Tema 3: Espacios L^p
Problemas propuestos

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Espacios normados, espacios de Banach y espacios L^p

1.1 Espacios normados y de Banach

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Demostrar la equivalencia de los siguientes asertos:

   a) X es un espacio de Banach.

   b) Toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente en X: si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X.

2. Probar, mediante un contraejemplo, que el recíproco del enunciado del Ejercicio 1 *b*) es falso, es decir, que no toda serie convergente en un espacio de Banach converge absolutamente.

1.2 Espacios L^p: definición y primeras propiedades

3. Demostrar que si $f, g \in L^1(\mu)$, entonces $\left|f^2 + g^2\right|^{1/2} \in L^1(\mu)$.

4. Probar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces:

   a) $x^{-1/p} \in L^{p-\sigma}(0,a)$ si $0 < \sigma < p$, pero no si $\sigma = 0$.

   b) $x^{-1/p}(\ln 1/x)^{-2/p} \in L^{p+\sigma}(0,a)$ si $\sigma = 0$, pero no si $\sigma > 0$.

5. Demostrar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces $\ln x^{-1} \in L^p(0,a)$.

6. Probar que si $0 < a < \infty$, entonces $e^{1/x} \notin L^p(0,a)$ para ningún p, $0 < p \leq \infty$.

7. Demostrar que $x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^p(0,\infty)$ si $p = 2$, pero no si $p \neq 2$.

8. Sea $f : X \to [0,\infty)$ una función medible, esencialmente acotada. Probar que si $0 < \mu(X) < \infty$ y se define

$$I_n = \left\{ \int f^n \, d\mu \right\}^{1/n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   entonces $\lim_{n\to\infty} I_n = \operatorname{ess\,sup} f$.

2 Desigualdades

2.1 Funciones convexas

9. Demostrar que toda función convexa admite derivadas laterales, luego es continua, en todo punto interior de su intervalo de definición. Más precisamente, sean $I = (a,b)$ un intervalo abierto, $\psi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, y $c \in I$. Entonces:

   a) ψ es derivable por la izquierda y por la derecha en c. De hecho, en la notación del Corolario 2.5,

$$\psi'_{-}(c) = \sup\{\psi_c(x) : x \in I,\ x < c\}, \quad \psi'_{+}(c) = \inf\{\psi_c(x) : x \in I,\ x > c\}.$$

   b) ψ es continua en c.

2.2 Desigualdades de Jensen y Young

10. Sean $z_i > 0$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Probar que

$$\prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i,$$

y que se da la igualdad si, y sólo si, $z_1 = \ldots = z_n$.

11. *(Desigualdad entre la media aritmética y la geométrica)* Demostrar que si $\xi_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

con igualdad si, y sólo si, todos los ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$ tienen el mismo valor.

12. Supóngase que ψ es una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $\psi \circ f$ es integrable sobre $[0,1]$ y

$$\psi \left(\int_0^1 f \, dx \right) \leq \int_0^1 \psi \circ f \, dx$$

para toda función medible acotada f. Probar que ψ es convexa.

2.3 Desigualdades de Hölder y Minkowski

13. Justificar la siguiente generalización de las desigualdades de Hölder (Teorema 2.20) y Minkowski (Teorema 2.22): *Sean $(X, \mathscr{S}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g : X \to [0, \infty]$ funciones medibles, $1 < p < \infty$ y $p + q = pq$. Entonces:*

    a) *Desigualdad de Hölder:*

$$\int fg \, d\mu \leq \left\{ \int f^p \, d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int g^q \, d\mu \right\}^{1/q}.$$

    b) *Desigualdad de Minkowski:*

$$\left\{ \int (f+g)^p \, d\mu \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int f^p \, d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int g^p \, d\mu \right\}^{1/p}.$$

14. Enunciar y demostrar análogas discretas de las desigualdades de Hölder (Teoremas 2.20 y 2.24) y Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26), similares a la proporcionada en el Ejemplo 2.15 para la desigualdad de Jensen.

15. Probar que

$$\int_0^{\pi} x^{-1/4} \operatorname{sen} x \, dx \leq \pi^{3/4}.$$

16. Demostrar que las siguientes desigualdades son inconsistentes para funciones $f \in L^2(0, \pi)$:

$$\int_0^{\pi} [f(x) - \operatorname{sen} x]^2 \, dx \leq \frac{4}{9}, \qquad \int_0^{\pi} [f(x) - \cos x]^2 \, dx \leq \frac{1}{9}.$$

17. Probar que si $f, g \in L^1(\mu)$, entonces:

    a) $\sqrt{|fg|} \in L^1(\mu)$.

    b) $|f|^p \, |g|^q \in L^1(\mu)$ si $p, q \in (0,1)$, $p + q = 1$.

18. Sean $f_n \in L^2(a,b)$ $(n \in \mathbb{N})$, $f \in L^2(a,b)$, y $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

    a) Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^2\,dx$.

    b) Probar que si a y b son finitos, entonces $\displaystyle\int_a^t f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^t f_n\,dx \quad (a \le t \le b)$.

    c) Verificar los apartados a) y b) para $(a,b) = (-\pi,\pi)$, $\displaystyle f_n(x) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \operatorname{sen} rx$, y $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

19. Sea $1 \le p < \infty$, y sea $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

20. Sea $f \ge 0$, $f \in L^1(x,1)$ para cada $x \in (0,1]$. Supóngase que $t^{p-1} f^p(t) \in L^1(0,1)$, donde $1 < p < \infty$. Probar que $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f\,dt$ satisface $F(x) = o(\ln 1/x)^{1-1/p}$ cuando $x \to 0+$.

21. Sean $1 < p < \infty$, $f \ge 0$, $f \in L^p(0,\infty)$, y $F(x) = \displaystyle\int_0^x f\,dx$. Demostrar que si p y q son exponentes conjugados, entonces $F(x) = o\left(x^{1/q}\right)$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$.

22. Extender la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) a n funciones. Más precisamente, probar que si $1 < k_1, k_2, \ldots, k_n < \infty$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1/k_i = 1$, y si $f_i \in L^{k_i}(\mu)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, entonces

$$\int |f_1 f_2 \cdots f_n|\,d\mu \le \left\{\int |f_1|^{k_1}\,d\mu\right\}^{1/k_1} \cdots \left\{\int |f_n|^{k_n}\,d\mu\right\}^{1/k_n}.$$

23. Extender el Ejemplo 2.21 a n funciones. Más precisamente, demostrar que se da la igualdad en la desigualdad del Ejercicio 22 si, y sólo si, alguna de las f_i $(i = 1,\ldots,n)$ es nula c.t.p., o para cada par $i,j = 1,\ldots,n$, existen constantes no nulas c_i, c_j tales que

$$c_i |f_i|^{k_i} = c_j |f_j|^{k_j}. \tag{1}$$

24. Probar que si $\alpha,\beta,\gamma > 0$ y $0 < p < (\alpha+\beta+\gamma)^{-1}$, entonces

$$\int_0^2 \frac{dx}{\left(x^\alpha |x-1|^\beta |x-2|^\gamma\right)^p} < \infty.$$

25. Extender la desigualdad de Minkowski (Teorema 2.22 y 2.26) a n funciones.

26. Sea f una función medible no negativa esencialmente acotada, con $\operatorname{ess\,sup} f = M > 0$. Si $0 < \mu(X) < \infty$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int f^{n+1}\,d\mu}{\displaystyle\int f^n\,d\mu} = M.$$

27. Probar que la sucesión de la que se toma límite en el Ejercicio 26 es creciente.

28. Demostrar que si $f \in L^{p_1}(\mu)$ y $g \in L^{p_2}(\mu)$, con $0 < p_1, p_2 < \infty$, entonces $fg \in L^p(\mu)$ para algún p.

29. Encontrar el mínimo de

$$P_f = \left\{\int_E f\,d\mu\right\}\left\{\int_E \frac{1}{f}\,d\mu\right\}$$

tomado sobre el conjunto de las funciones f que son medibles y positivas c.t.p. en un conjunto medible E, de medida finita. ¿En qué funciones se alcanza este mínimo? Para un espacio de medida y conjunto E apropiados, probar que P_f no está acotado superiormente.

30. Sean f y g funciones integrables esencialmente acotadas, y sean $0 < p = \operatorname{ess\,inf} f \leq \operatorname{ess\,sup} f = P$, $0 < q = \operatorname{ess\,inf} g \leq \operatorname{ess\,sup} g \leq Q$. Demostrar que

$$4 \int f^2\, d\mu \int g^2\, d\mu \leq \left\{ \sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}} \right\}^2 \left\{ \int fg\, d\mu \right\}^2.$$

3 Otras propiedades de los espacios L^p

3.1 Completitud

31. Sean $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mu)$, con $f \geq 0$. Probar que $f_n = \min\{f, n\} \in L^p(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

32. Demostrar que si $1 \leq p < \infty$, el conjunto de las funciones medibles acotadas es denso en $L^p(\mu)$.

33. Sea $f \in L^p(a,b)$, con $1 \leq p < \infty$ y a, b finitos, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que existen:

    a) Una función escalonada h tal que $\displaystyle\int_a^b |f - h|^p\, dx < \varepsilon$.

    b) Una función continua g, de soporte compacto, tal que $\displaystyle\int_a^b |f - g|^p\, dx < \varepsilon$.

34. Demostrar que cada una de las siguientes clases de funciones: funciones simples medibles; funciones escalonadas; y funciones continuas, son densas en el espacio métrico $L^p(a,b)$ $(1 \leq p < \infty)$, donde a y b son finitos.

35. Probar que los resultados del Ejercicio 34 valen para $L^p(-\infty,\infty)$ $(1 \leq p < \infty)$.

36. Sean $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados, y sean $f \in L^p(-\infty,\infty)$, $g \in L^q(-\infty,\infty)$. Demostrar que

$$F(t) = \int f(x+t)\, g(x)\, dx$$

es una función continua de t.

37. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, y que $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_q = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \|f_n g_n - fg\|_1 = 0$.

38. Dadas $f, f_n \in L^2(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$, se dice que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *converge débilmente* a f si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n - f)\, g\, d\mu = 0$$

para toda $g \in L^2(\mu)$. Demostrar que:

   a) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en L^2, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f, pero no a la inversa.

   b) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f, entonces $\|f\|_2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2$.

   c) Si $X = [a,b]$, con a y b finitos, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f si, y sólo si,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n\, dt = \int_a^x f\, dt \quad (x \in [a,b]) \qquad \text{y} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty.$$

   d) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f y si $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \alpha \leq \|f\|_2$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en $L^2(\mu)$.

3.2 Relaciones de inclusión

39. Supongamos que $0 < \mu(X) < \infty$ y que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$, con $1 \le p < \infty$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{p'} = 0$ para todo p' tal que $1 \le p' < p$.

40. Demostrar que si $0 < \mu(X) < \infty$, si $|f_n| \le K$ c.t.p. $(n \in \mathbb{N})$, y si $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$ para algún p con $1 \le p < \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{p''} = 0$ para todo $1 \le p'' < \infty$.

3.3 El rango $0 < p < 1$

41. Sean f, g funciones medibles no negativas. Probar que si $0 < k < 1$ ó $k < 0$, y si $k + m = km$, entonces

$$\int fg\,d\mu \ge \left\{\int f^k\,d\mu\right\}^{1/k} \left\{\int g^m\,d\mu\right\}^{1/m}.$$

42. Sean $0 < k < 1$ y f, g funciones medibles no negativas. Demostrar que

$$\left\{\int (f+g)^k\,d\mu\right\}^{1/k} \ge \left\{\int f^k\,d\mu\right\}^{1/k} + \left\{\int g^k\,d\mu\right\}^{1/k}.$$