n^p \leq f^p$, así que $f_n \in L^p(\mu)$; además, $0 \leq (f - f_n)^p \leq f^p$, donde la función mayorante es integrable. Puesto que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (Ejercicio 7 del Tema 2), aplicando el teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.13 del Tema 2) se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n - f)^p \, d\mu = 0.$$ □

32. Demostrar que si $1 \leq p < \infty$, el conjunto de las funciones medibles acotadas es denso en $L^p(\mu)$.

   Resolución. Dados $f \in L^p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$, se ha de encontrar una función acotada $g \in L^p(\mu)$, tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. La desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22) permite considerar f^+ y f^- por separado. Suponiendo, pues, que $f \geq 0$, el Ejercicio 31 garantiza la aproximación requerida. □

33. Sea $f \in L^p(a,b)$, con $1 \leq p < \infty$ y a, b finitos, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que existen:

   a) Una función escalonada h tal que $\displaystyle\int_a^b |f - h|^p \, dx < \varepsilon$.

   b) Una función continua g, de soporte compacto, tal que $\displaystyle\int_a^b |f - g|^p \, dx < \varepsilon$.

   Resolución. En vista del Ejercicio 32 se puede suponer que f es medible y acotada, lo que permite imitar la prueba del Teorema 1.61 del Tema 2 con las modificaciones oportunas. Concretamente, aplicando la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22) encontramos que, si $f = g + h$,

$$\int_a^b |g - g_1|^p \, dx < \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_a^b |h - h_1|^p \, dx < \varepsilon$$

   implica

$$\int_a^b |f - (g_1 + h_1)|^p \, dx < 2^p \varepsilon.$$ □

34. Demostrar que cada una de las siguientes clases de funciones: funciones simples medibles; funciones escalonadas; y funciones continuas, son densas en el espacio métrico $L^p(a,b)$ $(1 \leq p < \infty)$, donde a y b son finitos.

   Resolución. Queremos probar que si $f \in L^p(a,b)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ en cada una de las clases consideradas tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Por la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22), no se pierde generalidad suponiendo $f \geq 0$. En tal caso, para funciones simples el resultado se sigue del teorema de aproximación de Lebesgue (Teorema 2.6 del

Tema 2) y del teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.13 del Tema 2). Para funciones escalonadas y funciones continuas, fue establecido en el Ejercicio 33. □

35. Probar que los resultados del Ejercicio 34 valen para $L^p(-\infty,\infty)$ $(1 \le p < \infty)$.

Resolución. Sea $f_n = f\chi_{(-n,n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Como

$$|f - f_n|^p = \left|f[1-\chi_{(-n,n)}]\right|^p \le |f|^p \quad (n \in \mathbb{N}),$$

el teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.13 del Tema 2) proporciona $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. El Ejercicio 34 y la desigualdad de Minkowski completan la resolución. □

36. Sean $1 < p,q < \infty$ exponentes conjugados, y sean $f \in L^p(-\infty,\infty)$, $g \in L^q(-\infty,\infty)$. Demostrar que

$$F(t) = \int f(x+t)\, g(x)\, dx$$

es una función continua de t.

Resolución. Se tiene que

$$|F(t+h) - F(t)| \le \left\{\int |f(x+t+h) - f(x+t)|^p\, dx\right\}^{1/p} \left\{\int |g|^q\, dx\right\}^{1/q}.$$

Por tanto, basta probar que $\int |f(x+t+h) - f(x+t)|^p\, dx$ tiende a cero con h, y a tal fin, en virtud de la invariancia por traslaciones de la integral (Ejercicio 42 del Tema 2), sólo necesitamos demostrar lo propio para $\int |f(x+h) - f(x)|^p\, dx$. Dado $\varepsilon > 0$, el Ejercicio 34 proporciona una función continua k, de soporte compacto, tal que $\|f - k\|_p < \varepsilon$. Por tanto, si $f_h(x) = f(x+h)$, $k_h(x) = k(x+h)$ tenemos, de nuevo por el Ejercicio 42 del Tema 2, que

$$\|f - f_h\|_p \le \|f - k\|_p + \|k - k_h\|_p + \|k_h - f_h\|_p \le \|k - k_h\|_p + 2\varepsilon.$$

Como k, k_h tienen soporte compacto y k es uniformemente continua, $\|k - k_h\|_p < \varepsilon$ para todo h suficientemente pequeño, lo que resuelve el ejercicio. □

37. Sean $1 \le p,q \le \infty$ exponentes conjugados. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, y que $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_q = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \|f_n g_n - fg\|_1 = 0$.

Resolución. Por las desigualdades de Minkowski (Teorema 2.22) y Hölder (Teoremas 2.20 y 2.24),

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \le \|fg - fg_n\|_1 + \|fg_n - f_n g_n\|_1 \le \|f\|_p\, \|g - g_n\|_q + \|f - f_n\|_p\, \|g_n\|_q \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{7}$$

Pero, de nuevo por la desigualdad de Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26),

$$\left|\, \|g_n\|_q - \|g\|_q \right| \le \|g_n - g\|_q \quad (n \in \mathbb{N}),$$

así que, para n grande, $\|g_n\|_q \le \|g\|_q + 1$. Teniendo en cuenta esta acotación en (7) y tomando límites cuando $n \to \infty$, se concluye el resultado. □

38. Dadas $f, f_n \in L^2(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$, se dice que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *converge débilmente* a f si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n - f)\, g\, d\mu = 0$$

para toda $g \in L^2(\mu)$. Demostrar que:

a) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en L^2, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f, pero no a la inversa.

b) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f, entonces $\|f\|_2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2$.

c) Si $X = [a,b]$, con a y b finitos, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f si, y sólo si,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n \, dt = \int_a^x f \, dt \quad (x \in [a,b]) \qquad \text{y} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty.$$

d) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f y si $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \alpha \leq \|f\|_2$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en $L^2(\mu)$.

Resolución.

a) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20), se verifica que

$$\left| \int (f_n - f) \, g \, d\mu \right| \leq \|f_n - f\|_2 \, \|g\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Como contraejemplo, tómese $X = (-\pi, \pi)$, $f_n(x) = \operatorname{sen} nx$ $(n \in \mathbb{N})$, de modo que

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \pi \quad (n \in \mathbb{N}),$$

aunque

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen}^2 nx - 2 \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx + \operatorname{sen}^2 mx) \, dx \\
&= 2\pi - 2\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx \\
&= 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx \\
&= 2\pi \quad (n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m),
\end{aligned}$$

impidiendo que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converja en $L^2(-\pi,\pi)$. Pero si $g \in L^2(-\pi,\pi)$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen} nx \, dx = 0$ en virtud de, por ejemplo, el lema de Riemann-Lebesgue (Ejercicio 48 del Tema 2).

b) Sea $C > \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} \|f_n\|_2$. Entonces $\inf_{n\geq k} \|f_n\|_2 < C$ $(k \in \mathbb{N})$. Por definición de ínfimo, dado $k = 1$ debe existir $n_1 \geq 1$ tal que $\|f_{n_1}\|_2 \leq C$. De nuevo por la definición de ínfimo, dado $k = n_1 + 1$ debe existir $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tal que $\|f_{n_2}\|_2 \leq C$. En general, elegido n_i tal que $\|f_{n_i}\|_2 \leq C$, debe existir $n_{i+1} \geq n_i + 1 > n_i$ tal que $\left\|f_{n_{i+1}}\right\|_2 \leq C$. Se obtiene así una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, con $\|f_{n_i}\|_2 \leq C$ $(i \in \mathbb{N})$. Como esta subsucesión continúa convergiendo débilmente a f, resulta que

$$C\|f\|_2 \geq \left| \int f_{n_i} f \, d\mu \right| \longrightarrow \|f\|_2^2 \quad \text{cuando } i \to \infty.$$

Suponiendo que $\|f\|_2 > 0$ (de lo contrario, no habría nada que probar), basta con dividir por $\|f\|_2$ para obtener $\|f\|_2 \leq C$, la estimación buscada.

c) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f, la sucesión está acotada y, para todo $x \in [a,b]$,

$$\int_a^b \chi_{[a,x]} f_n \, dt \longrightarrow \int_a^b \chi_{[a,x]} f \, dt \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Recíprocamente, si se verifica lo anterior entonces, para cualquier función escalonada g,

$$\int_a^b gf_n\,dx \longrightarrow \int_a^b gf\,dx \quad \text{cuando } n\to\infty,$$

de modo que, dado $\varepsilon>0$, para n grande se tiene

$$\left|\int_a^b (gf-gf_n)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Ahora, si $h\in L^2(a,b)$ existe, por el Ejercicio 34, una función escalonada g tal que $\|h-g\|_2<\varepsilon$, con

$$\left|\int_a^b (hf-hf_n)\,dx\right| \le \|hf-gf\|_1 + \left|\int_a^b (gf-gf_n)\,dx\right| + \|gf_n-hf_n\|_1\,.$$

Tomando $M=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_2$, sigue que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b (hf-hf_n)\,dx\right| &\le \|f\|_2\,\|h-g\|_2 + \left|\int_a^b (gf-gf_n)\,dx\right| + \|f_n\|_2\,\|g-h\|_2\\ &< \varepsilon\|f\|_2+\varepsilon+M\varepsilon\end{aligned}$$

para n grande, probando que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f.

d) Se tiene que

$$0\le \|f_n-f\|_2^2 = \int f^2\,d\mu + \int f_n^2\,d\mu - 2\int f_n f\,d\mu \longrightarrow \alpha^2 - \|f\|_2^2 \le 0.$$

Luego, $\alpha=\|f\|_2$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en $L^2(\mu)$. □

3.2 Relaciones de inclusión

39. Supongamos que $0<\mu(X)<\infty$ y que $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0$, con $1\le p<\infty$. Probar que $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{p'}=0$ para todo p' tal que $1\le p'<p$.

Resolución. Sean $p_1=p/p'>1$ y q_1 exponentes conjugados. Entonces,

$$\int |f_n-f|^{p'}\,d\mu \le \|\,(f_n-f)^{p'}\,\|_{p_1}\,\mu(X)^{1/q_1} = \|f_n-f\|_p^{p'}\,\mu(X)^{1/q_1}\longrightarrow 0$$

cuando $n\to\infty$, como se requería.

También bastaría con apelar a los Ejemplos 1.16 ó 3.8 y al Lema 3.3: como $\mu(X)<\infty$, se da la inclusión conjuntista $L^p(\mu)\subset L^{p'}(\mu)$ y, por lo tanto, la aplicación inclusión $\imath: L^p(\mu)\hookrightarrow L^{p'}(\mu)$ es continua. □

40. Demostrar que si $0<\mu(X)<\infty$, si $|f_n|\le K$ c.t.p. ($n\in\mathbb{N}$), y si $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0$ para algún p con $1\le p<\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{p''}=0$ para todo $1\le p''<\infty$.

Resolución. El teorema de Riesz-Fischer (Teorema 3.1) proporciona una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ que converge a f c.t.p.. Por tanto, $|f|\le K$ c.t.p. y $|f_n-f|\le 2K$ c.t.p., para todo $n\in\mathbb{N}$. Si $p''>p$ (en caso contrario, aplíquese el Ejercicio 39), entonces

$$\|f_n-f\|_{p''}^{p''} \le (2K)^{p''-p}\,\|f_n-f\|_p^p \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n\to\infty.$$ □

3.3 El rango $0 < p < 1$

41. Sean f, g funciones medibles no negativas. Probar que si $0 < k < 1$ ó $k < 0$, y si $k + m = km$, entonces

$$\int fg\,d\mu \geq \left\{\int f^k\,d\mu\right\}^{1/k} \left\{\int g^m\,d\mu\right\}^{1/m}.$$

Resolución. Cuando $0 < k < 1$ se tiene $m < 0$ y recíprocamente, así que basta considerar el caso en que $0 < k < 1$.

Si $\displaystyle\int g^m\,d\mu = 0$ entonces $g^m = 0$ c.t.p. y, como $m < 0$, necesariamente $g = \infty$ c.t.p., es decir, $A = \{x : g(x) < \infty\}$ tiene medida nula. Excluyendo el caso trivial en que $\mu(X) = 0$, encontramos que $A^c = \{x : g(x) = \infty\}$ tiene medida positiva. Además, al ser $m < 0$ se tiene que $\displaystyle\left\{\int g^m\,d\mu\right\}^{1/m} = \infty$. Por consiguiente:

$$\int fg\,d\mu = \int_{A^c} fg\,d\mu = \infty \int_{A^c} f\,d\mu = \infty \int f\,d\mu.$$

Si $\displaystyle\int f\,d\mu = 0$ entonces $f = 0$ c.t.p., así que $\displaystyle\left\{\int f^k\,d\mu\right\}^{1/k} = 0$. En este caso, los dos miembros de la desigualdad son nulos, y el resultado se verifica trivialmente. Si $\displaystyle\int f\,d\mu > 0$, tanto el primer miembro como el segundo son infinitos (nótese que $\displaystyle\left\{\int f^k\,d\mu\right\}^{1/k} = 0$ implicaría $f = 0$ c.t.p., de modo que $\displaystyle\int f\,d\mu = 0$) y, de nuevo, se da la igualdad.

Consecuentemente, supondremos que $\displaystyle\int g^m\,d\mu > 0$ y también que $\displaystyle\int g^m\,d\mu < \infty$, pues de lo contrario el segundo miembro es nulo y no hay nada que demostrar.

Escribiendo $p = k^{-1}$, las ecuaciones $f = (uv)^p$, $g = v^{-p}$ definen funciones medibles $u = (fg)^{1/p}$, $v = g^{-1/p}$, no negativas c.t.p. y, por la desigualdad de Hölder generalizada (Ejercicio 13),

$$\int uv\,d\mu \leq \left\{\int u^p\,d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int v^q\,d\mu\right\}^{1/q},$$

donde $q = (1-k)^{-1}$ es el exponente conjugado de p. Teniendo en cuenta que $-q/p = k/(k-1) = m$, obtenemos

$$\int f^k\,d\mu \leq \left\{\int fg\,d\mu\right\}^{k} \left\{\int g^m\,d\mu\right\}^{1-k}.$$

Como $\displaystyle 0 < \int g^m\,d\mu < \infty$, basta dividir ambos miembros de la desigualdad precedente por el segundo factor del segundo miembro y tomar raíces k-ésimas para alcanzar la conclusión deseada.

Compárese con la Proposición 3.11. □

42. Sean $0 < k < 1$ y f, g funciones medibles no negativas. Demostrar que

$$\left\{\int (f+g)^k\,d\mu\right\}^{1/k} \geq \left\{\int f^k\,d\mu\right\}^{1/k} + \left\{\int g^k\,d\mu\right\}^{1/k}.$$

Resolución. Sea m tal que $k + m = km$. Asumimos que $\displaystyle 0 < \int (f+g)^k\,d\mu < \infty$, pues de lo contrario no hay nada que probar. Por el Ejercicio 41, tenemos:

$$\begin{aligned}\int (f+g)^k\,d\mu &= \int f(f+g)^{k-1}\,d\mu + \int g(f+g)^{k-1}\,d\mu \\ &\geq \left\{\int f^k\,d\mu\right\}^{1/k} \left\{\int (f+g)^{(k-1)m}\,d\mu\right\}^{1/m} + \left\{\int g^k\,d\mu\right\}^{1/k} \left\{\int (f+g)^{(k-1)m}\,d\mu\right\}^{1/m}\end{aligned}$$

$$= \left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int (f+g)^k \, d\mu \right\}^{1/m} + \left\{ \int g^k \, d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int (f+g)^k \, d\mu \right\}^{1/m}.$$

Ahora basta con dividir ambos miembros por $\left\{ \int (f+g)^k \, d\mu \right\}^{1/m}$, que suponemos positiva y finita, para conseguir el resultado.

Compárese con la Proposición 3.11. □