

Tema 3: Espacios L^p

Problemas resueltos

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

Índice

1	Espacios normados, espacios de Banach y espacios L^p	1
1.1	Espacios normados y de Banach	1
1.2	Espacios L^p : definición y primeras propiedades	2
2	Desigualdades	4
2.1	Funciones convexas	4
2.2	Desigualdades de Jensen y Young	5
2.3	Desigualdades de Hölder y Minkowski	6
3	Otras propiedades de los espacios L^p	14
3.1	Complejidad	14
3.2	Relaciones de inclusión	17
3.3	El rango $0 < p < 1$	18



1 Espacios normados, espacios de Banach y espacios L^p

1.1 Espacios normados y de Banach

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Demostrar la equivalencia de los siguientes asertos:

a) X es un espacio de Banach.

b) Toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente en X : si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X .

Resolución. a) $\Rightarrow$ b) Sea $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ ($n \in \mathbb{N}$) la n -ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq N$ implica

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Esto significa que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X , y al ser X completo, converge.

b) $\Rightarrow$ a) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X . Construimos una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de esta sucesión haciendo $x_{n_0} = 0$ y eligiendo

$$n_1 \in \mathbb{N} : \quad \|x_{n_1} - x_m\| < \frac{1}{2} \quad (m > n_1)$$

$$n_2 > n_1 : \quad \|x_{n_2} - x_m\| < \frac{1}{2^2} \quad (m > n_2)$$

$\vdots$

$$n_k > n_{k-1} : \quad \|x_{n_k} - x_m\| < \frac{1}{2^k} \quad (m > n_k).$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Como, por hipótesis, $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})$ es convergente, sigue que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m}.$$

Si una sucesión de Cauchy admite una subsucesión convergente, la propia sucesión converge. Por tanto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, y X es completo. $\square$

2. Probar, mediante un contraejemplo, que el recíproco del enunciado del Ejercicio 1 b) es falso, es decir, que no toda serie convergente en un espacio de Banach converge absolutamente.

Resolución. Recordemos que en el espacio de Banach más simple, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

(cuya suma se obtiene evaluando en $x = 1$ el desarrollo de Maclaurin de la función $y = \ln(x+1)$) no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \quad \square$$

1.2 Espacios L^p : definición y primeras propiedades

3. Demostrar que si $f, g \in L^1(\mu)$, entonces $|f^2 + g^2|^{1/2} \in L^1(\mu)$.

Resolución. Se tiene que $|f^2 + g^2|^{1/2} \leq |f| + |g|$, donde la función mayorante es integrable. $\square$

4. Probar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces:

- a) $x^{-1/p} \in L^{p-\sigma}(0, a)$ si $0 < \sigma < p$, pero no si $\sigma = 0$.
 b) $x^{-1/p}(\ln 1/x)^{-2/p} \in L^{p+\sigma}(0, a)$ si $\sigma = 0$, pero no si $\sigma > 0$.

Resolución.

- a) Esto es inmediato: si $0 < \sigma < p$,

$$\int_0^a \frac{1}{x^{(p-\sigma)/p}} dx = \int_0^a \frac{1}{x^{1-\sigma/p}} dx = \frac{px^{\sigma/p}}{\sigma} \Big|_0^a = \frac{pa^{\sigma/p}}{\sigma};$$

si $\sigma = 0$,

$$\int_0^a \frac{1}{x^{(1/p)p}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x \Big|_{1/n}^a = \infty.$$

- b) Si $\sigma = 0$, integramos sobre (n^{-1}, a) para obtener $(\ln a^{-1})^{-1} - (\ln n)^{-1}$, con límite finito cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{1/n}^a \frac{1}{x^{(1/p)p}(\ln 1/x)^{(2/p)p}} dx &= \int_{1/n}^a \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{-\ln n}^{\ln a} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_{-\ln n}^{\ln a} \\ &= -\frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln n} \rightarrow -\frac{1}{\ln a} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Si $\sigma > 0$, que la integral es infinita se sigue del hecho de que $\alpha > 0$ implica $x^\alpha \ln x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{x^{(1/p)(p+\sigma)}(\ln 1/x)^{(2/p)(p+\sigma)}} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{1+\sigma/p}(\ln x)^{2(1+\sigma/p)}} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{r-1}(\ln x)^{2r}} = \frac{1}{(x^{\frac{r-1}{2r}} \ln x)^{2r}} \rightarrow \infty$$

cuando $x \rightarrow 0$, donde $r = 1 + \sigma/p > 1$ (cf. Ejemplo 3.10). $\square$

5. Demostrar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces $\ln x^{-1} \in L^p(0, a)$.

Resolución. Aplicaremos el criterio de comparación cerca del origen. Se tiene que

$$\frac{(\ln x^{-1})^p}{x^{-1/2}} = \frac{(-1)^p (\ln x)^p}{x^{-1/2}} = (-1)^p \left(x^{\frac{1}{2p}} \ln x \right)^p \rightarrow 0$$

cuando $x \rightarrow 0$. Por tanto, para x pequeño, $(\ln x^{-1})^p \leq x^{-1/2}$, donde la función mayorante es integrable en $(0, a)$. $\square$

6. Probar que si $0 < a < \infty$, entonces $e^{1/x} \notin L^p(0, a)$ para ningún p , $0 < p \leq \infty$.

Resolución. Si $\alpha > 0$, entonces $t^\alpha e^{1/t} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$. Por tanto, para x pequeño, $(e^{1/x})^p > x^{-1}$:

$$\frac{(e^{1/x})^p}{x^{-1}} = x(e^{1/x})^p = (x^{1/p} e^{1/x})^p \rightarrow \infty$$

cuando $x \rightarrow 0$. Por otra parte, es claro que $e^{1/x}$ no está acotada en $(0, a)$ y, siendo continua, tampoco está esencialmente acotada. $\square$

7. Demostrar que $x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^p(0, \infty)$ si $p = 2$, pero no si $p \neq 2$.

Resolución. Este ejercicio se reduce al Ejemplo 3.10.

- Si $p = 2$, integramos explícitamente sobre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ para obtener una integral finita.
- Si $p > 2$, $\int_0^1 x^{-p/2}(1 - \ln x)^{-p} dx$ es infinita, como en el Ejercicio 4 b).
- Si $p < 2$, $\int_1^\infty x^{-p/2}(1 + \ln x)^{-p} dx$ es, de nuevo, infinita, por comparación con $\int_1^\infty x^{-1} dx$.

Desarrollemos la resolución con más detalle.

a) Para $p = 2$ tenemos (cambio de variable $\ln x = t$, con $dt = dx/x$ y t entre $-\infty$ y 0):

$$\int_0^1 \frac{1}{x(1 - \ln x)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1 - t)^2} dt = \frac{1}{1 - t} \Big|_{-\infty}^0 = 1,$$

y también (cambio de variable $\ln x = t$, con $dt = dx/x$ y t entre 0 e ∞):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1 + \ln x)^2} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + t)^2} dt = -\frac{1}{1 + t} \Big|_0^\infty = 1.$$

Por tanto, la integral es finita y vale 2.

b) Si $p > 2$, comparamos con x^{-1} en $(0, 1)$: se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{p/2}(1 - \ln x)^p} : \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^{p/2-1}(1 - \ln x)^p} = \frac{1}{\left[x^{\frac{p-2}{2}}(1 - \ln x)\right]^p} \\ &= \frac{1}{\left(x^{\frac{p-2}{2}} - x^{\frac{p-2}{2}} \ln x\right)^p} = \frac{1}{(x^\alpha - x^\alpha \ln x)^p} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty, \end{aligned}$$

ya que $\alpha = \frac{p-2}{2} > 0$ y en tal caso, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ y $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. La integral es infinita.

c) Si $0 < p < 2$, comparamos con x^{-1} en $(1, \infty)$: se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{p/2}(1 + \ln x)^p} : \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^{p/2-1}(1 + \ln x)^p} = \frac{1}{\left[x^{\frac{p-2}{2}}(1 + \ln x)\right]^p} \\ &= \frac{1}{\left(x^{\frac{p-2}{2}} + x^{\frac{p-2}{2}} \ln x\right)^p} = \frac{1}{(x^\alpha + x^\alpha \ln x)^p} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned}$$

ya que $\alpha = \frac{p-2}{2} < 0$ y en tal caso, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ y $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. La integral es infinita.

Por último, nótese que $x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \notin L^\infty(0, \infty)$, porque esta función tiende a ∞ cuando $x \rightarrow 0$. □

8. Sea $f : X \rightarrow [0, \infty)$ una función medible, esencialmente acotada. Probar que si $0 < \mu(X) < \infty$ y se define

$$I_n = \left\{ \int f^n d\mu \right\}^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \text{ess sup } f$.

Resolución. Sea $M = \text{ess sup } f$, de modo que $f \leq M$ c.t.p.. Se quiere ver que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|I_n - M| < 2\varepsilon$.

Por una parte, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X)^{1/n} = 1$, dado $0 < \varepsilon < M/2$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_n \leq M \mu(X)^{1/n} < M \left(1 + \frac{2\varepsilon}{M}\right) = M + 2\varepsilon \quad (n \geq n_1). \quad (1)$$

Por otra parte, pongamos

$$X(\varepsilon) = \{x : f(x) > M - \varepsilon\}.$$

Se tiene que

$$\int f^n d\mu \geq \int_{X(\varepsilon)} f^n d\mu \geq (M - \varepsilon)^n \mu(X(\varepsilon)).$$

Puesto que $\mu(X(\varepsilon)) > 0$ (de lo contrario, $M - \varepsilon$ sería una cota esencial de f menor que M), existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2$ implica $\mu(X(\varepsilon))^{1/n} \geq 1 - \varepsilon(M - \varepsilon)^{-1}$. Así,

$$I_n \geq (M - \varepsilon) \mu(X(\varepsilon))^{1/n} \geq (M - \varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon}{M - \varepsilon}\right) = M - 2\varepsilon \quad (n \geq n_2). \quad (2)$$

Sin más que tomar $N \geq \max\{n_1, n_2\}$, la combinación de (1) y (2) proporciona el resultado que se busca. $\square$

2 Desigualdades

2.1 Funciones convexas

9. Demostrar que toda función convexa admite derivadas laterales, luego es continua, en todo punto interior de su intervalo de definición. Más precisamente, sean $I = (a, b)$ un intervalo abierto, $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, y $c \in I$. Entonces:

a) ψ es derivable por la izquierda y por la derecha en c . De hecho, en la notación del Corolario 2.5,

$$\psi'_-(c) = \sup \{\psi_c(x) : x \in I, x < c\}, \quad \psi'_+(c) = \inf \{\psi_c(x) : x \in I, x > c\}.$$

b) ψ es continua en c .

Resolución.

a) Nos apoyaremos en el hecho de que la función ψ_c es creciente (Corolario 2.5). Tomando $t \in I$ con $t > c$, para $x \in I$ con $x < c$ se tiene $\psi_c(x) \leq \psi_c(t)$, luego el conjunto $\{\psi_c(x) : x \in I, x < c\}$ es no vacío y acotado superiormente. Si S_c es su supremo, entonces $\psi'_-(c) = S_c$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo existirá $s \in I$, con $s < c$, tal que $\psi_c(s) > S_c - \varepsilon$. Tomando $\delta = c - s > 0$, para $s = c - \delta < x < c$ tendremos $S_c - \varepsilon < \psi_c(s) \leq \psi_c(x) \leq S_c$, de donde $|S_c - \psi_c(x)| = S_c - \psi_c(x) < \varepsilon$. Esto prueba que $\lim_{x \rightarrow c-} \psi_c(x) = S_c$, como se quería. El cálculo de la derivada por la derecha es análogo.

b) Supongamos que existe

$$\lim_{x \rightarrow c+} \frac{\psi(x) - \psi(c)}{x - c}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c+} \psi(x) &= \psi(c) + \lim_{x \rightarrow c+} [\psi(x) - \psi(c)] \\ &= \psi(c) + \lim_{x \rightarrow c+} \left[(x - c) \frac{\psi(x) - \psi(c)}{x - c} \right] \\ &= \psi(c) + \lim_{x \rightarrow c+} (x - c) \lim_{x \rightarrow c+} \frac{\psi(x) - \psi(c)}{x - c} \end{aligned}$$

$$= \psi(c).$$

Análogamente, si existe

$$\lim_{x \rightarrow c-} \frac{\psi(x) - \psi(c)}{x - c},$$

también existe $\lim_{x \rightarrow c-} \psi(x) = \psi(c)$. Como ψ es continua por la derecha y por la izquierda de c , es continua en c .

Compárese con los Teoremas 2.7 y 2.9. □

2.2 Desigualdades de Jensen y Young

10. Sean $z_i > 0$, $\alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Probar que

$$\prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i,$$

y que se da la igualdad si, y sólo si, $z_1 = \dots = z_n$.

Resolución. En la desigualdad de Jensen discreta (Ejemplo 2.15), tomamos $x_i = \ln z_i$ ($i = 1, \dots, n$) y $\psi(x) = e^x$ para obtener

$$\prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln z_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i,$$

con igualdad si, y sólo si, todos los z_i ($i = 1, \dots, n$) son iguales entre sí. □

11. (*Desigualdad entre la media aritmética y la geométrica*) Demostrar que si $\xi_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), entonces

$$\left(\prod_{i=1}^n \xi_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

con igualdad si, y sólo si, todos los ξ_i ($i = 1, \dots, n$) tienen el mismo valor.

Resolución. Este es un caso particular del Ejercicio 10, para $z_i = \xi_i$ y $\alpha_i = 1/n$ ($i = 1, \dots, n$). □

12. Supóngase que ψ es una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $\psi \circ f$ es integrable sobre $[0, 1]$ y

$$\psi\left(\int_0^1 f dx\right) \leq \int_0^1 \psi \circ f dx$$

para toda función medible acotada f . Probar que ψ es convexa.

Resolución. Si ψ no es convexa, existen a, b, λ, μ tales que $a < b$, $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, y $\psi(\lambda a + \mu b) > \lambda \psi(a) + \mu \psi(b)$.

Sea l cualquier número tal que $0 < l < \lambda$, sea $m = 1 - l/\lambda = (\lambda - l)/\lambda$, y sea $n = l(1/\lambda - 1) = l\mu/\lambda$. Entonces, $l, m, n > 0$ y $l + m + n = 1$. Definimos una función medible acotada f sobre $[0, 1]$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [0, l) \\ \lambda a + \mu b, & x \in [l, l+m) \\ b, & x \in [l+m, 1]. \end{cases}$$

Se tiene

$$\int_0^1 f dx = la + (\lambda a + \mu b)m + nb = (l + \lambda m)a + (n + \mu m)b = \lambda a + \mu b,$$

pero

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi \circ f \, dx &= l\psi(a) + m\psi(\lambda a + \mu b) + n\psi(b) \\ &= \psi(\lambda a + \mu b) - \frac{l}{\lambda} [\psi(\lambda a + \mu b) - \lambda\psi(a) - \mu\psi(b)] \\ &< \psi(\lambda a + \mu b).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \psi \circ f \, dx < \psi\left(\int_0^1 f \, dx\right),$$

una contradicción. □

2.3 Desigualdades de Hölder y Minkowski

13. Justificar la siguiente generalización de las desigualdades de Hölder (Teorema 2.20) y Minkowski (Teorema 2.22): Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funciones medibles, $1 < p < \infty$ y $p + q = pq$. Entonces:

a) Desigualdad de Hölder:

$$\int fg \, d\mu \leq \left\{ \int f^p \, d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int g^q \, d\mu \right\}^{1/q}.$$

b) Desigualdad de Minkowski:

$$\left\{ \int (f+g)^p \, d\mu \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int f^p \, d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int g^p \, d\mu \right\}^{1/p}.$$

Resolución.

a) Llamamos

$$A = \left\{ \int f^p \, d\mu \right\}^{1/p}, \quad B = \left\{ \int g^q \, d\mu \right\}^{1/q}.$$

Los casos en que $A = 0$ ó $B = 0$, o bien $0 < A, B < \infty$, fueron discutidos en el Teorema 2.20. Si $0 < A \leq \infty$ y $B = \infty$, o bien $A = \infty$ y $0 < B \leq \infty$, el segundo miembro es infinito, y la desigualdad se verifica trivialmente.

b) Llamamos ahora

$$C = \left\{ \int (f+g)^p \, d\mu \right\}^{1/p}.$$

Los casos $C = 0$ ó $0 < C < \infty$ ya fueron contemplados en el Teorema 2.22. Supongamos que $C = \infty$, de modo que $f+g \notin L^p(\mu)$. Como, por el Teorema 1.12, $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial, si la suma de dos funciones no está en $L^p(\mu)$, al menos una de ellas tampoco pertenecerá a este espacio; luego, el segundo miembro es infinito y se da la igualdad. □

14. Enunciar y demostrar análogas discretas de las desigualdades de Hölder (Teoremas 2.20 y 2.24) y Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26), similares a la proporcionada en el Ejemplo 2.15 para la desigualdad de Jensen.

Resolución. Sean $a_i, b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Se verifica:

a) (Hölder) Si $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^q \right\}^{1/q}.$$

b) (Hölder)

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} b_i \sum_{i=1}^n a_i.$$

c) (Minkowski) Si $1 \leq p < \infty$,

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^p \right\}^{1/p}.$$

d) (Minkowski)

$$\max_{1 \leq i \leq n} (a_i + b_i) \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i + \max_{1 \leq i \leq n} b_i.$$

Para establecer, por ejemplo, a), se toma $X = \{1, \dots, n\}$, $a(i) = a_i$, $\mu(\{i\}) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), de modo que $\int a d\mu = \sum_{i=1}^n a_i$, y se aplica la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20).

Alternativamente, basta con particularizar sucesiones eventualmente nulas en las desigualdades discretas obtenidas en el Ejemplo 3.7. $\square$

15. Probar que

$$\int_0^\pi x^{-1/4} \sin x \, dx \leq \pi^{3/4}.$$

Resolución. Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^{-1/4} \sin x \, dx &\leq \left\{ \int_0^\pi x^{-1/2} \, dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ 2\sqrt{x} \Big|_0^\pi \right\}^{1/2} \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}^{1/2} = \pi^{1/4} \pi^{1/2} = \pi^{3/4}. \end{aligned}$$

$\square$

16. Demostrar que las siguientes desigualdades son inconsistentes para funciones $f \in L^2(0, \pi)$:

$$\int_0^\pi [f(x) - \sin x]^2 \, dx \leq \frac{4}{9}, \quad \int_0^\pi [f(x) - \cos x]^2 \, dx \leq \frac{1}{9}.$$

Resolución. Las funciones $\sin x$ y $\cos x$ están en $L^2(0, \pi)$:

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Conjuntamente con la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22) para $p = 2$, las desigualdades del enunciado implican

$$\|\sin x - \cos x\|_2 = \|(f - \sin x) - (f - \cos x)\|_2 \leq \|f - \sin x\|_2 + \|f - \cos x\|_2 \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Pero el primer término de esta desigualdad vale $\sqrt{\pi} > 1$:

$$\begin{aligned} \|\sin x - \cos x\|_2^2 &= \int_0^\pi (\sin x - \cos x)^2 \, dx \\ &= \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \int_0^\pi \sin 2x \, dx + \int_0^\pi \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^\pi \sin^2 x \, dx + \int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \pi. \end{aligned}$$

$\square$

17. Probar que si $f, g \in L^1(\mu)$, entonces:

$$a) \sqrt{|fg|} \in L^1(\mu).$$

b) $|f|^p |g|^q \in L^1(\mu)$ si $p, q \in (0, 1)$, $p + q = 1$.

Resolución. Tomando $p = q = 1/2$, el apartado a) es un caso particular de b). Para probar b), escribimos $|f|^p = F$, $|g|^q = G$, $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$. Entonces $\alpha, \beta \in (1, \infty)$ son exponentes conjugados, con $F \in L^\alpha(\mu)$ y $G \in L^\beta(\mu)$, así que, por la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20), $FG \in L^1(\mu)$. $\square$

18. Sean $f_n \in L^2(a, b)$ ($n \in \mathbb{N}$), $f \in L^2(a, b)$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

a) Demostrar que $\int_a^b f^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^2 dx$.

b) Probar que si a y b son finitos, entonces $\int_a^t f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t f_n dx$ ($a \leq t \leq b$).

c) Verificar los apartados a) y b) para $(a, b) = (-\pi, \pi)$, $f_n(x) = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sin rx$, y $f(x) = \frac{x}{2}$.

Resolución.

a) La desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22), con $p = 2$, proporciona $|\|f\|_2 - \|f_n\|_2| \leq \|f - f_n\|_2$ ($n \in \mathbb{N}$).

b) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20),

$$\left| \int_a^t f dx - \int_a^t f_n dx \right| = \left| \int_a^b \chi_{(a,t)}(f - f_n) dx \right| \leq \sqrt{t-a} \|f - f_n\|_2 \quad (a \leq t \leq b, n \in \mathbb{N}).$$

c) Para comprobar a), integramos explícitamente usando que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$; para verificar b), integramos usando la serie de Fourier estándar de $x \mapsto x^2$.

Procedemos con a):

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{6}, \\ \int_a^b f_n^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sin rx \right]^2 dx = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 rx dx = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2rx}{2} dx = \pi \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^3}{6} = \int_a^b f^2 dx.$$

En el desarrollo anterior hemos usado la relación

$$\left(\sum_{r=1}^n a_r \right)^2 = \sum_{r=1}^n a_r^2 + 2 \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^n a_r a_s$$

particularizada en

$$a_r = \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sin rx, \quad a_r a_s = \frac{(-1)^{r+s}}{rs} \sin rx \sin sx \quad (x \in [-\pi, \pi], r, s = 1, \dots, n),$$

con

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \sin sx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(r-s)x - \cos(r+s)x] dx = 0.$$

Procedemos con b). La serie de Fourier de una función g tiene la forma

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Determinemos la serie de la función $g(x) = x^2$. Como esta función es par, los coeficientes b_n ($n \in \mathbb{N}$) se anulan. Por su parte, los coeficientes a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) son

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx.$$

Luego,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

e, integrando por partes dos veces,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi} [x^2 \operatorname{sen} nx]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= \left[\frac{4x \cos nx}{n^2 \pi} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3 \pi} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{\pi} = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Además, $g(x) = x^2$ es el límite uniforme de su serie de Fourier, porque esta función admite derivadas de cualquier orden. Obtenemos así la representación

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Fijemos $a \leq t \leq b$; entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^t f \, dx &= \int_{-\pi}^t \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{-\pi}^t = \frac{t^2 - \pi^2}{4}, \\ \int_a^t f_n \, dx &= \int_{-\pi}^t \left[\sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r} \operatorname{sen} rx \right] dx = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r} \int_{-\pi}^t \operatorname{sen} rx \, dx \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^r}{r^2} \cos rx \Big|_{-\pi}^t = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^r}{r^2} (\cos rt - \cos r\pi) \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^r}{r^2} [\cos rt - (-1)^r] = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^r}{r^2} \cos rt - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Atendiendo ahora al desarrollo en serie de Fourier de t^2 , encontramos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t f \, dx = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^2} \cos rt - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} \left(t^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{\pi^2}{6} = \frac{t^2 - \pi^2}{4},$$

con lo cual queda verificado b). □

19. Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

Resolución. Por la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22), $\|f_n\|_p - \|f\|_p \leq \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. $\square$

20. Sea $f \geq 0$, $f \in L^1(x, 1)$ para cada $x \in (0, 1]$. Supóngase que $t^{p-1}f^p(t) \in L^1(0, 1)$, donde $1 < p < \infty$. Probar que $F(x) = \int_x^1 f dt$ satisface $F(x) = o(\ln 1/x)^{1-1/p}$ cuando $x \rightarrow 0+$.

Resolución. El Ejemplo 1.52 del Tema 2 proporciona una función $\varphi \geq 1$, medible en $[0, 1]$, tal que $\varphi(t)t^{p-1}f^p(t) \in L^1[0, 1]$ y $\varphi(0+) = \infty$. Si q es el exponente conjugado de p , la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) permite escribir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^1 f dt = \int_x^1 \frac{1}{\varphi^{1/p}(t)t^{(p-1)/p}} \varphi^{1/p}(t)t^{(p-1)/p}f(t) dt \\ &\leq \left\{ \int_x^1 t^{p-1}\varphi(t)f^p(t) dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_x^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t) dt \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Luego,

$$F(x) \leq M \left\{ \int_x^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t) dt \right\}^{1/q},$$

donde M es una constante. Dado $\varepsilon > 0$, existe x_0 tal que $\varphi^{-q/p}(x) < \varepsilon$ si $0 < x < x_0$, y entonces, para x pequeño ($\ln 1/x > (1/\varepsilon - 1)\ln 1/x_0$, o bien $0 < x < x_0^{1/\varepsilon-1}$),

$$\begin{aligned} \int_x^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t) dt &= \int_x^{x_0} t^{-1}\varphi^{-q/p}(t) dt + \int_{x_0}^1 t^{-1}\varphi^{-q/p}(t) dt \\ &\leq \varepsilon (\ln 1/x - \ln 1/x_0) + \ln 1/x_0 = (1 - \varepsilon) \ln 1/x_0 + \varepsilon \ln 1/x \\ &\leq 2\varepsilon \ln 1/x. \end{aligned}$$

Combinando esta estimación con la precedente, queda resuelto el ejercicio. $\square$

21. Sean $1 < p < \infty$, $f \geq 0$, $f \in L^p(0, \infty)$, y $F(x) = \int_0^x f dx$. Demostrar que si p y q son exponentes conjugados, entonces $F(x) = o(x^{1/q})$ cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$.

Resolución.

- Para $x \rightarrow 0$, la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) proporciona $F(x) \leq x^{1/q} \left\{ \int_0^x f^p dt \right\}^{1/p}$, donde, por el Teorema 2.8 del Tema 2, $\int_0^x f^p dt \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$.

- Para $x \rightarrow \infty$: dado $\varepsilon > 0$, existe y tal que $\int_y^\infty f^p dt < \varepsilon^p$ (Teorema 2.5 del Tema 2, convergencia monótona); sea, pues, $x > y$. Entonces,

$$F(x) - F(y) \leq \left\{ \int_y^x f^p dt \right\}^{1/p} (x - y)^{1/q} \leq \varepsilon x^{1/q},$$

o bien $F(x) \leq F(y) + \varepsilon x^{1/q}$. Por otra parte, es claro que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/q} F(x) = 0$. Consecuentemente, para x grande, $F(x) < 2\varepsilon x^{1/q}$. $\square$

22. Extender la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) a n funciones. Más precisamente, probar que si $1 < k_1, k_2, \dots, k_n < \infty$, con $\sum_{i=1}^n 1/k_i = 1$, y si $f_i \in L^{k_i}(\mu)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), entonces

$$\int |f_1 f_2 \cdots f_n| d\mu \leq \left\{ \int |f_1|^{k_1} d\mu \right\}^{1/k_1} \cdots \left\{ \int |f_n|^{k_n} d\mu \right\}^{1/k_n}. \quad (3)$$

Resolución. Para $n = 2$, obtenemos la desigualdad de Hölder. Procediendo por inducción, supongamos que el resultado se verifica para $n - 1$, $n \geq 3$, y sea $\alpha = (1 - k_n^{-1})^{-1}$. Como $1 < \alpha, k_n < \infty$ son exponentes conjugados, la desigualdad de Hölder conduce a

$$\int |f_1 \cdots f_n| d\mu \leq \left\{ \int |f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha d\mu \right\}^{1/\alpha} \left\{ \int |f_n|^{k_n} d\mu \right\}^{1/k_n}. \quad (4)$$

Pero, para cada $i = 1, 2, \dots, n - 1$, se cumple que $1 < k_i \alpha^{-1} < \infty$ (porque $k_i^{-1} + k_n^{-1} < 1$ implica $k_i > (1 - k_n^{-1})^{-1} = \alpha$), y además $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha k_i^{-1} = 1$, así que, por hipótesis inductivas,

$$\int |f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha d\mu \leq \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \int |f_i|^{k_i} d\mu \right\}^{\alpha/k_i}. \quad (5)$$

La inserción de (5) en (4) establece (3) y completa la inducción. $\square$

23. Extender el Ejemplo 2.21 a n funciones. Más precisamente, demostrar que se da la igualdad en la desigualdad del Ejercicio 22 si, y sólo si, alguna de las f_i ($i = 1, \dots, n$) es nula c.t.p., o para cada par $i, j = 1, \dots, n$, existen constantes no nulas c_i, c_j tales que

$$c_i |f_i|^{k_i} = c_j |f_j|^{k_j}. \quad (6)$$

Resolución. Si $f_i = 0$ c.t.p. para algún $i = 1, \dots, n$, o se cumple (6), la igualdad es trivial. En este último caso podríamos escribir, por ejemplo,

$$|f_i| = r_i^{k_i^{-1}} |f_1|^{k_1 k_i^{-1}}$$

para ciertas constantes $r_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), con lo que el primer y el segundo miembro de (3) adoptarían, respectivamente, la forma

$$\begin{aligned} \int |f_1 \cdots f_n| d\mu &= \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \int |f_1|^{k_1 \sum_{i=1}^n k_i^{-1}} d\mu = \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \int |f_1|^{k_1} d\mu, \\ \left\{ \int |f_1|^{k_1} d\mu \right\}^{1/k_1} \cdots \left\{ \int |f_n|^{k_n} d\mu \right\}^{1/k_n} &= \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \left\{ \int |f_1|^{k_1} d\mu \right\}^{\sum_{i=1}^n k_i^{-1}} = \left(\prod_{i=1}^n r_i^{k_i^{-1}} \right) \int |f_1|^{k_1} d\mu. \end{aligned}$$

Recíprocamente, el caso $n = 2$ viene dado por el Ejemplo 2.21. Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$ funciones y consideremos el caso de n funciones, descartando que $f_i = 0$ c.t.p. para algún $i = 1, \dots, n$. Sin más que combinar la hipótesis de que (6) se verifica para $n - 1$ funciones con la condición a la que obliga la igualdad en (4), se prueba (6) en el caso de n funciones. En efecto, si se da la igualdad en (4), entonces

$$|f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha = r_\alpha |f_n|^{k_n},$$

mientras que, por hipótesis inductivas,

$$|f_i| = r_i |f_1|^{k_1 k_i^{-1}} \quad (i = 1, \dots, n - 1);$$

aquí, r_α y r_i ($i = 1, \dots, n - 1$) son constantes positivas apropiadas. Así pues,

$$r_\alpha |f_n|^{k_n} = |f_1|^\alpha \cdots |f_{n-1}|^\alpha = \left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i \right)^\alpha |f_1|^{\alpha k_1 \sum_{i=1}^{n-1} k_i^{-1}} = r |f_1|^{\alpha k_1 (1 - k_n^{-1})} = r |f_1|^{k_1},$$

donde $r = \left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i \right)^\alpha$. Se concluye que $|f_n| = r_n |f_1|^{k_1 k_n^{-1}}$ para cierta constante $r_n > 0$, completando la inducción. $\square$

24. Probar que si $\alpha, \beta, \gamma > 0$ y $0 < p < (\alpha + \beta + \gamma)^{-1}$, entonces

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^\alpha |x-1|^\beta |x-2|^\gamma)^p} < \infty.$$

Resolución. En el Ejercicio 22, tomamos $n = 3$, $f_1(x) = x^{-p\alpha}$, $f_2(x) = |x-1|^{-p\beta}$, $f_3(x) = |x-2|^{-p\gamma}$, $\delta = p(\alpha + \beta + \gamma) < 1$, $k_1 = \delta/(p\alpha)$, $k_2 = \delta/(p\beta)$, y $k_3 = \delta/(p\gamma)$ (nótese que $1 < k_1, k_2, k_3 < \infty$, con $\sum_{i=1}^3 1/k_i = 1$), para obtener el resultado:

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \frac{dx}{(x^\alpha |x-1|^\beta |x-2|^\gamma)^p} \\ & \leq \left\{ \int_0^2 x^{(-p\alpha)\delta/(p\alpha)} dx \right\}^{(p\alpha)/\delta} \left\{ \int_0^2 |x-1|^{(-p\beta)\delta/(p\beta)} dx \right\}^{(p\beta)/\delta} \left\{ \int_0^2 |x-2|^{(-p\gamma)\delta/(p\gamma)} dx \right\}^{(p\gamma)/\delta} \\ & = \left\{ \int_0^2 x^{-\delta} dx \right\}^{p\alpha/\delta} \left\{ \int_0^2 |x-1|^{-\delta} dx \right\}^{p\beta/\delta} \left\{ \int_0^2 |x-2|^{-\delta} dx \right\}^{p\gamma/\delta} < \infty, \end{aligned}$$

por cuanto $\delta < 1$. □

25. Extender la desigualdad de Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26) a n funciones.

Resolución. Sea $1 \leq p \leq \infty$, y sean $f_i \in L^p(\mu)$ ($i = 1, \dots, n$). Entonces,

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\|_p.$$

La demostración es inmediata, por inducción finita a partir del caso $n = 2$. □

26. Sea f una función medible no negativa esencialmente acotada, con $\text{ess sup } f = M > 0$. Si $0 < \mu(X) < \infty$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int f^{n+1} d\mu}{\int f^n d\mu} = M.$$

Resolución. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Reemplazando f por f/M , no se pierde generalidad al suponer que $\text{ess sup } f = 1$. En tal caso, $f^{n+1} \leq f^n$ c.t.p., de modo que el límite superior requerido no es mayor que 1. Pero $(n+1)/n$ y $n+1$ son exponentes conjugados, así que, por la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20),

$$\int f^n d\mu \leq \left\{ \int f^{n+1} d\mu \right\}^{\frac{n}{n+1}} \mu(X)^{\frac{1}{n+1}},$$

o bien

$$\left\{ \int f^n d\mu \right\}^{n+1} \leq \left\{ \int f^{n+1} d\mu \right\}^n \mu(X).$$

Luego,

$$\frac{\int f^n d\mu}{\mu(X)} \leq \frac{\left\{ \int f^{n+1} d\mu \right\}^n}{\left\{ \int f^n d\mu \right\}^n}.$$

Extráiganse raíces n -ésimas, hágase $n \rightarrow \infty$ y aplíquese el Ejercicio 8 para obtener que el límite inferior requerido no es menor que 1 y resolver el ejercicio. □

27. Probar que la sucesión de la que se toma límite en el Ejercicio 26 es creciente.

Resolución. Pongamos $I_n = \int f^n d\mu$ ($n \in \mathbb{N}$). Por la desigualdad de Schwarz, para $n \geq 2$,

$$I_n^2 = \left\{ \int f^{(n-1)/2} f^{(n+1)/2} d\mu \right\}^2 \leq I_{n-1} I_{n+1}. \quad \square$$

28. Demostrar que si $f \in L^{p_1}(\mu)$ y $g \in L^{p_2}(\mu)$, con $0 < p_1, p_2 < \infty$, entonces $fg \in L^p(\mu)$ para algún p .

Resolución. Escribimos $p'_1 = p_1 \lambda$, $p'_2 = p_2 \lambda$, donde $\lambda = 1/p_1 + 1/p_2$, de manera que $1 < p'_1, p'_2 < \infty$ son exponentes conjugados. Como $f \in L^{p_1}(\mu)$, se tiene que $f^{1/\lambda} \in L^{p'_1}(\mu)$ y, similarmente, $g^{1/\lambda} \in L^{p'_2}(\mu)$. El Teorema 2.20 (desigualdad de Hölder) asegura que $(fg)^{1/\lambda} \in L^1(\mu)$, así que el índice p buscado es

$$p = \frac{1}{\lambda} = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}. \quad \square$$

29. Encontrar el mínimo de

$$P_f = \left\{ \int_E f d\mu \right\} \left\{ \int_E \frac{1}{f} d\mu \right\}$$

tomado sobre el conjunto de las funciones f que son medibles y positivas c.t.p. en un conjunto medible E , de medida finita. ¿En qué funciones se alcanza este mínimo? Para un espacio de medida y conjunto E apropiados, probar que P_f no está acotado superiormente.

Resolución. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20) al producto de $\sqrt{f}$ y $1/\sqrt{f}$ encontramos que

$$\sqrt{P_f} \geq \int_E 1 d\mu = \mu(E),$$

lo que resuelve la primera parte del ejercicio: el mínimo es $\mu(E)^2$ (se alcanza en $f \equiv 1$). Por el Ejemplo 2.21, se da la igualdad cuando $sf + t/f = 0$ c.t.p. para ciertas constantes no nulas s y t , es decir, cuando f es constante c.t.p.. Respecto a la última parte, considerando $E = (a, b)$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue y tomando $f(x) = (x - a)^2$, resulta $P_f = \infty$. $\square$

30. Sean f y g funciones integrables esencialmente acotadas, y sean $0 < p = \text{ess inf } f \leq \text{ess sup } f = P$, $0 < q = \text{ess inf } g \leq \text{ess sup } g = Q$. Demostrar que

$$4 \int f^2 d\mu \int g^2 d\mu \leq \left\{ \sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}} \right\}^2 \left\{ \int fg d\mu \right\}^2.$$

Resolución. Se tiene que $pqg \leq qQf \leq PQg$ c.t.p., o bien

$$\frac{p}{Q}g \leq f \leq \frac{P}{q}g \quad \text{c.t.p..}$$

Escribamos

$$F_y = f^2 + yfg \left(\frac{\sqrt{PQ}}{\sqrt{pq}} + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{PQ}} \right) + y^2 g^2 = \left(f + yg \frac{\sqrt{PQ}}{\sqrt{pq}} \right) \left(f + yg \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{PQ}} \right).$$

Si $\alpha = \sqrt{Pp}/\sqrt{Qq}$, entonces

$$F_{-\alpha} = \left(f - \frac{P}{q}g \right) \left(f - \frac{p}{Q}g \right) \leq 0 \quad \text{c.t.p.,}$$

mientras que

$$F_{\alpha} = \left(f + \frac{P}{q}g \right) \left(f + \frac{p}{Q}g \right) > 0$$

en un conjunto de medida positiva (de lo contrario, $F_\alpha \leq 0$ c.t.p., obligando a que $f \leq 0$ c.t.p.; una contradicción, salvo en el caso trivial de que el espacio ambiente tenga medida nula). Luego, $\int F_y d\mu$ no es mayor que cero para $y = -\alpha$, y es positiva para $y = \alpha$. Como la función

$$\int F_y d\mu = \int f^2 d\mu + y \left(\frac{\sqrt{PQ}}{\sqrt{pq}} + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{PQ}} \right) \int fg d\mu + y^2 \int g^2 d\mu$$

es cuadrática en y , debe tener una raíz real (discriminante no negativo), lo que proporciona la estimación deseada. $\square$

3 Otras propiedades de los espacios L^p

3.1 Completitud

31. Sean $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mu)$, con $f \geq 0$. Probar que $f_n = \min\{f, n\} \in L^p(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$) y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Resolución. Fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq f_n^p \leq f^p$, así que $f_n \in L^p(\mu)$; además, $0 \leq (f - f_n)^p \leq f^p$, donde la función mayorante es integrable. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ (Ejercicio 7 del Tema 2), aplicando el teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.13 del Tema 2) se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f - f_n)^p d\mu = 0. \quad \square$$

32. Demostrar que si $1 \leq p < \infty$, el conjunto de las funciones medibles acotadas es denso en $L^p(\mu)$.

Resolución. Dados $f \in L^p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$, se ha de encontrar una función acotada $g \in L^p(\mu)$, tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. La desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22) permite considerar f^+ y f^- por separado. Suponiendo, pues, que $f \geq 0$, el Ejercicio 31 garantiza la aproximación requerida. $\square$

33. Sea $f \in L^p(a, b)$, con $1 \leq p < \infty$ y a, b finitos, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que existen:

- a) Una función escalonada h tal que $\int_a^b |f - h|^p dx < \varepsilon$.
b) Una función continua g , de soporte compacto, tal que $\int_a^b |f - g|^p dx < \varepsilon$.

Resolución. En vista del Ejercicio 32 se puede suponer que f es medible y acotada, lo que permite imitar la prueba del Teorema 1.65 del Tema 2 con las modificaciones oportunas. Concretamente, aplicando la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22) encontramos que, si $f = g + h$,

$$\int_a^b |g - g_1|^p dx < \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_a^b |h - h_1|^p dx < \varepsilon$$

implica

$$\int_a^b |f - (g_1 + h_1)|^p dx < 2^p \varepsilon. \quad \square$$

34. Demostrar que cada una de las siguientes clases de funciones: funciones simples medibles; funciones escalonadas; y funciones continuas, son densas en el espacio métrico $L^p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$), donde a y b son finitos.

Resolución. Queremos probar que si $f \in L^p(a, b)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ en cada una de las clases consideradas tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Por la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22), no se pierde generalidad suponiendo $f \geq 0$. En tal caso, para funciones simples el resultado se sigue del teorema de aproximación de Lebesgue (Teorema 2.6 del

Tema 2) y del teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.13 del Tema 2). Para funciones escalonadas y funciones continuas, fue establecido en el Ejercicio 33. $\square$

35. Probar que los resultados del Ejercicio 34 valen para $L^p(-\infty, \infty)$ ($1 \leq p < \infty$).

Resolución. Sea $f_n = f\chi_{(-n,n)}$ ($n \in \mathbb{N}$). Como

$$|f - f_n|^p = |f[1 - \chi_{(-n,n)}]|^p \leq |f|^p \quad (n \in \mathbb{N}),$$

el teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.13 del Tema 2) proporciona $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$. El Ejercicio 34 y la desigualdad de Minkowski completan la resolución. $\square$

36. Sean $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados, y sean $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $g \in L^q(-\infty, \infty)$. Demostrar que

$$F(t) = \int f(x+t)g(x)dx$$

es una función continua de t .

Resolución. Se tiene que

$$|F(t+h) - F(t)| \leq \left\{ \int |f(x+t+h) - f(x+t)|^p dx \right\}^{1/p} \left\{ \int |g|^q dx \right\}^{1/q}.$$

Por tanto, basta probar que $\int |f(x+t+h) - f(x+t)|^p dx$ tiende a cero con h , y a tal fin, en virtud de la invariancia por traslaciones de la integral (Ejercicio 42 del Tema 2), sólo necesitamos demostrar lo propio para $\int |f(x+h) - f(x)|^p dx$. Dado $\varepsilon > 0$, el Ejercicio 34 proporciona una función continua k , de soporte compacto, tal que $\|f - k\|_p < \varepsilon$. Por tanto, si $f_h(x) = f(x+h)$, $k_h(x) = k(x+h)$ tenemos, de nuevo por el Ejercicio 42 del Tema 2, que

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f - k\|_p + \|k - k_h\|_p + \|k_h - f_h\|_p \leq \|k - k_h\|_p + 2\varepsilon.$$

Como k, k_h tienen soporte compacto y k es uniformemente continua, $\|k - k_h\|_p < \varepsilon$ para todo h suficientemente pequeño, lo que resuelve el ejercicio. $\square$

37. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$, y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_q = 0$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n g_n - f g\|_1 = 0$.

Resolución. Por las desigualdades de Minkowski (Teorema 2.22) y Hölder (Teoremas 2.20 y 2.24),

$$\|f_n g_n - f g\|_1 \leq \|f g - f g_n\|_1 + \|f g_n - f_n g_n\|_1 \leq \|f\|_p \|g - g_n\|_q + \|f - f_n\|_p \|g_n\|_q \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (7)$$

Pero, de nuevo por la desigualdad de Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26),

$$|\|g_n\|_q - \|g\|_q| \leq \|g_n - g\|_q \quad (n \in \mathbb{N}),$$

así que, para n grande, $\|g_n\|_q \leq \|g\|_q + 1$. Teniendo en cuenta esta acotación en (7) y tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$, se concluye el resultado. $\square$

38. Dadas $f, f_n \in L^2(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$), se dice que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - f)g d\mu = 0$$

para toda $g \in L^2(\mu)$. Demostrar que:

- a) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en L^2 , entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f , pero no a la inversa.
- b) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f , entonces $\|f\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2$.
- c) Si $X = [a, b]$, con a y b finitos, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f si, y sólo si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n dt = \int_a^x f dt \quad (x \in [a, b]) \quad \text{y} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty.$$

- d) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \alpha \leq \|f\|_2$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en $L^2(\mu)$.

Resolución.

- a) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cf. Teorema 2.20), se verifica que

$$\left| \int (f_n - f) g d\mu \right| \leq \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Como contraejemplo, tómese $X = (-\pi, \pi)$, $f_n(x) = \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$), de modo que

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi \quad (n \in \mathbb{N}),$$

aunque

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 nx - 2 \sin nx \sin mx + \sin^2 mx) dx \\ &= 2\pi - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \\ &= 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx \\ &= 2\pi \quad (n, m \in \mathbb{N}, n \neq m), \end{aligned}$$

impidiendo que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converja en $L^2(-\pi, \pi)$. Pero si $g \in L^2(-\pi, \pi)$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx = 0$ en virtud de, por ejemplo, el lema de Riemann-Lebesgue (Ejercicio 48 del Tema 2).

- b) Sea $C > \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} \|f_n\|_2$. Entonces $\inf_{n \geq k} \|f_n\|_2 < C$ ($k \in \mathbb{N}$). Por definición de ínfimo, dado $k = 1$ debe existir $n_1 \geq 1$ tal que $\|f_{n_1}\|_2 \leq C$. De nuevo por la definición de ínfimo, dado $k = n_1 + 1$ debe existir $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tal que $\|f_{n_2}\|_2 \leq C$. En general, elegido n_i tal que $\|f_{n_i}\|_2 \leq C$, debe existir $n_{i+1} \geq n_i + 1 > n_i$ tal que $\|f_{n_{i+1}}\|_2 \leq C$. Se obtiene así una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, con $\|f_{n_i}\|_2 \leq C$ ($i \in \mathbb{N}$). Como esta subsucesión continúa convergiendo débilmente a f , resulta que

$$C \|f\|_2 \geq \left| \int f_{n_i} f d\mu \right| \rightarrow \|f\|_2^2 \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty.$$

Suponiendo que $\|f\|_2 > 0$ (de lo contrario, no habría nada que probar), basta con dividir por $\|f\|_2$ para obtener $\|f\|_2 \leq C$, la estimación buscada.

- c) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f , la sucesión está acotada y, para todo $x \in [a, b]$,

$$\int_a^b \chi_{[a,x]} f_n dt \rightarrow \int_a^b \chi_{[a,x]} f dt \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Recíprocamente, si se verifica lo anterior entonces, para cualquier función escalonada g ,

$$\int_a^b g f_n dx \longrightarrow \int_a^b g f dx \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

de modo que, dado $\varepsilon > 0$, para n grande se tiene

$$\left| \int_a^b (g f - g f_n) dx \right| < \varepsilon.$$

Ahora, si $h \in L^2(a, b)$ existe, por el Ejercicio 34, una función escalonada g tal que $\|h - g\|_2 < \varepsilon$, con

$$\left| \int_a^b (h f - h f_n) dx \right| \leq \|h f - g f\|_1 + \left| \int_a^b (g f - g f_n) dx \right| + \|g f_n - h f_n\|_1.$$

Tomando $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2$, sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (h f - h f_n) dx \right| &\leq \|f\|_2 \|h - g\|_2 + \left| \int_a^b (g f - g f_n) dx \right| + \|f_n\|_2 \|g - h\|_2 \\ &< \varepsilon \|f\|_2 + \varepsilon + M \varepsilon \end{aligned}$$

para n grande, probando que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f .

d) Se tiene que

$$0 \leq \|f_n - f\|_2^2 = \int f^2 d\mu + \int f_n^2 d\mu - 2 \int f_n f d\mu \longrightarrow \alpha^2 - \|f\|_2^2 \leq 0.$$

Luego, $\alpha = \|f\|_2$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en $L^2(\mu)$. □

3.2 Relaciones de inclusión

39. Supongamos que $0 < \mu(X) < \infty$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$, con $1 \leq p < \infty$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{p'} = 0$ para todo p' tal que $1 \leq p' < p$.

Resolución. Sean $p_1 = p/p' > 1$ y q_1 exponentes conjugados. Entonces,

$$\int |f_n - f|^{p'} d\mu \leq \|(f_n - f)^{p'}\|_{p_1} \mu(X)^{1/q_1} = \|f_n - f\|_p^{p'} \mu(X)^{1/q_1} \longrightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, como se requería.

También bastaría con apelar a los Ejemplos 1.16 ó 3.8 y al Lema 3.3: como $\mu(X) < \infty$, se da la inclusión conjuntista $L^p(\mu) \subset L^{p'}(\mu)$ y, por lo tanto, la aplicación inclusión $\iota : L^p(\mu) \hookrightarrow L^{p'}(\mu)$ es continua. □

40. Demostrar que si $0 < \mu(X) < \infty$, si $|f_n| \leq K$ c.t.p. ($n \in \mathbb{N}$), y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ para algún p con $1 \leq p < \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{p''} = 0$ para todo $1 \leq p'' < \infty$.

Resolución. El teorema de Riesz-Fischer (Teorema 3.1) proporciona una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ que converge a f c.t.p.. Por tanto, $|f| \leq K$ c.t.p. y $|f_n - f| \leq 2K$ c.t.p., para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $p'' > p$ (en caso contrario, aplíquese el Ejercicio 39), entonces

$$\|f_n - f\|_{p''}^{p''} \leq (2K)^{p''-p} \|f_n - f\|_p^p \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

3.3 El rango $0 < p < 1$

41. Sean f, g funciones medibles no negativas. Probar que si $0 < k < 1$ ó $k < 0$, y si $k + m = km$, entonces

$$\int fg \, d\mu \geq \left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int g^m \, d\mu \right\}^{1/m}.$$

Resolución. Cuando $0 < k < 1$ se tiene $m < 0$ y recíprocamente, así que basta considerar el caso en que $0 < k < 1$.

Si $\int g^m \, d\mu = 0$ entonces $g^m = 0$ c.t.p. y, como $m < 0$, necesariamente $g = \infty$ c.t.p., es decir, $A = \{x : g(x) < \infty\}$ tiene medida nula. Excluyendo el caso trivial en que $\mu(X) = 0$, encontramos que $A^c = \{x : g(x) = \infty\}$ tiene medida positiva.

Además, al ser $m < 0$ se tiene que $\left\{ \int g^m \, d\mu \right\}^{1/m} = \infty$. Por consiguiente:

$$\int fg \, d\mu = \int_{A^c} fg \, d\mu = \infty \int_{A^c} f \, d\mu = \infty \int f \, d\mu.$$

Si $\int f \, d\mu = 0$ entonces $f = 0$ c.t.p., así que $\left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} = 0$. En este caso, los dos miembros de la desigualdad son nulos, y el resultado se verifica trivialmente. Si $\int f \, d\mu > 0$, tanto el primer miembro como el segundo son infinitos (nótese que $\left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} = 0$ implicaría $f = 0$ c.t.p., de modo que $\int f \, d\mu = 0$) y, de nuevo, se da la igualdad.

Consecuentemente, supondremos que $\int g^m \, d\mu > 0$ y también que $\int g^m \, d\mu < \infty$, pues de lo contrario el segundo miembro es nulo y no hay nada que demostrar.

Escribiendo $p = k^{-1}$, las ecuaciones $f = (uv)^p$, $g = v^{-p}$ definen funciones medibles $u = (fg)^{1/p}$, $v = g^{-1/p}$, no negativas c.t.p. y, por la desigualdad de Hölder generalizada (Ejercicio 13),

$$\int uv \, d\mu \leq \left\{ \int u^p \, d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int v^q \, d\mu \right\}^{1/q},$$

donde $q = (1 - k)^{-1}$ es el exponente conjugado de p . Teniendo en cuenta que $-q/p = k/(k - 1) = m$, obtenemos

$$\int f^k \, d\mu \leq \left\{ \int fg \, d\mu \right\}^k \left\{ \int g^m \, d\mu \right\}^{1-k}.$$

Como $0 < \int g^m \, d\mu < \infty$, basta dividir ambos miembros de la desigualdad precedente por el segundo factor del segundo miembro y tomar raíces k -ésimas para alcanzar la conclusión deseada.

Compárese con la Proposición 3.11. □

42. Sean $0 < k < 1$ y f, g funciones medibles no negativas. Demostrar que

$$\left\{ \int (f + g)^k \, d\mu \right\}^{1/k} \geq \left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} + \left\{ \int g^k \, d\mu \right\}^{1/k}.$$

Resolución. Sea m tal que $k + m = km$. Asumimos que $0 < \int (f + g)^k \, d\mu < \infty$, pues de lo contrario no hay nada que probar. Por el Ejercicio 41, tenemos:

$$\begin{aligned} \int (f + g)^k \, d\mu &= \int f(f + g)^{k-1} \, d\mu + \int g(f + g)^{k-1} \, d\mu \\ &\geq \left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int (f + g)^{(k-1)m} \, d\mu \right\}^{1/m} + \left\{ \int g^k \, d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int (f + g)^{(k-1)m} \, d\mu \right\}^{1/m} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \int f^k d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int (f+g)^k d\mu \right\}^{1/m} + \left\{ \int g^k d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int (f+g)^k d\mu \right\}^{1/m}.$$

Ahora basta con dividir ambos miembros por $\left\{ \int (f+g)^k d\mu \right\}^{1/m}$, que suponemos positiva y finita, para conseguir el resultado.

Compárese con la Proposición 3.11. □