

Tema 3: Espacios L^p

Problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1	Espacios normados, espacios de Banach y espacios L^p	1
1.1	Espacios normados y de Banach	1
1.2	Espacios L^p : definición y primeras propiedades	1
2	Desigualdades	1
2.1	Funciones convexas	1
2.2	Desigualdades de Jensen y Young	2
2.3	Desigualdades de Hölder y Minkowski	2
3	Otras propiedades de los espacios L^p	4
3.1	Completitud	4
3.2	Relaciones de inclusión	5
3.3	El rango $0 < p < 1$	5



1 Espacios normados, espacios de Banach y espacios L^p

1.1 Espacios normados y de Banach

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Demostrar la equivalencia de los siguientes asertos:

a) X es un espacio de Banach.

b) Toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente en X : si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X .

2. Probar, mediante un contraejemplo, que el recíproco del enunciado del Ejercicio 1 b) es falso, es decir, que no toda serie convergente en un espacio de Banach converge absolutamente.

1.2 Espacios L^p : definición y primeras propiedades

3. Demostrar que si $f, g \in L^1(\mu)$, entonces $|f^2 + g^2|^{1/2} \in L^1(\mu)$.

4. Probar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces:

a) $x^{-1/p} \in L^{p-\sigma}(0, a)$ si $0 < \sigma < p$, pero no si $\sigma = 0$.

b) $x^{-1/p}(\ln 1/x)^{-2/p} \in L^{p+\sigma}(0, a)$ si $\sigma = 0$, pero no si $\sigma > 0$.

5. Demostrar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces $\ln x^{-1} \in L^p(0, a)$.

6. Probar que si $0 < a < \infty$, entonces $e^{1/x} \notin L^p(0, a)$ para ningún p , $0 < p \leq \infty$.

7. Demostrar que $x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^p(0, \infty)$ si $p = 2$, pero no si $p \neq 2$.

8. Sea $f : X \rightarrow [0, \infty)$ una función medible, esencialmente acotada. Probar que si $0 < \mu(X) < \infty$ y se define

$$I_n = \left\{ \int f^n d\mu \right\}^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \text{ess sup } f$.

2 Desigualdades

2.1 Funciones convexas

9. Demostrar que toda función convexa admite derivadas laterales, luego es continua, en todo punto interior de su intervalo de definición. Más precisamente, sean $I = (a, b)$ un intervalo abierto, $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, y $c \in I$. Entonces:

a) ψ es derivable por la izquierda y por la derecha en c . De hecho, en la notación del Corolario 2.5,

$$\psi'_-(c) = \sup \{ \psi'_c(x) : x \in I, x < c \}, \quad \psi'_+(c) = \inf \{ \psi'_c(x) : x \in I, x > c \}.$$

b) ψ es continua en c .

2.2 Desigualdades de Jensen y Young

10. Sean $z_i > 0$, $\alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Probar que

$$\prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i,$$

y que se da la igualdad si, y sólo si, $z_1 = \dots = z_n$.

11. (*Desigualdad entre la media aritmética y la geométrica*) Demostrar que si $\xi_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), entonces

$$\left(\prod_{i=1}^n \xi_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

con igualdad si, y sólo si, todos los ξ_i ($i = 1, \dots, n$) tienen el mismo valor.

12. Supóngase que ψ es una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $\psi \circ f$ es integrable sobre $[0, 1]$ y

$$\psi \left(\int_0^1 f \, dx \right) \leq \int_0^1 \psi \circ f \, dx$$

para toda función medible acotada f . Probar que ψ es convexa.

2.3 Desigualdades de Hölder y Minkowski

13. Justificar la siguiente generalización de las desigualdades de Hölder (Teorema 2.20) y Minkowski (Teorema 2.22): Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funciones medibles, $1 < p < \infty$ y $p + q = pq$. Entonces:

a) *Desigualdad de Hölder:*

$$\int f g \, d\mu \leq \left\{ \int f^p \, d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int g^q \, d\mu \right\}^{1/q}.$$

b) *Desigualdad de Minkowski:*

$$\left\{ \int (f + g)^p \, d\mu \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int f^p \, d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int g^p \, d\mu \right\}^{1/p}.$$

14. Enunciar y demostrar análogas discretas de las desigualdades de Hölder (Teoremas 2.20 y 2.24) y Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26), similares a la proporcionada en el Ejemplo 2.15 para la desigualdad de Jensen.
15. Probar que

$$\int_0^\pi x^{-1/4} \sin x \, dx \leq \pi^{3/4}.$$

16. Demostrar que las siguientes desigualdades son inconsistentes para funciones $f \in L^2(0, \pi)$:

$$\int_0^\pi [f(x) - \sin x]^2 \, dx \leq \frac{4}{9}, \quad \int_0^\pi [f(x) - \cos x]^2 \, dx \leq \frac{1}{9}.$$

17. Probar que si $f, g \in L^1(\mu)$, entonces:

a) $\sqrt{|fg|} \in L^1(\mu).$

b) $|f|^p |g|^q \in L^1(\mu)$ si $p, q \in (0, 1)$, $p + q = 1$.

18. Sean $f_n \in L^2(a, b)$ ($n \in \mathbb{N}$), $f \in L^2(a, b)$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

a) Demostrar que $\int_a^b f^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n^2 dx$.

b) Probar que si a y b son finitos, entonces $\int_a^t f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t f_n dx$ ($a \leq t \leq b$).

c) Verificar los apartados a) y b) para $(a, b) = (-\pi, \pi)$, $f_n(x) = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sin rx$, y $f(x) = \frac{x}{2}$.

19. Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

20. Sea $f \geq 0$, $f \in L^1(x, 1)$ para cada $x \in (0, 1]$. Supóngase que $t^{p-1} f^p(t) \in L^1(0, 1)$, donde $1 < p < \infty$. Probar que $F(x) = \int_x^1 f dt$ satisface $F(x) = o(\ln 1/x)^{1-1/p}$ cuando $x \rightarrow 0+$.

21. Sean $1 < p < \infty$, $f \geq 0$, $f \in L^p(0, \infty)$, y $F(x) = \int_0^x f dx$. Demostrar que si p y q son exponentes conjugados, entonces $F(x) = o(x^{1/q})$ cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$.

22. Extender la desigualdad de Hölder (Teorema 2.20) a n funciones. Más precisamente, probar que si $1 < k_1, k_2, \dots, k_n < \infty$, con $\sum_{i=1}^n 1/k_i = 1$, y si $f_i \in L^{k_i}(\mu)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), entonces

$$\int |f_1 f_2 \cdots f_n| d\mu \leq \left\{ \int |f_1|^{k_1} d\mu \right\}^{1/k_1} \cdots \left\{ \int |f_n|^{k_n} d\mu \right\}^{1/k_n}.$$

23. Extender el Ejemplo 2.21 a n funciones. Más precisamente, demostrar que se da la igualdad en la desigualdad del Ejercicio 22 si, y sólo si, alguna de las f_i ($i = 1, \dots, n$) es nula c.t.p., o para cada par $i, j = 1, \dots, n$, existen constantes no nulas c_i, c_j tales que

$$c_i |f_i|^{k_i} = c_j |f_j|^{k_j}. \quad (1)$$

24. Probar que si $\alpha, \beta, \gamma > 0$ y $0 < p < (\alpha + \beta + \gamma)^{-1}$, entonces

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^\alpha |x-1|^\beta |x-2|^\gamma)^p} < \infty.$$

25. Extender la desigualdad de Minkowski (Teoremas 2.22 y 2.26) a n funciones.

26. Sea f una función medible no negativa esencialmente acotada, con $\text{ess sup } f = M > 0$. Si $0 < \mu(X) < \infty$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int f^{n+1} d\mu}{\int f^n d\mu} = M.$$

27. Probar que la sucesión de la que se toma límite en el Ejercicio 26 es creciente.

28. Demostrar que si $f \in L^{p_1}(\mu)$ y $g \in L^{p_2}(\mu)$, con $0 < p_1, p_2 < \infty$, entonces $fg \in L^p(\mu)$ para algún p .

29. Encontrar el mínimo de

$$P_f = \left\{ \int_E f d\mu \right\} \left\{ \int_E \frac{1}{f} d\mu \right\}$$

tomado sobre el conjunto de las funciones f que son medibles y positivas c.t.p. en un conjunto medible E , de medida finita. ¿En qué funciones se alcanza este mínimo? Para un espacio de medida y conjunto E apropiados, probar que P_f no está acotado superiormente.

30. Sean f y g funciones integrables esencialmente acotadas, y sean $0 < p = \operatorname{ess\,inf} f \leq \operatorname{ess\,sup} f = P$, $0 < q = \operatorname{ess\,inf} g \leq \operatorname{ess\,sup} g = Q$. Demostrar que

$$4 \int f^2 d\mu \int g^2 d\mu \leq \left\{ \sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}} \right\}^2 \left\{ \int fg d\mu \right\}^2.$$

3 Otras propiedades de los espacios L^p

3.1 Completitud

31. Sean $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mu)$, con $f \geq 0$. Probar que $f_n = \min\{f, n\} \in L^p(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$) y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
32. Demostrar que si $1 \leq p < \infty$, el conjunto de las funciones medibles acotadas es denso en $L^p(\mu)$.
33. Sea $f \in L^p(a, b)$, con $1 \leq p < \infty$ y a, b finitos, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que existen:

a) Una función escalonada h tal que $\int_a^b |f - h|^p dx < \varepsilon$.

b) Una función continua g , de soporte compacto, tal que $\int_a^b |f - g|^p dx < \varepsilon$.

34. Demostrar que cada una de las siguientes clases de funciones: funciones simples medibles; funciones escalonadas; y funciones continuas, son densas en el espacio métrico $L^p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$), donde a y b son finitos.
35. Probar que los resultados del Ejercicio 34 valen para $L^p(-\infty, \infty)$ ($1 \leq p < \infty$).
36. Sean $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados, y sean $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $g \in L^q(-\infty, \infty)$. Demostrar que

$$F(t) = \int f(x+t)g(x) dx$$

es una función continua de t .

37. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$, y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_q = 0$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n g_n - fg\|_1 = 0$.
38. Dadas $f, f_n \in L^2(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$), se dice que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - f)g d\mu = 0$$

para toda $g \in L^2(\mu)$. Demostrar que:

- a) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en L^2 , entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f , pero no a la inversa.
- b) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f , entonces $\|f\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2$.
- c) Si $X = [a, b]$, con a y b finitos, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f si, y sólo si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n dt = \int_a^x f dt \quad (x \in [a, b]) \quad \text{y} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty.$$

- d) Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge débilmente a f y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \alpha \leq \|f\|_2$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en $L^2(\mu)$.

3.2 Relaciones de inclusión

39. Supongamos que $0 < \mu(X) < \infty$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$, con $1 \leq p < \infty$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{p'} = 0$ para todo p' tal que $1 \leq p' < p$.
40. Demostrar que si $0 < \mu(X) < \infty$, si $|f_n| \leq K$ c.t.p. ($n \in \mathbb{N}$), y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ para algún p con $1 \leq p < \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{p''} = 0$ para todo $1 \leq p'' < \infty$.

3.3 El rango $0 < p < 1$

41. Sean f, g funciones medibles no negativas. Probar que si $0 < k < 1$ ó $k < 0$, y si $k + m = km$, entonces

$$\int fg \, d\mu \geq \left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} \left\{ \int g^m \, d\mu \right\}^{1/m}.$$

42. Sean $0 < k < 1$ y f, g funciones medibles no negativas. Demostrar que

$$\left\{ \int (f+g)^k \, d\mu \right\}^{1/k} \geq \left\{ \int f^k \, d\mu \right\}^{1/k} + \left\{ \int g^k \, d\mu \right\}^{1/k}.$$