Tema 2: La integral de Lebesgue

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

0 Introducción

A menudo, en análisis es conveniente intercambiar una integral con un sumatorio, o con un límite. En este tema daremos una definición de la integral, aplicable a una amplia clase de funciones medibles Lebesgue, que permite el intercambio del signo integral con los de sumatorio o límite bajo condiciones muy poco restrictivas. Los resultados de regularidad de la medida de Lebesgue conducirán a resultados de aproximación de la integral de funciones medibles. Tras comparar las integrales de Lebesgue y Riemann, finalizaremos el tema generalizando la teoría desarrollada a espacios de medida abstractos.

1 Integración de funciones de variable real

La integral de Lebesgue se definirá para funciones medibles reales mediante un proceso de sucesivas extensiones a partir de la definición de integral para las llamadas *funciones simples*.

1.1 Integración de funciones no negativas

Consideraremos, en primer lugar, la definición de integral sobre la clase de las funciones medibles no negativas y examinaremos sus propiedades. Por el momento, supondremos que las funciones involucradas están definidas en todo $\mathbb{R}$.

Definición 1.1 *Se dice que φ es una* función simple *si toma un número finito de valores distintos, no negativos y finitos.*

Definición 1.2 *Sean $0 \leq a_i < \infty$, con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, los valores distintos que toma la función simple φ, y pongamos $A_i = \{x : \varphi(x) = a_i\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. La expresión*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

recibe el nombre de representación canónica *de φ.*

Observación 1.3 *Conviene advertir que:*

(*i*) *La representación canónica de una función simple es única.*

(*ii*) *Los conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ que dan la representación canónica (1) satisfacen $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{R}$.*

Observación 1.4 *Una función simple admite representaciones no canónicas: la función $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} s_k \chi_{E_k}$, donde los conjuntos E_k $(k = 1, \ldots, N)$ no son disjuntos dos a dos y/o los valores $0 \leq s_k < \infty$ $(k = 1, \ldots, N)$ no son distintos, también se ajusta a la Definición 1.1. No obstante, siempre es posible expresar φ en forma canónica. En efecto, si $E_j \cap E_k \neq \emptyset$ para algún par de índices $j \neq k$ $(j, k = 1, \ldots, N)$, en la expresión que da φ se reemplazan los términos $s_j \chi_{E_j} + s_k \chi_{E_k}$ por $s_j \chi_{E_j \setminus E_k} + (s_j + s_k) \chi_{E_j \cap E_k} + s_k \chi_{E_k \setminus E_j}$ (no se excluye que algunos de los conjuntos que intervienen en la nueva suma sean vacíos y, por tanto, los sumandos correspondientes desaparezcan de ella); esto puede hacerse de forma sistemática, comparando el primer conjunto con todos los restantes y, en caso de efectuar algún reemplazo, comparando los nuevos conjuntos con los demás. Así pues, no se pierde generalidad suponiendo que los E_k $(k = 1, \ldots, N)$ son no vacíos y disjuntos. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto (finito) de los valores distintos que toma φ, y escribamos $A_i = \{x : \varphi(x) = a_i\} = \bigcup_{s_k = a_i} E_k$ $(i = 1, \ldots, n)$. La representación canónica de φ es entonces*

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{k=1}^{N} s_k \chi_{E_k} &= \sum_{s_k = a_1} s_k \chi_{E_k} + \cdots + \sum_{s_k = a_n} s_k \chi_{E_k} = a_1 \sum_{s_k = a_1} \chi_{E_k} + \cdots + a_n \sum_{s_k = a_n} \chi_{E_k} \\ &= a_1 \chi_{\bigcup\limits_{s_k = a_1} E_k} + \cdots + a_n \chi_{\bigcup\limits_{s_k = a_n} E_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, salvo que se indique otra cosa, en lo sucesivo trabajaremos siempre con las representaciones canónicas de las funciones simples.

Ejemplo 1.5 *Dada la función simple* $\varphi = 3\chi_A + 2\chi_B + \chi_C$, *con* $A = \{1,3,4,5\}$, $B = \{3\}$ *y* $C = \{1,5\}$, *hallar su forma canónica.*

Resolución. Se tiene que $A \cap B = \{3\} \neq \emptyset$. Reemplazamos los términos $3\chi_A + 2\chi_B$ por

$$3\chi_{A\setminus B} + 5\chi_{A\cap B} + 2\chi_{B\setminus A} = 3\chi_{\{1,4,5\}} + 5\chi_{\{3\}},$$

donde hemos tenido en cuenta que $\chi_\emptyset = 0$. Así,

$$\varphi = 3\chi_{\{1,4,5\}} + 5\chi_{\{3\}} + \chi_C = 3\chi_{E_1} + 5\chi_{E_2} + \chi_C,$$

siendo $E_1 = \{1,4,5\}$ y $E_2 = \{3\}$. Ahora, como $E_1 \cap C = \{1,5\} \neq \emptyset$, reemplazamos $3\chi_{E_1} + \chi_C$ por

$$3\chi_{E_1\setminus C} + 4\chi_{E_1\cap C} + \chi_{C\setminus E_1} = 3\chi_{\{4\}} + 4\chi_{\{1,5\}}$$

para obtener

$$\varphi = 5\chi_{E_2} + 3\chi_{E_3} + 4\chi_{E_4},$$

con $E_3 = \{4\}$ y $E_4 = \{1,5\}$. Puesto que $E_2 \cap E_3 = E_2 \cap E_4 = \emptyset$ resulta, finalmente,

$$\varphi = 5\chi_{\{3\}} + 3\chi_{\{4\}} + 4\chi_{\{1,5\}}$$

como forma canónica. □

Claramente, una función simple es medible si, y sólo si, los conjuntos A_i $(i = 1,\dots,n)$ que dan su representación canónica son medibles.

Para la siguiente definición se tiene en cuenta el convenio $0 \cdot \infty = 0$, ya introducido.

Definición 1.6 *La* integral *de una función simple medible* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ *es el número real no negativo, y posiblemente infinito,*

$$\int \varphi\, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(A_i).$$

Observación 1.7 *La Definición 1.6 es independiente de la representación de* φ. *En efecto, supongamos que* φ *admite la representación no canónica* $\varphi = \sum_{k=1}^{N} s_k \chi_{E_k}$, *donde los conjuntos* E_k $(k = 1,\dots,N)$ *son medibles. Revisando la forma de obtener la correspondiente representación canónica (Observación 1.4) encontramos que la sustitución de* $s_j\chi_{E_j} + s_k\chi_{E_k}$ *por* $s_j\chi_{E_j\setminus E_k} + (s_j + s_k)\chi_{E_j\cap E_k} + s_k\chi_{E_k\setminus E_j}$ *respeta la medida:*

$$\begin{aligned} s_j m(E_j) + s_k m(E_k) &= s_j [m(E_j \setminus E_k) + m(E_j \cap E_k)] + s_k [m(E_k \setminus E_j) + m(E_k \cap E_j)] \\ &= s_j m(E_j \setminus E_k) + (s_j + s_k) m(E_j \cap E_k) + s_k m(E_k \setminus E_j). \end{aligned}$$

Además, admitiendo que los E_k *ya son disjuntos dos a dos, para cada conjunto* $A_i = \bigcup_{s_k=a_i} E_k$ *se tiene que* $m(A_i) = \sum_{s_k=a_i} m(E_k)$ $(i = 1,\dots,n)$, *con lo cual*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} s_k m(E_k) &= \sum_{s_k=a_1} s_k m(E_k) + \cdots + \sum_{s_k=a_n} s_k m(E_k) = a_1 \sum_{s_k=a_1} m(E_k) + \cdots + a_n \sum_{s_k=a_n} m(E_k) \\ &= a_1\, m\left(\bigcup_{s_k=a_1} E_k\right) + \cdots + a_n\, m\left(\bigcup_{s_k=a_n} E_k\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(A_i), \end{aligned}$$

como se había afirmado.

Definición 1.8 *La* integral *de cualquier función medible no negativa f es el número real no negativo, y posiblemente infinito,*

$$\int f\,dx = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi\,dx,$$

donde el supremo se toma sobre funciones simples medibles.

Nótese que $\varphi \equiv 0$ es una función simple medible que satisface $\varphi \leq f$ para cualquier función medible no negativa f. Por tanto, la Definición 1.8 tiene sentido.

Ejemplo 1.9 *Si φ es una función simple medible, la Definición 1.6 y la Definición 1.8 dan sendos valores para su integral. Demostrar que ambos coinciden.*

Resolución. Escribimos

$$\int^* \varphi\,dx = \sup_{\psi \leq \varphi} \int \psi\,dx,$$

donde ψ denota una función simple medible; es decir, $\int^* \varphi\,dx$ se corresponde con el valor que proporciona la Definición 1.8, mientras que $\int \varphi\,dx$ es el proporcionado por la Definición 1.6.

Supongamos, en primer lugar, que $\int^* \varphi\,dx < \infty$. Como φ es una de las funciones sobre las que se toma supremo,

$$\int \varphi\,dx \leq \int^* \varphi\,dx;$$

en particular, $\int \varphi\,dx < \infty$.

Por otra parte, supongamos que $\int \varphi\,dx < \infty$ y que $\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ es una función simple medible tal que $\psi \leq \varphi$. Entonces (Observación 1.3),

$$B_j = B_j \cap \mathbb{R} = B_j \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

implica $\psi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{A_i \cap B_j}$ y, por simetría, $\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap B_j}$. En general, estas representaciones ya no serán canónicas; pero, atendiendo a la Observación 1.7 y al hecho de que $b_j \leq a_i$ si $m(A_i \cap B_j) > 0$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$, podemos escribir

$$\int \psi\,dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j\, m(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\, m(A_i \cap B_j) = \int \varphi\,dx.$$

La arbitrariedad de ψ conduce a la relación

$$\int^* \varphi\,dx \leq \int \varphi\,dx;$$

en particular, $\int^* \varphi\,dx < \infty$.

Hemos probado así que $\int \varphi\,dx < \infty$ si, y sólo si, $\int^* \varphi\,dx < \infty$, y en tal caso

$$\int \varphi\,dx = \int^* \varphi\,dx.$$

Por tanto, $\int \varphi\,dx = \infty$ si, y sólo si, $\int^* \varphi\,dx = \infty$, en cuyo caso también tenemos la igualdad de ambas integrales. $\square$

Observación 1.10 *Como subproducto de la resolución del Ejemplo 1.9, se ha demostrado que la integral de funciones simples* *medibles es monótona con respecto al integrando: si ψ, φ son simples medibles y $\psi \leq \varphi$, entonces*

$$\int \psi \, dx \leq \int \varphi \, dx.$$

Definición 1.11 *Dados cualquier conjunto medible E y cualquier función medible no negativa f, la* integral de f sobre E *se define como*

$$\int_E f \, dx = \int f \chi_E \, dx.$$

Si el conjunto E de la Definición 1.11 es un intervalo $[a,b]$, entonces escribimos $\int_a^b f \, dx$ en vez de $\int_E f \, dx$; en caso de que $a > b$, también escribiremos

$$\int_b^a f \, dx = -\int_a^b f \, dx.$$

Cuando sea necesario hacer una distinción, la integral que acabamos de definir será denominada *integral de Lebesgue*; para evitar confusión con la integral de Riemann, continuaremos denotando esta última por (R) $\int_a^b f \, dx$. En la Sección 1.4 profundizaremos en la relación entre ambas integrales.

Teorema 1.12 *Si $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ es una función simple medible, entonces:*

(i) $\int_E \varphi \, dx = \sum_{i=1}^n a_i m(E \cap A_i)$ *para cualquier $E \in \mathscr{M}$.*

(ii) $\int_{A \cup B} \varphi \, dx = \int_A \varphi \, dx + \int_B \varphi \, dx$ *para cualesquiera $A, B \in \mathscr{M}$ tales que $A \cap B = \emptyset$.*

(iii) $\int (a\varphi) \, dx = a \int \varphi \, dx$, *si $a \geq 0$.*

Demostración.

(i) Dado $E \in \mathscr{M}$, se tiene que la función $\varphi \chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E \cap A_i}$ es simple medible. Por tanto, este apartado sigue inmediatamente de las Definiciones 1.6 y 1.11.

(ii) Aplicando (i), obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{A \cup B} \varphi \, dx &= \sum_{i=1}^n a_i m((A \cup B) \cap A_i) = \sum_{i=1}^n a_i [m(A \cap A_i) + m(B \cap A_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n a_i m(A \cap A_i) + \sum_{i=1}^n a_i m(B \cap A_i) = \int_A \varphi \, dx + \int_B \varphi \, dx.\end{aligned}$$

(iii) Para $a \geq 0$ se tiene que la función $a\varphi = \sum_{i=1}^n a a_i \chi_{A_i}$ es simple medible, así que

$$\int (a\varphi) \, dx = \sum_{i=1}^n a a_i m(A_i) = a \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = a \int \varphi \, dx. \qquad \square$$

Ejemplo 1.13 *Probar que si la función f es medible no negativa, entonces $f = 0$ c.t.p. si, y sólo si, $\int f \, dx = 0$.*

Resolución. Sea $E = \{x : f(x) > 0\}$.

Supongamos que $f = 0$ c.t.p. y que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ es una función simple medible tal que $\varphi \leq f$. Entonces $m(E) = 0$ y $\varphi(x) = f(x) = 0$ si $x \in E^c$. El Teorema 1.12 y la monotonía de m obligan a que

$$\int \varphi \, dx = \int_E \varphi \, dx + \int_{E^c} \varphi \, dx = \sum_{i=1}^n a_i m(E \cap A_i) + \int \varphi \chi_{E^c} \, dx = 0,$$

y sigue de la Definición 1.8 que $\int f\,dx = 0$.

Recíprocamente, si $\int f\,dx = 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $E_n = \{x : f(x) \geq 1/n\}$, las Definiciones 1.8 y 1.6 implican

$$0 = \int f\,dx \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n}\,dx = \frac{1}{n}m(E_n),$$

así que $m(E_n) = 0$. Como $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, se concluye que $m(E) = 0$ y, con ello, que $f = 0$ c.t.p.. □

Teorema 1.14 *Sean f, g funciones medibles no negativas.*

(i) *Si $f \leq g$, entonces $\int f\,dx \leq \int g\,dx$.*

(ii) *Si el conjunto A es medible y $f \leq g$ sobre A, entonces $\int_A f\,dx \leq \int_A g\,dx$.*

(iii) *Si $a \geq 0$, entonces $\int (af)\,dx = a\int f\,dx$.*

(iv) *Si los conjuntos A, B son medibles y $A \supset B$, entonces $\int_A f\,dx \geq \int_B f\,dx$.*

Demostración. El apartado (i) sigue inmediatamente de la Definición 1.8, y el apartado (ii), de la Definición 1.11 y (i).

El apartado (iii) es obvio cuando $a = 0$. Si $a > 0$, entonces φ es una función simple medible tal que $\varphi \leq af$ si, y sólo si, $\varphi = a\psi$, donde ψ es simple medible y $\psi \leq f$; por el Teorema 1.12 (iii), $\int \varphi\,dx = a\int \psi\,dx$. Así pues,

$$\int (af)\,dx = \sup_{\varphi \leq af} \int \varphi\,dx = a \sup_{\psi \leq f} \int \psi\,dx = a\int f\,dx.$$

Para probar (iv), nótese que $\chi_A f \geq \chi_B f$ y aplíquese (i). □

El siguiente resultado será básico a la hora de establecer teoremas de convergencia.

Teorema 1.15 (Lema de Fatou) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces,*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx. \tag{2}$$

Demostración. Pongamos $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$, que es una función medible no negativa. Por la Definición 1.8, se seguirá el resultado tan pronto se pruebe que, para cada función simple medible φ tal que $\varphi \leq f$, se verifica

$$\int \varphi\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx. \tag{3}$$

Caso 1: $\int \varphi\,dx = \infty$. Atendiendo a la Definición 1.6, para algún conjunto medible A y cierto $a > 0$ se tiene que $m(A) = \infty$ y $\varphi = a$ sobre A. Escribimos

$$g_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j(x) \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad A_n = \{x : g_k(x) \geq a\ (k \geq n)\} \quad (n \in \mathbb{N});$$

los conjuntos A_n son medibles y, además, $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Para cada x, la sucesión $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ es monótona creciente, con $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x) \geq \varphi(x) = a$ $(x \in A)$, así que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; por tanto, $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, es

$$\int f_n\,dx \geq \int g_n\,dx \geq \int_{A_n} g_n\,dx \geq \int a\chi_{A_n}\,dx = a\,m(A_n)$$

(Teorema 1.14), resulta que $\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \infty$, y se cumple (3).

Caso 2: $\int \varphi\, dx < \infty$. Poniendo $B = \{x : \varphi(x) > 0\}$, encontramos que $m(B) < \infty$. En efecto: si $B = \emptyset$, entonces $m(B) = 0 < \infty$; si $B \neq \emptyset$ y $a > 0$ es el menor de los valores que toma φ en B, se tiene

$$\infty > \int \varphi\, dx \geq \int_B \varphi\, dx \geq \int a\chi_B = a\, m(B),$$

así que $m(B) < \infty$, como se afirmaba.

Sea M el valor máximo de φ y, dado $0 < \varepsilon < 1$, pongamos

$$B_n = \{x \in B : g_k(x) > (1-\varepsilon)\,\varphi(x)\ (k \geq n)\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, se define g_k como anteriormente. Los conjuntos B_n son medibles, con $B_n \subset B_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y como $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x) \geq \varphi(x) > (1-\varepsilon)\,\varphi(x)$ $(x \in B)$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Por tanto, la sucesión de conjuntos $\{B \setminus B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, con $\bigcap_{n=1}^{\infty} (B \setminus B_n) = \emptyset$. Ya que $m(B) < \infty$, existe N tal que $m(B \setminus B_n) < \varepsilon$ $(n \geq N)$. Así, para $n \geq N$, y por el Teorema 1.12,

$$\begin{aligned}\int g_n\, dx \geq \int_{B_n} g_n\, dx > (1-\varepsilon)\int_{B_n} \varphi\, dx = (1-\varepsilon)\left(\int_B \varphi\, dx - \int_{B\setminus B_n} \varphi\, dx\right)\\ \geq (1-\varepsilon)\int \varphi\, dx - \int_{B\setminus B_n} \varphi\, dx \geq \int \varphi\, dx - \varepsilon \int \varphi\, dx - \varepsilon M.\end{aligned}$$

Para escribir la tercera desigualdad hemos tenido en cuenta que $\varphi(x) = 0$ $(x \in B^c)$ y que $-(1-\varepsilon) > -1$. La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ permite inferir que $\liminf_{n\to\infty} \int g_n\, dx \geq \int \varphi\, dx$. Puesto que $f_n \geq g_n$ $(n \in \mathbb{N})$, queda probado (3) también en este caso. □

Ejemplo 1.16 *Dar un ejemplo donde se tenga la desigualdad estricta en el lema de Fatou.*

Resolución. Sean $f_{2n-1} = \chi_{[0,1]}$, $f_{2n} = \chi_{(1,2)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo x, pero $\int f_n\, dx = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. □

Teorema 1.17 (Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, tales que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente para cada x. Sea $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Entonces,*

$$\int f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, dx. \tag{4}$$

Demostración. Como, por hipótesis, $f_n \leq f$, sigue del Teorema 1.14 (i) que $\int f_n\, dx \leq \int f\, dx$ $(n \in \mathbb{N})$, y de aquí que

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, dx \leq \int f\, dx. \tag{5}$$

Por otra parte, el lema de Fatou proporciona

$$\int f\, dx = \int \liminf_{n\to\infty} f_n\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, dx. \tag{6}$$

Las desigualdades (5) y (6) prueban (4). □

Ejemplo 1.18 *Demostrar que* $\int_1^{\infty} x^{-1}\, dx = \infty$.

Resolución. La función $f(x) = x^{-1}$ es continua y positiva para $x \geq 1$; en particular, es medible no negativa, y su integral está definida. Aplicando el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17) a la sucesión $f\chi_{[1,n)} \nearrow f\chi_{[1,\infty)}$ $(n \to \infty)$, obtenemos

$$\int_1^{\infty} x^{-1}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} x^{-1}\, dx.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^{-1} > k^{-1}$ en $[k-1,k)$ $(k = 2,\dots,n)$ implica $f\chi_{[1,n)} \geq \varphi_n$, donde $\varphi_n = \sum_{k=2}^{n} k^{-1}\chi_{[k-1,k)}$. El Teorema 1.14 (i) (o la Definición 1.8) y la Definición 1.6 permiten concluir que

$$\int_1^n x^{-1}\,dx = \int f\chi_{[1,n)}\,dx \geq \int \varphi_n\,dx = \sum_{k=2}^{n} k^{-1}\big|[k-1,k)\big| = \sum_{k=2}^{n} k^{-1} \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty. \qquad \square$$

Teorema 1.19 (Teorema de aproximación de Lebesgue) *Sea f una función medible no negativa. Existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles tales que, para cada x, $\varphi_n(x) \nearrow f(x)$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Pongamos

$$E_{n,k} = \left\{x : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n}\right\}, \quad F_n = \{x : f(x) > n\} \qquad (k = 1,2,\dots,n2^n,\ n \in \mathbb{N}).$$

Pongamos también

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Las funciones φ_n $(n \in \mathbb{N})$ son simples medibles. Además, puesto que la partición del rango de f que define a φ_{n+1} es un refinamiento de la que da lugar a φ_n, es fácil constatar que $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$ para cada x y cada $n \in \mathbb{N}$. Si $f(x)$ es finito, entonces $x \in F_n^c$ para n grande, de modo que $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq 2^{-n}$ para n grande, y $\varphi_n(x) \nearrow f(x)$ cuando $n \to \infty$. Si $f(x) = \infty$, entonces $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, así que $\varphi_n(x) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, de nuevo, $\varphi_n(x) \nearrow f(x)$ cuando $n \to \infty$. $\square$

El Teorema 1.19, en combinación con el Teorema 1.17, da lugar a una forma de evaluar la integral de una función medible no negativa alternativa a la Definición 1.8.

Corolario 1.20 *Se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\,dx = \int f\,dx,$$

donde f y φ_n $(n \in \mathbb{N})$ son como en el Teorema 1.19.

Aplicamos esta idea en la prueba del siguiente:

Teorema 1.21 *Sean f y g funciones medibles no negativas. Entonces,*

$$\int f\,dx + \int g\,dx = \int (f+g)\,dx. \tag{7}$$

Demostración. En primer lugar, se establecerá (7) para funciones simples medibles φ, ψ. Supongamos que φ toma los valores $a_1,\dots,a_n$ en los conjuntos medibles $A_1,\dots,A_n$, y que ψ toma los valores $b_1,\dots,b_m$ en los conjuntos medibles $B_1,\dots,B_m$. La función simple $\varphi+\psi$ toma los valores a_i+b_j en los conjuntos medibles $A_i \cap B_j$ $(i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m)$; luego,

$$\begin{aligned}
\int_{A_i\cap B_j} (\varphi+\psi)\,dx &= \int (\varphi+\psi)\chi_{A_i\cap B_j}\,dx = \int (a_i+b_j)\chi_{A_i\cap B_j}\,dx \\
&= (a_i+b_j)m(A_i\cap B_j) = a_i m(A_i\cap B_j) + b_j m(A_i\cap B_j) \\
&= \int a_i\chi_{A_i\cap B_j}\,dx + \int b_j\chi_{A_i\cap B_j}\,dx = \int \varphi\chi_{A_i\cap B_j}\,dx + \int \psi\chi_{A_i\cap B_j}\,dx \\
&= \int_{A_i\cap B_j} \varphi\,dx + \int_{A_i\cap B_j} \psi\,dx \quad (i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m).
\end{aligned} \tag{8}$$

La unión de los nm conjuntos disjuntos $A_i \cap B_j$ $(i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m)$ es $\mathbb{R}$ (Observación 1.3), así que, aplicando el Teorema 1.12 (ii) a ambos miembros de (8), resulta

$$\int (\varphi+\psi)\,dx = \int \varphi\,dx + \int \psi\,dx. \tag{9}$$

Sean ahora f, g funciones medibles no negativas cualesquiera, y sean $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de funciones simples medibles tales que $\varphi_n \nearrow f$ y $\psi_n \nearrow g$ cuando $n \to \infty$ (Teorema 1.19). Entonces, $\varphi_n + \psi_n \nearrow f + g$ cuando $n \to \infty$. Pero, por (9),

$$\int (\varphi_n + \psi_n)\, dx = \int \varphi_n\, dx + \int \psi_n\, dx \quad (n \in \mathbb{N}),$$

y basta hacer $n \to \infty$ para que el Teorema 1.17 conduzca a la conclusión deseada. □

Teorema 1.22 (Beppo Levi) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces,*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, dx.$$

Demostración. Por inducción, (7) es aplicable a una suma de n funciones: si $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, entonces $\int s_n\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int f_i\, dx$ $(n \in \mathbb{N})$. Como $s_n \nearrow f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ cuando $n \to \infty$, el resultado se sigue del Teorema 1.17. □

Ejemplo 1.23 *Para $0 \le x \le 1$, se define la función $f(x)$ de la siguiente manera:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ n, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde n es el número de ceros inmediatamente a la derecha de la coma en la expresión decimal de x. Probar que f es medible y calcular $\int_0^1 f\, dx$.

Resolución. Los números de $[0,1]$ que tienen n ceros a la derecha de la coma decimal hasta el primer dígito no nulo están en el intervalo $[10^{-(n+1)}, 10^{-n})$. Dado $x \in [0,1]$, pongamos

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} n \chi_{[10^{-(n+1)}, 10^{-n})}(x), & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Entonces $f \le g$ y $f = g$ c.t.p., así que f es medible y, por el Ejemplo 1.13 (aplicado a $g - f$),

$$\int_0^1 f\, dx = \int_0^1 g\, dx.$$

Apelando ahora al teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g\, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{10^{n+1}} = \frac{9}{10^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \Bigg|_{x=10^{-1}} \\ &= \frac{9}{10^2} \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Bigg|_{x=10^{-1}} = \frac{9}{10^2} \frac{1}{(1-x)^2} \Bigg|_{x=10^{-1}} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\int_0^1 f\, dx = \frac{1}{9}.$$ □

1.2 La integral general

En esta sección extendemos la definición de integral a una amplia clase de funciones medibles a valores reales, no necesariamente no negativas. La potencia de los dos principales teoremas de convergencia (Teoremas 1.38 y 1.41) pondrá de manifiesto que esta definición es la apropiada.

Comenzamos recordando algunas definiciones y propiedades ya conocidas.

Definición 1.24 *Si f es cualquier función real, las funciones*

$$f^+(x) = \max\{f(x),0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x),0\} = -\min\{f(x),0\},$$

se denominan parte positiva *y* parte negativa *de f, respectivamente.*

Teorema 1.25 *Se verifica:*

(i) $f^+, f^- \geq 0$.

(ii) $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

(iii) *f es medible si, y sólo si, f^+ y f^- son ambas medibles.*

Definición 1.26 *Si f es una función medible con $\int f^+ \, dx < \infty$, $\int f^- \, dx < \infty$, decimos que f es* integrable *y definimos su integral como*

$$\int f \, dx = \int f^+ \, dx - \int f^- \, dx.$$

Claramente, una función medible f es integrable si, y sólo si, lo es $|f|$, en cuyo caso

$$\int |f| \, dx = \int f^+ \, dx + \int f^- \, dx.$$

Definición 1.27 *Si E es un conjunto medible, f es una función medible, y la función $f\chi_E$ es integrable, se dice que f es* integrable sobre E *y se define*

$$\int_E f \, dx = \int f\chi_E \, dx.$$

Definición 1.28 *Si f es una función medible tal que, al menos, una de las dos integrales $\int f^+ \, dx$, $\int f^- \, dx$ es finita, se define*

$$\int f \, dx = \int f^+ \, dx - \int f^- \, dx.$$

Observación 1.29 *La Definición 1.28, que permite a las integrales tomar valores infinitos, generaliza la Definición 1.8. Pero se dice que f es integrable sólo si se satisfacen las condiciones de la Definición 1.26, es decir, si $|f|$ tiene una integral finita.*

Teorema 1.30 *Sean f, g funciones integrables. Entonces:*

(i) *Si $a \in \mathbb{R}$, la función af es integrable, y $\int (af) \, dx = a \int f \, dx$.*

(ii) *$f+g$ es integrable, y $\int (f+g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$.*

(iii) *Si $f = 0$ c.t.p., entonces $\int f \, dx = 0$.*

(iv) *Si $f \leq g$ c.t.p., entonces $\int f \, dx \leq \int g \, dx$.*

(v) *Si A, B son conjuntos medibles disjuntos, entonces $\int_A f \, dx + \int_B f \, dx = \int_{A\cup B} f \, dx$.*

Demostración.

(i) *Caso 1:* $a \geq 0$. Entonces $(af)^+ = af^+$, $(af)^- = af^-$, de modo que $\int (af)^+ \, dx < \infty$ y $\int (af)^- \, dx < \infty$. Sigue que af es integrable, con

$$\int af \, dx = \int af^+ \, dx - \int af^- \, dx = a\int f^+ \, dx - a\int f^- \, dx = a\int f \, dx.$$

Caso 2: $a = -1$. Entonces $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$. Sigue que $-f$ es integrable, con

$$\int (-f)\,dx = \int f^-\,dx - \int f^+\,dx = -\int f\,dx.$$

Caso 3: $a < 0$. Entonces $af = -|a|f$. Combinando los dos casos anteriores sigue que af es integrable, con

$$\int af\,dx = \int (-|a|f)\,dx = -\int |a|f\,dx = -|a|\int f\,dx = a\int f\,dx.$$

Esto prueba (i).

(ii) Puesto que

$$(f+g)^+ \le f^+ + g^+, \quad (f+g)^- \le f^- + g^-,$$

la función $f+g$ es integrable. Para verificar estas desigualdades, obsérvese que si $f+g \le 0$, entonces $(f+g)^+ = 0 \le f^+ + g^+$, mientras que si $f+g > 0$, entonces

$$(f+g)^+ = f+g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-) \le f^+ + g^+;$$

en consecuencia,

$$(f+g)^- = (-f-g)^+ \le (-f)^+ + (-g)^+ = f^- + g^-.$$

Por otra parte,

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ + g^+ - f^- - g^-$$

implica

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+; \tag{10}$$

aplicando el Teorema 1.21 a ambos miembros de (10) y reordenando los términos, queda establecido (ii).

(iii) Se cumple que $f^+ = 0$ c.t.p. y $f^- = 0$ c.t.p., así que, por el Ejemplo 1.13, $\int f^+\,dx = \int f^-\,dx = 0$.

(iv) Ya que $g = f + (g-f)$, se verifica

$$\int g\,dx = \int f\,dx + \int (g-f)^+\,dx - \int (g-f)^-\,dx.$$

Ahora basta tener en cuenta que $(g-f)^- = 0$ c.t.p. y aplicar (iii).

(v) Esta propiedad se deduce de la Definición 1.27, la identidad $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ y el apartado (ii). □

Observación 1.31 *El Teorema 1.30 asegura que si $f = g$ c.t.p. y f, g son integrables, entonces $\int f\,dx = \int g\,dx$. Cabe extender nuestros resultados al caso en que f es medible, está definida excepto en un conjunto E con $m(E) = 0$, y $\int_{E^c} |f|\,dx < \infty$. Damos entonces un valor arbitrario a f sobre E para obtener una función g que, claramente, es integrable. Como $f = g$ c.t.p., podemos definir $\int f\,dx = \int g\,dx$. Esta extensión tendrá interés, por ejemplo, en el Teorema 1.41 donde aparecen, de forma natural, funciones definidas sólo c.t.p..*

Ejemplo 1.32 *Demostrar que si la función f es integrable, entonces*

$$\left|\int f\,dx\right| \le \int |f|\,dx. \tag{11}$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Resolución. Aplicaremos el Teorema 1.30. Como $f \le |f|$, se tiene que $\int f\,dx \le \int |f|\,dx$. Además, $-f \le |f|$, así que $-\int f\,dx \le \int |f|\,dx$. Luego, se satisface (11).

Para que se dé la igualdad en (11), es condición necesaria que, si $\int f\,dx \geq 0$, entonces $\int |f|\,dx = \int f\,dx$, esto es, $\int (|f| - f)\,dx = 0$, de modo que, por el Ejemplo 1.13, $|f| = f$ c.t.p.; y si $\int f\,dx < 0$, entonces $\int |f|\,dx = \int (-f)\,dx$, esto es, $\int (|f| + f)\,dx = 0$, así que $|f| = -f$ c.t.p.. Se concluye que $f \geq 0$ c.t.p., o bien $f \leq 0$ c.t.p., es una condición necesaria. Claramente, esta condición también es suficiente. □

Ejemplo 1.33 *Probar que si f y g son medibles, con $|f| \leq |g|$ c.t.p., y g es integrable, entonces f es integrable.*

Resolución. Redefiniendo f, en caso necesario, sobre un conjunto de medida nula, no se pierde generalidad al suponer que $|f| \leq |g|$. De este modo (Teorema 1.14), $\int |f|\,dx \leq \int |g|\,dx < \infty$. □

Ejemplo 1.34 *Demostrar que si f toma valores en la recta real extendida y es integrable, entonces es finita c.t.p..*

Resolución. Si $|f| = \infty$ sobre un conjunto E con $m(E) > 0$, entonces

$$\infty > \int |f|\,dx > n\,m(E) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

una contradicción. □

Ejemplo 1.35 *Si f es medible, $m(E) < \infty$, y $A \leq f \leq B$ sobre E, entonces f es integrable sobre E, con*

$$A\,m(E) \leq \int_E f\,dx \leq B\,m(E).$$

Resolución. Se tiene que $|f\chi_E| \leq (|A| + |B|)\chi_E$. Como $m(E) < \infty$, las funciones $A\chi_E$, $f\chi_E$ y $B\chi_E$ son integrables; además, $A\chi_E \leq f\chi_E \leq B\chi_E$. Basta aplicar el Teorema 1.30 (iv). □

Ejemplo 1.36 *Si f es medible, g integrable, y α, β son números reales tales que $\alpha \leq f \leq \beta$ c.t.p., entonces existe un número real γ, con $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, tal que*

$$\int f|g|\,dx = \gamma \int |g|\,dx.$$

Resolución. Como $|fg| \leq (|\alpha| + |\beta|)|g|$ c.t.p., el Ejemplo 1.33 asegura que fg es integrable. Por otra parte, $\alpha|g| \leq f|g| \leq \beta|g|$ c.t.p., así que

$$\alpha \int |g|\,dx \leq \int f|g|\,dx \leq \beta \int |g|\,dx.$$

Si $\int |g|\,dx = 0$, entonces $g = 0$ c.t.p. y no hay nada más que probar. Si $\int |g|\,dx \neq 0$, tomamos

$$\gamma = \left(\int f|g|\,dx\right)\left(\int |g|\,dx\right)^{-1},$$

que cumple las condiciones requeridas. □

Ejemplo 1.37 *Extender el Teorema 1.30 a cualesquiera funciones cuyas integrales existan en el sentido de la Definición 1.28.*

Resolución. Consideremos, por ejemplo, la extensión de (ii):

Teorema. Si las integrales $\int f\,dx$ y $\int g\,dx$ y la suma $\int f\,dx + \int g\,dx$ están definidas, entonces existe $\int (f+g)\,dx$, y se verifica que

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx. \tag{12}$$

Para demostrarlo, supongamos, fijando ideas, que $\int f\,dx = \int g\,dx = \infty$. Entonces $\int f^+\,dx = \int g^+\,dx = \infty$, $\int f^-\,dx < \infty$ y $\int g^-\,dx < \infty$; como $(f+g)^- \leq f^- + g^-$, también $\int (f+g)^-\,dx < \infty$. Integrando (10) se obtiene

$$\int (f+g)^+\,dx + \int f^-\,dx + \int g^-\,dx = \int (f+g)^-\,dx + \int f^+\,dx + \int g^+\,dx. \tag{13}$$

Ya que las integrales de las partes negativas son todas finitas, podemos trasponer términos en (13) para obtener (12):

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,dx &= \int (f+g)^+\,dx - \int (f+g)^-\,dx \\ &= \int f^+\,dx - \int f^-\,dx + \int g^+\,dx - \int g^-\,dx \\ &= \int f\,dx + \int g\,dx = \infty.\end{aligned}$$

Vale un argumento similar si, digamos, $\int f\,dx = \infty$ y $\left|\int g\,dx\right| < \infty$. Los casos restantes se resuelven aplicando (12) a $-f$ y $-g$ y a $-f$, respectivamente. $\square$

Abordamos ya el principal resultado de esta sección.

Teorema 1.38 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ $(n \in \mathbb{N})$, con g integrable, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p.. Entonces f es integrable, y*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int f\,dx. \tag{14}$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|f_n| \leq g$ y, por tanto, $|f| \leq g$ c.t.p.; sigue del Ejemplo 1.33 que f_n y f son integrables. Además, $\{g+f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones medibles no negativas; aplicando el lema de Fatou, se obtiene

$$\int \liminf_{n\to\infty} (g+f_n)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g+f_n)\,dx.$$

Por tanto,

$$\int g\,dx + \int f\,dx \leq \int g\,dx + \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

Como $\int g\,dx < \infty$, resulta que

$$\int f\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx. \tag{15}$$

De nuevo, $\{g-f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, así que

$$\int \liminf_{n\to\infty} (g-f_n)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n)\,dx.$$

Luego,

$$\int g\,dx - \int f\,dx \leq \int g\,dx - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,dx,$$

de donde

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,dx \leq \int f\,dx.$$

Combinamos esta desigualdad con (15) para probar (14):

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,dx \leq \int f\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$ $\square$

Ejemplo 1.39 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.38, demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, dx = 0$.

Resolución. Se tiene que $|f_n - f| \leq 2g$ $(n \in \mathbb{N})$, con $\lim_{n\to\infty} |f_n - f| = 0$ c.t.p.. Basta aplicar el Teorema 1.38 a la sucesión $\{|f_n - f|\}_{n=1}^{\infty}$. □

Ejemplo 1.40 *El Teorema 1.38 se refiere a una sucesión funcional* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Enunciar y probar una versión de este teorema válida para una familia indexada en un parámetro continuo.*

Resolución. Enunciamos el siguiente:

Teorema. Para cada $\xi \in [a,b]$, $-\infty \leq a < b < \infty$, *sea* f_ξ *una función medible tal que* $|f_\xi| \leq g$, *donde la función* g *es integrable, y supongamos que* $\lim_{\xi\to\xi_0} f_\xi = f$ *c.t.p., con* $\xi_0 \in [a,b]$. *Entonces* f *es integrable, y*

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \int f_\xi \, dx = \int f \, dx. \tag{16}$$

Para demostrarlo, sea $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[a,b]$, tal que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$. La sucesión $\{f_{\xi_n}\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las condiciones del Teorema 1.38, por lo que f es integrable. Supongamos que no se verifica (16). Entonces, existen $\delta > 0$ y una sucesión $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \xi_0$, tales que

$$\left| \int f_{\beta_n} \, dx - \int f \, dx \right| > \delta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aplicando el Teorema 1.38 a la sucesión $\{f_{\beta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ resulta una contradicción. □

El próximo resultado es de gran interés práctico.

Teorema 1.41 *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones integrables, tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, dx < \infty. \tag{17}$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge c.t.p. a una función integrable* f, *y se verifica que*

$$\int f \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, dx. \tag{18}$$

Demostración. Sea $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. El teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) y la condición (17) aseguran que

$$\int \varphi \, dx = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, dx < \infty,$$

así que, en virtud del Ejemplo 1.34, φ toma valores finitos c.t.p.. Sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es absolutamente convergente c.t.p. y, por tanto, su suma f está definida c.t.p.. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, entonces g_n es medible, $|g_n| \leq \varphi$, con φ integrable, y $\lim_{n\to\infty} g_n = f$ c.t.p., de modo que, por el Teorema 1.38, f es integrable y

$$\int f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int f_i \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, dx,$$

probando (18). □

Ejemplo 1.42 *En los Teoremas 1.38 y 1.41 podemos suponer que las hipótesis se verifican solamente sobre un conjunto medible E. Se deduce entonces la validez de (14) y (18), con las integrales extendidas a E, sin más que reemplazar los correspondientes integrandos por su producto con χ_E.*

Ejemplo 1.43

(i) *Si f es integrable, entonces*

$$\int f\,dx = \lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,dx. \tag{19}$$

(ii) *Supongamos que f es integrable en $[a,b]$, y sea $0<\varepsilon<b-a$. Entonces,*

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f\,dx.$$

Resolución. Se tiene que

$$\int_a^b f\,dx = \int_{-\infty}^b f\,\chi_{[a,\infty)}\,dx.$$

Pero, por el Ejemplo 1.40,

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{-\infty}^b f\,\chi_{[a,\infty)}\,dx = \int_{-\infty}^b f\,dx = \int f\,\chi_{(-\infty,b]}\,dx.$$

Aplicando de nuevo el Ejemplo 1.40 se obtiene la primera igualdad de (19). La segunda y (ii) se prueban de modo similar. □

El siguiente teorema permite calcular integrales de Lebesgue mediante los procedimientos que nos son familiares.

Teorema 1.44 *Si f es continua en el intervalo acotado $[a,b]$, entonces f es integrable y $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $(a<x<b)$ es derivable, con $F'(x)=f(x)$.*

Demostración. Como f es continua, es medible y está acotada, así que f es integrable en $[a,b]$ y F está bien definida. Si $a<x<b$, entonces $x\pm h\in(a,b)$ para $h>0$ suficientemente pequeño. Consideraremos únicamente las derivadas laterales por la derecha, pues las derivadas por la izquierda, que corresponden al cociente incremental para $x-h$, se tratan análogamente.

Sean α y β los valores mínimo y máximo, respectivamente, que alcanza f en $[x,x+h]$. Por el Ejemplo 1.36, aplicado a la función medible f y a la función integrable $\chi_{[x,x+h]}$, tenemos

$$F(x+h)-F(x) = \int f(t)\,\chi_{[x,x+h]}(t)\,dt = \gamma\int \chi_{[x,x+h]}(t)\,dt = h\gamma$$

para algún $\gamma\in[\alpha,\beta]$. La continuidad de f (teorema del valor intermedio) proporciona $\xi=x+\theta h$, con $0\le\theta\le 1$, tal que $\gamma=f(\xi)$, esto es,

$$F(x+h)-F(x)=h\,f(x+\theta h).$$

Basta dividir ambos miembros de esta igualdad por h, hacer $h\to 0$ y apelar, de nuevo, a la continuidad de f para obtener el resultado. □

Corolario 1.45 *Las integrales de las funciones continuas sobre intervalos acotados se pueden calcular de la forma habitual, utilizando primitivas (regla de Barrow).*

Corolario 1.46 *Del Ejemplo 1.43 se sigue que es posible calcular la integral de una función continua, integrable en un intervalo infinito, si se conoce su integral indefinida.*

Corolario 1.47 *También es posible emplear las técnicas de integración por partes y por sustitución si todas las funciones involucradas son continuas e integrables. En estas condiciones, los intervalos no acotados se pueden tratar como en el Ejemplo 1.43.*

Corolario 1.48 *Es posible calcular la integral de una función continua a trozos como se indica en el Corolario 1.45, sin más que dividir apropiadamente su dominio.*

Usando el Teorema 1.44 y sus corolarios, cabe dar ejemplos específicos que ilustran distintos usos del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 1.38).

Ejemplo 1.49 *Probar que, si $\alpha > 1$,*

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1+(nx)^\alpha}\,dx = o\left(n^{-1}\right) \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Resolución. Hemos de demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\,\mathrm{sen}\,x}{1+(nx)^\alpha}\,dx = 0.$$

Como, claramente, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{nx\,\mathrm{sen}\,x}{1+(nx)^\alpha} = 0$, buscamos aplicar el Teorema 1.38 a la sucesión

$$f_n(x) = \frac{nx\,\mathrm{sen}\,x}{1+(nx)^\alpha} \quad (n \in \mathbb{N})$$

para intercambiar el límite con la integral y obtener así la conclusión requerida. Puesto que la función $g(x) = 1/\sqrt{x}$ es integrable en $(0,1)$, nos planteamos validar la estimación

$$\left|\frac{nx\,\mathrm{sen}\,x}{1+(nx)^\alpha}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (0 < x < 1), \tag{20}$$

al menos, para todo n suficientemente grande. Y puesto que

$$\left|\frac{nx\,\mathrm{sen}\,x}{1+(nx)^\alpha}\right| \le \frac{nx}{1+(nx)^\alpha},$$

bastará ver que, para n grande,

$$\frac{nx}{1+(nx)^\alpha} \le \frac{1}{\sqrt{x}},$$

o bien

$$\frac{nx^{3/2}}{1+(nx)^\alpha} \le 1 \quad (0 < x < 1). \tag{21}$$

Con este objeto, fijados $\alpha > 1$ y $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función auxiliar $h_n(x) = 1+(nx)^\alpha - nx^{3/2}$, de modo que $h_n(0) = 1$, $h_n(1) = 1+n^\alpha - n > 1$. Pretendemos demostrar que el mínimo de h_n en $[0,1]$ es estrictamente positivo, de donde seguirá (21) y, con ello, (20). Hallamos entonces los puntos críticos de h_n:

$$h_n'(x) = \alpha n^\alpha x^{\alpha-1} - \frac{3n}{2}x^{1/2} = x^{1/2}\left(\alpha n^\alpha x^{\alpha-3/2} - \frac{3n}{2}\right) = 0.$$

Para $\alpha > 1$ y $n \in \mathbb{N}$ cualesquiera, una solución de esta ecuación es $x_0 = 0$. Si $\alpha = 3/2$ entonces

$$\frac{3n^{3/2}}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{3n}{2}\left(n^{1/2}-1\right) = 0,$$

con $n \in \mathbb{N}$, implica $n = 1$; es decir, para n suficientemente grande, h_n no tiene puntos críticos en $(0,1)$. Cuando $\alpha \ne 3/2$, obtenemos el punto crítico

$$x_n = \left(\frac{2\alpha n^{\alpha-1}}{3}\right)^{\frac{1}{3/2-\alpha}} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{22}$$

Ahora:

- Si $1 < \alpha < 3/2$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$: para n suficientemente grande, no hay puntos críticos de h_n en $(0,1)$.

- Si $\alpha > 3/2$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$: para n suficientemente grande, hay un punto crítico de h_n en $(0,1)$.

Encontramos así que, para n grande:

- Cuando $1 < \alpha \leq 3/2$, no hay puntos críticos de h_n en $(0,1)$. Como $h_n(0) = 1$ y $h_n(1) > 1$, $x_0 = 0$ es un mínimo absoluto de esta función continua en el compacto $[0,1]$, así que $h_n(x) \geq 1$ para todo $x \in [0,1]$.

- Cuando $\alpha > 3/2$, el punto x_n dado por (22) es el único punto crítico de h_n en $(0,1)$; comprobemos que se trata de un mínimo. Como
$$h_n''(x) = \alpha n^\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - \frac{3n}{4}x^{-1/2} = x^{-1/2}\left[\alpha n^\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-3/2} - \frac{3n}{4}\right],$$
el signo de $h_n''(x_n)$ será el de
$$\alpha n^\alpha(\alpha-1)x_n^{\alpha-3/2} - \frac{3n}{4} = \alpha n^\alpha(\alpha-1)\left(\frac{2\alpha n^{\alpha-1}}{3}\right)^{\frac{2}{3-2\alpha}\frac{3-2\alpha}{-2}} - \frac{3n}{4} = \frac{3n}{2}\left(\alpha - \frac{3}{2}\right) > 0,$$
corroborando que x_n es un mínimo. Además,
$$\begin{aligned} h_n(x_n) = 1 + (nx_n)^\alpha - nx_n^{3/2} &= 1 + n^\alpha\left(\frac{2\alpha n^{\alpha-1}}{3}\right)^{\frac{2\alpha}{3-2\alpha}} - n\left(\frac{2\alpha n^{\alpha-1}}{3}\right)^{\frac{3}{3-2\alpha}} \\ &= 1 + \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^{\frac{2\alpha}{3-2\alpha}} n^{\alpha+\frac{2\alpha(\alpha-1)}{3-2\alpha}} - \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{3-2\alpha}} n^{1+\frac{3(\alpha-1)}{3-2\alpha}} \\ &= 1 + \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^{\frac{2\alpha}{3-2\alpha}} n^{\frac{\alpha}{3-2\alpha}} - \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{3-2\alpha}} n^{\frac{\alpha}{3-2\alpha}} \\ &= 1 + n^{\frac{\alpha}{3-2\alpha}}\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^{\frac{2\alpha}{3-2\alpha}}\left(1 - \frac{2\alpha}{3}\right) < 1 \end{aligned}$$
tiende a 1 cuando $n \to \infty$, de manera que $h_n(x) > 0$ cualquiera que sea $x \in [0,1]$.

En definitiva: si n es suficientemente grande, se verifica que $h_n(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$, así que vale (20) y es lícito aplicar el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38) para obtener el resultado. □

Ejemplo 1.50 *Demostrar que*
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n}\,dx = 1.$$

Resolución. Para $x > 0$ y $n \geq 2$,
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{x^2}{2} + \cdots > \frac{x^2}{4}.$$
Definiendo
$$g(x) = \begin{cases} 4x^{-2}, & x \geq 1 \\ x^{-1/2}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$
encontramos que
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n} < g(x) \quad (x > 0,\ n \geq 2).$$
Como g es integrable en $(0,\infty)$:
$$\int_0^\infty g\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{4}{x^2}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 - \frac{4}{x}\Big|_1^\infty = 6,$$
sin más que aplicar convergencia dominada (Teorema 1.38), concluimos:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$
□

Ejemplo 1.51 *Probar que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = 0$$

si $a>0$*, pero no si* $a=0$*.*

Resolución. Si $a>0$, sustituimos $u=nx$ para obtener

$$\int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_{na}^\infty \frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\,du = \int_0^\infty \frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\,\chi_{(na,\infty)}(u)\,du,$$

donde el último integrando está mayorado por la función integrable ue^{-u^2}. Como $a>0$, es

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\,\chi_{(na,\infty)}(u) = 0,$$

y el resultado sigue del Teorema 1.38.

Si $a=0$, la misma sustitución y una nueva aplicación del Teorema 1.38 establecen que

$$\int_0^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\,du \longrightarrow \int_0^\infty ue^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}$$

cuando $n\to\infty$. □

Ejemplo 1.52 *Sea* f *una función no negativa, integrable en* $[0,1]$*. Existe una función medible* φ *tal que* φf *es integrable en* $[0,1]$ *y* $\varphi(0+)=\infty$*.*

Resolución. Del Ejemplo 1.40 se deduce fácilmente que $\lim_{a\to 0}\int_0^a f\,dx = 0$. Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $x_n\in(0,1)$ tal que $\int_0^{x_n} f\,dx \le n^{-3}$, y podemos suponer que $x_n \searrow 0$ cuando $n\to\infty$. Definimos $\varphi = \sum_{k=2}^\infty (k-1)\chi_{(x_k,x_{k-1}]}$, de modo que $\varphi(0+)=\infty$. Puesto que

$$\int_{x_k}^{x_{k-1}} (k-1)f\,dx \le (k-1)\int_0^{x_{k-1}} f\,dx \le \frac{k-1}{(k-1)^3} = \frac{1}{(k-1)^2},$$

el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) proporciona, finalmente:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi f\,dx &= \int_0^1\left(\sum_{k=2}^\infty (k-1)f\chi_{(x_k,x_{k-1}]}\right)dx = \sum_{k=2}^\infty\int_{x_k}^{x_{k-1}}(k-1)f\,dx\\ &\le \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{(k-1)^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$ □

Tal como se mencionó en la Sección 2.3 del Tema 1, el tercer principio de Littlewood afirma que «toda sucesión convergente de funciones medibles es casi uniformemente convergente». Terminamos esta sección formulando y demostrando rigurosamente dicho principio.

Definición 1.53 *Se dice que una sucesión de funciones medibles* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$*, definida en un conjunto medible* A*, converge* casi uniformemente *sobre* A *a la función medible* f *si para cada* $\varepsilon>0$*, existe un conjunto medible* $E\subset A$*, con* $m(E)<\varepsilon$*, tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *uniformemente sobre* $A\setminus E$*.*

Teorema 1.54 *Sea* $A\in\mathscr{M}$*, y supongamos que* f_n $(n\in\mathbb{N})$*,* f *son funciones medibles tales que* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *c.t.p. en* A*. Si*

(*i*) $m(A)<\infty$*, o bien*

(*ii*) *existe una función integrable* g *tal que* $|f_n|\le g$ $(n\in\mathbb{N})$*,*

entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *converge a* f *casi uniformemente sobre* A*.*

Demostración. Escribimos

$$E_{k,n}=\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{x\in A:|f_m(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\right\}\quad (k,n\in\mathbb{N}).$$

Basta probar que, para cada $k\in\mathbb{N}$, es $\lim_{n\to\infty} m\left(A\setminus E_{k,n}\right)=0$. Pues, en tal caso, dado $\varepsilon>0$, se tiene $m\left(A\setminus E_{k,n_k}\right)<\varepsilon 2^{-k}$ para cierto $n_k\in\mathbb{N}$; poniendo $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{k,n_k}$ encontramos que $m(A\setminus E)<\varepsilon$ y, sobre E, $|f_m-f|<1/k$ para $m\geq n_k$, así que $\lim_{m\to\infty} f_m=f$ casi uniformemente sobre A.

En efecto, fijemos $k\in\mathbb{N}$. Ya que

$$\left\{x\in A:\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x)\right\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{k,n},$$

el conjunto complementario, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A\setminus E_{k,n})$, tiene medida nula. Como la sucesión $\{A\setminus E_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, queda garantizado que $\lim_{n\to\infty} m\left(A\setminus E_{k,n}\right)=0$ si $m\left(A\setminus E_{k,n}\right)<\infty$ para algún n. En el caso (i), esto es obvio y no hay nada más que probar. En el caso (ii), se tiene que $|f_m-f|\leq 2g$ $(m\in\mathbb{N})$, y entonces

$$A\setminus E_{k,n}=\bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{x\in A:|f_m(x)-f(x)|\geq\frac{1}{k}\right\}\subset\left\{x\in A:g(x)\geq\frac{1}{2k}\right\}.$$

Dado que g integrable, este último conjunto tiene medida finita, lo que completa la demostración. □

Observación 1.55 *(i) El caso $m(A)<\infty$ del Teorema 1.54 recibe el nombre de teorema de Egorov.*

(ii) El teorema de Egorov no asegura que se pueda obtener la convergencia uniforme en todo A. Por ejemplo, la sucesión

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & x\in[0,1/n)\\ -n^2x+2n, & x\in[1/n,2/n)\\ 0, & \textit{en otro caso,}\end{cases}$$

cumple que $\lim_{n\to\infty} f_n=0$ en $[0,1]$, pero la convergencia no es uniforme en todo $[0,1]$.

(iii) Tampoco es posible asegurar la convergencia uniforme salvo en un conjunto de medida cero. Para comprobarlo, sea $g_n=\chi_{(0,1/n)}$ $(n\in\mathbb{N})$. La sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$ y, por el teorema de Egorov, casi uniformemente. Sin embargo, es falso que dicha sucesión converja uniformemente a cero en $[0,1]$ salvo un conjunto de medida nula.

Observación 1.56 *Las hipótesis del Teorema 1.54 no pueden ser debilitadas. Un contraejemplo ilustrativo es la sucesión $\left\{\chi_{[n,n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, definida sobre $A=[0,\infty)$.*

1.3 Integración de series

En los siguientes ejemplos queremos expresar $\int f\,dx$ como una serie. Desarrollamos $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para obtener $\int f\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,dx$, siempre que podamos justificar el intercambio del sumatorio con la integral. Si las funciones $f_n(x)$ tienen signo constante para cualesquiera x y $n\in\mathbb{N}$, podemos apelar al teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22). Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,dx$ es alternada, se podría invocar el Teorema 1.38. Finalmente, si se demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|\,dx$ converge, cabe recurrir al Teorema 1.41. En la mayoría de los casos se dispone de más de un método.

Ejemplo 1.57 *Probar que*

$$\int_0^1\frac{x^{1/3}}{1-x}\ln\frac{1}{x}\,dx=9\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)^2}.$$

Resolución. Se tiene que
$$\frac{x^{1/3}}{1-x}\ln\frac{1}{x}=x^{1/3}\ln\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (0<x<1).$$
Por el Teorema 1.22,
$$\int_0^1\frac{x^{1/3}}{1-x}\ln\frac{1}{x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{n+1/3}\ln\frac{1}{x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9}{(3n+4)^2}=9\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)^2}.$$
Para obtener la penúltima igualdad se ha integrado por partes:
$$\int_0^1 x^{n+1/3}\ln\frac{1}{x}\,dx=\int_1^0 x^{n+1/3}\ln x\,dx=\frac{3}{3n+4}x^{n+4/3}\ln x\Big|_1^0+\frac{3}{3n+4}\int_0^1 x^{n+1/3}\,dx=\frac{9}{(3n+4)^2}.$$ □

Ejemplo 1.58 *Demostrar que*
$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{e^t-x}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2+1}\quad (0<|x|\le 1).$$
Resolución. Cuando $t>0$ es $0<|xe^{-t}|<1$, y podemos escribir el integrando en la forma
$$\frac{\operatorname{sen}t}{e^t-x}=\frac{e^{-t}}{1-xe^{-t}}\operatorname{sen}t=\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{-t})^n e^{-t}\operatorname{sen}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^n e^{-(n+1)t}\operatorname{sen}t=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x^n e^{-(n+1)t}\operatorname{sen}t.$$
Además, $|\operatorname{sen}t|<t$. En efecto: como $|\operatorname{sen}t|\le 1$ cualquiera que sea t, si $t\ge\pi$ no hay nada que probar; si $0<t<\pi$, entonces $|\operatorname{sen}t|=\operatorname{sen}t$, la función $h(t)=\operatorname{sen}t-t$ es decreciente, puesto que $h'(t)=\cos t-1<0$, y $h(0)=0$, así que $h(t)<0$ en dicho intervalo. Ahora,
$$\left|\sum_{n=0}^{N}x^n e^{-(n+1)t}\operatorname{sen}t\right|<te^{-t}\left|\sum_{n=0}^{N}(xe^{-t})^n\right|=te^{-t}\frac{1-x^{N+1}e^{-(N+1)t}}{1-xe^{-t}}\le\frac{2t}{e^t-x},$$
donde la función mayorante es integrable en $(0,\infty)$: para $-1\le x<0$,
$$\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-x}\,dt\le\int_0^{\infty}te^{-t}\,dt=\Gamma(2)=1,$$
mientras que para $0<x\le 1$ y $t>0$ se tiene $t\le e^t-1\le e^t-x$ (la función $h(t)=t-e^t+1$ es decreciente, con $h(0)=0$), y entonces
$$\int_0^1\frac{t}{e^t-x}\,dt\le\int_0^1\frac{e^t-1}{e^t-x}\,dt\le\int_0^1 dt=1,$$
$$\int_1^{\infty}\frac{t}{e^t-x}\,dt=\int_1^{\infty}\frac{te^{-t}}{1-xe^{-t}}\,dt\le\frac{1}{1-xe^{-1}}\int_1^{\infty}te^{-t}\,dt\le\frac{1}{1-xe^{-1}}=\frac{e}{e-x}.$$
Aplicando convergencia dominada (Teorema 1.38) a la sucesión de sumas parciales y trasladando los índices resulta, finalmente:
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{e^t-x}\,dt&=\int_0^{\infty}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x^n e^{-(n+1)t}\operatorname{sen}t\right)dt=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x^n\int_0^{\infty}e^{-(n+1)t}\operatorname{sen}t\,dt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\int_0^{\infty}e^{-(n+1)t}\operatorname{sen}t\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2+1}.\end{aligned}$$
Recuérdese que la integral cíclica
$$\int_0^{\infty}e^{-(n+1)t}\operatorname{sen}t\,dt=-\frac{e^{-(n+1)t}\left[\cos t+(n+1)\operatorname{sen}t\right]}{(n+1)^2+1}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{(n+1)^2+1}.$$
se calcula reiterando una integración por partes. □

Ejemplo 1.59 *Probar que*
$$\int_0^1 \operatorname{sen} x \ln x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\,(2n)!}.$$

Resolución. Escribimos
$$\operatorname{sen} x \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Integrando por partes se obtiene, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\int_0^1 |f_n| \; dx = \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ln x \right| dx = -\left[\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\ln x - \frac{1}{2n+2} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{(2n+2)\,(2n+2)!},$$
$$\int_0^1 f_n \, dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ln x \, dx = \left[\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\ln x - \frac{1}{2n+2} \right) \right]_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)\,(2n+2)!}.$$

El criterio del cociente muestra que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_n| \; dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)\,(2n+2)!}$$

converge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+4)\,(2n+4)!} : \frac{1}{(2n+2)\,(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\,(2n+2)!}{(2n+4)\,(2n+4)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{(2n+4)^2(2n+3)} = 0 < 1.$$

Ahora basta aplicar el Teorema 1.41 y trasladar los índices para concluir que

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x \ln x \, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)\,(2n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\,(2n)!}. \qquad \square$$

1.4 Las integrales de Riemann y Lebesgue

Consideremos la integral de Riemann de una función acotada f definida sobre un intervalo acotado $[a,b]$. Dada una partición $D = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b\}$ de $[a,b]$, obtenemos la suma superior de Darboux

$$S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \,(\xi_i - \xi_{i-1}),$$

donde $M_i = \sup_{[\xi_{i-1},\xi_i]} f$ $(i = 1,\ldots,n)$. Similarmente, reemplazando M_i por $m_i = \inf_{[\xi_{i-1},\xi_i]} f$ $(i = 1,\ldots,n)$, obtenemos la suma inferior de Darboux

$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \,(\xi_i - \xi_{i-1}).$$

Recordemos que f es integrable Riemann sobre $[a,b]$ si dado $\varepsilon > 0$, existe una partición D de $[a,b]$ tal que $S_D - s_D < \varepsilon$. En tal caso se tiene que $\inf S_D = \sup s_D$, donde el ínfimo y el supremo se toman sobre todas las posibles particiones D de $[a,b]$, y ese valor común, que se denota por $(\mathrm{R}) \displaystyle\int_a^b f \, dx$, se denomina integral de Riemann de f sobre $[a,b]$.

Teorema 1.60 *Si f es integrable Riemann en $[a,b]$, entonces f es integrable (Lebesgue) y $\displaystyle\int_a^b f \, dx = (\mathrm{R}) \int_a^b f \, dx$.*

Demostración. Sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que $S_{D_n} - s_{D_n} < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se advierte fácilmente que

$$S_{D_n} = \int_a^b u_n \, dx \quad y \quad s_{D_n} = \int_a^b l_n \, dx,$$

donde u_n y l_n son funciones escalonadas satisfaciendo $l_n \leq f \leq u_n$ $(n \in \mathbb{N})$. En efecto, podemos tomar, por ejemplo, $u_n = M_i$ sobre (ξ_{i-1}, ξ_i), y en cada punto de la partición definir u_n como el promedio de los valores M_i que corresponden a los intervalos con extremos en ese punto; y similarmente con l_n. Escribiendo $U = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ y $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} l_n$, se tiene entonces:

$$l_n \leq L \leq f \leq U \leq u_n \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{23}$$

Además, las funciones u_n, l_n $(n \in \mathbb{N})$ son medibles y, por lo tanto, U, L también lo son.

Afirmamos que $U = L$ c.t.p., es decir, que el conjunto

$$\{x : U(x) - L(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : U(x) - L(x) > \frac{1}{k}\right\}$$

tiene medida nula. Para probar nuestra afirmación, basta ver que cada uno de los conjuntos que comparecen en el segundo miembro de esta igualdad tiene medida nula. A tal fin, fijemos $k, n \in \mathbb{N}$. Si $U(x) - L(x) > 1/k$, sigue de (23) que $u_n(x) - l_n(x) > 1/k$; es decir, $\{x : U(x) - L(x) > 1/k\} \subset \{x : u_n(x) - l_n(x) > 1/k\}$. Por tanto, poniendo $m(\{x : U(x) - L(x) > 1/k\}) = r$, encontramos que $m(\{x : u_n(x) - l_n(x) > 1/k\}) \geq r$ y, consecuentemente,

$$\frac{r}{k} < \int_a^b (u_n - l_n)\ dx = \int_a^b u_n\, dx - \int_a^b l_n\, dx = S_{D_n} - s_{D_n} < \frac{1}{n},$$

es decir, $r/k < 1/n$; la arbitrariedad de $n \in \mathbb{N}$ obliga a que $r = 0$. Luego, efectivamente, $U = L$ c.t.p..

Ahora, como $L \leq f \leq U$, resulta que $f = U = L$ c.t.p. y, en particular, f es medible. Siendo acotada, f es integrable (Ejemplo 1.35). La monotonía de la integral de Lebesgue aplicada a (23) implica

$$s_{D_n} = \int_a^b l_n\, dx \leq \int_a^b f\, dx \leq \int_a^b u_n\, dx = S_{D_n} \quad (n \in \mathbb{N});$$

pero, como f es integrable Riemann, también se cumple que

$$s_{D_n} \leq (\mathrm{R}) \int_a^b f\, dx \leq S_{D_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tanto,

$$\left| \int_a^b f\, dx - (\mathrm{R}) \int_a^b f\, dx \right| \leq S_{D_n} - s_{D_n} < \frac{1}{n}.$$

Haciendo aquí $n \to \infty$, ya concluimos

$$\int_a^b f\, dx = (\mathrm{R}) \int_a^b f\, dx. \qquad \square$$

Ejemplo 1.61 *La función de Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, o su función complementaria $g = \chi_{\mathbb{Q}^c\cap[0,1]}$, muestran que el recíproco del Teorema 1.60 es, en general, falso.*

Resolución. En efecto, ya sabíamos que f no es integrable Riemann, y lo mismo ocurre con g: para ambas funciones y cualquier partición D de $[0,1]$, se verifica que $S_D = 1$, mientras que $s_D = 0$. Sin embargo, dado que $f = 0$ (respectivamente, $g = 1$) c.t.p., f (respectivamente, g) es medible, con $\int_0^1 f\, dx = 0$ (respectivamente, $\int_0^1 g\, dx = 1$). $\square$

Como las funciones f y g del Ejemplo 1.61 son discontinuas en cada $x \in [0,1]$, también se puede probar que no son integrables Riemann mediante el teorema siguiente. De hecho, el Teorema 1.62 revela que la clase de las funciones integrables Riemann es bastante restringida.

Teorema 1.62 (Criterio de Lebesgue[1] para la integrabilidad Riemann) *Sea f una función acotada, definida en el intervalo acotado $[a,b]$. Se tiene que f es integrable Riemann sobre $[a,b]$ si, y sólo si, f es continua c.t.p..*

[1]Aunque en la literatura es frecuente encontrarlo atribuido únicamente a Lebesgue, este criterio fue probado simultánea e independientemente por Giuseppe Vitali en 1907.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable Riemann sobre $[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea D_n una partición de $[a,b]$, elegida como en la prueba del Teorema 1.60, y escribamos $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. En la notación de dicha prueba, pretendemos demostrar que f es continua en cada punto del conjunto $D^c \cap \{x : U(x) - L(x) = 0\}$. Ya que el complementario de este conjunto, $D \cup \{x : U(x) - L(x) > 0\}$, tiene medida nula (es unión del conjunto contable D y de un conjunto que, tal como se vio en la demostración del Teorema 1.60, es de medida nula), habremos probado, con ello, que f es continua c.t.p..

Asumamos, pues, que $U(x) = L(x)$, donde x no pertenece a ninguna partición D_n $(n \in \mathbb{N})$. Razonando por contradicción, asumamos también que f no es continua en x: existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, con $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, tales que $|f(x_k) - f(x)| > 2\varepsilon$ $(k \in \mathbb{N})$. Usamos las definiciones de ínfimo y supremo para encontrar $p, q \in \mathbb{N}$ de modo que (siempre en la notación del Teorema 1.60) las funciones escalonadas u_q y l_p satisfacen $u_q(x) \le U(x) + \varepsilon/2$ y $l_p(x) \ge L(x) - \varepsilon/2$. Alguno de los intervalos abiertos determinados por cada una de las particiones D_p y D_q contiene a x y, para todo k suficientemente grande, a x_k, de modo que $u_q(x_k) = u_q(x)$ y $l_p(x_k) = l_p(x)$. Fijemos uno de estos k; entonces

$$L(x) - \frac{\varepsilon}{2} \le l_p(x) \le f(x) \le u_q(x) \le U(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

y también

$$L(x) - \frac{\varepsilon}{2} \le l_p(x) = l_p(x_k) \le f(x_k) \le u_q(x_k) = u_q(x) \le U(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente,

$$2\varepsilon < |f(x_k) - f(x)| \le U(x) - L(x) + \varepsilon,$$

forzando la contradicción $U(x) - L(x) > \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que f es continua c.t.p., y elijamos una sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ de particiones de $[a,b]$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} \supset D_n$ (es decir, D_{n+1} es un refinamiento de D_n) y la longitud del mayor intervalo de D_n (es decir, el diámetro de la partición) tiende a cero cuando $n \to \infty$. Si u_n, l_n son las funciones escalonadas correspondientes, entonces

$$l_n \le l_{n+1} \le u_{n+1} \le u_n \quad (n \in \mathbb{N});$$

escribimos $U = \lim_{n\to\infty} u_n$ y $L = \lim_{n\to\infty} l_n$, que existen porque las sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ son monótonas.

Ahora, supongamos que f es continua en x. Afirmamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sup_{I_\delta(x)} f - \inf_{I_\delta(x)} f < \varepsilon$, donde $I_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$. En efecto: dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de f en x proporciona $\delta > 0$ tal que $y \in I_\delta(x)$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/4$. Sigue que, para cualesquiera $y, z \in I_\delta(x)$,

$$|f(y) - f(z)| \le |f(x) - f(y)| + |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean, en particular, $y, z \in I_\delta(x)$ tales que

$$f(y) \le \inf_{I_\delta(x)} f + \frac{\varepsilon}{4}, \quad f(z) \ge \sup_{I_\delta(x)} f - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Entonces

$$f(y) - \frac{\varepsilon}{4} \le \inf_{I_\delta(x)} f \le \sup_{I_\delta(x)} f \le f(z) + \frac{\varepsilon}{4},$$

obligando a que

$$\sup_{I_\delta(x)} f - \inf_{I_\delta(x)} f \le |f(z) - f(y)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

como se había afirmado. Puesto que los diámetros de la sucesión de particiones $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ tienden a cero, para n suficientemente grande $I_\delta(x)$ contendrá a algún intervalo de los determinados por D_n que contenga a x, así que

$$\inf_{I_\delta(x)} f \le l_n(x) \le u_n(x) \le \sup_{I_\delta(x)} f$$

implica

$$u_n(x) - l_n(x) \le \sup_{I_\delta(x)} f - \inf_{I_\delta(x)} f < \varepsilon.$$

Un paso al límite cuando $n \to \infty$ revela que $U(x) - L(x) \le \varepsilon$, y la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ obliga a que $U(x) = L(x)$. Como esto ocurre en cada punto x de continuidad de f, y f es continua c.t.p., se infiere que $U = L$ c.t.p.. La sucesión de funciones medibles no negativas $\{u_1 - u_n\}_{n=1}^{\infty}$ (respectivamente, $\{l_n - l_1\}_{n=1}^{\infty}$) está dominada por la función integrable $u_1 - U$ (respectivamente, $L - l_1$). Aplicando a cada una de ellas el Teorema 1.38 (convergencia dominada[2]), resulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n \, dx = \int_a^b U \, dx = \int_a^b L \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b l_n \, dx.$$

Recordando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, las integrales $\int_a^b u_n$ y $\int_a^b l_n$ se corresponden, respectivamente, con las sumas superior e inferior de Darboux de f asociadas a la partición D_n, se concluye que f es integrable Riemann en $[a,b]$. □

Definición 1.63 *Si, para cualesquiera $a < b$, la función f está acotada y es integrable Riemann en el intervalo $[a,b]$, y existe*

$$I = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} (\mathrm{R}) \int_a^b f \, dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f \, dx < \infty$$

(cf. Teorema 1.60), entonces se dice que f es integrable Riemann en $(-\infty,\infty)$ y que su integral de Riemann en $(-\infty,\infty)$ *es*

$$(\mathrm{R}) \int_{-\infty}^{\infty} f \, dx = I.$$

Teorema 1.64 *Supongamos que f es acotada, y que tanto f como $|f|$ son integrables Riemann en $(-\infty,\infty)$. Entonces f es integrable (Lebesgue), y*

$$\int f \, dx = (\mathrm{R}) \int_{-\infty}^{\infty} f \, dx.$$

Demostración. Por los Teoremas 1.17 (convergencia monótona) y 1.60, y la Definición 1.63,

$$\int |f| \, dx = \lim_{n\to\infty} \int |f| \chi_{[-n,n]} \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |f| \, dx = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{R}) \int_{-n}^{n} |f| \, dx = (\mathrm{R}) \int_{-\infty}^{\infty} |f| \, dx < \infty;$$

por tanto, f es integrable. La Definición 1.63 y el Ejemplo 1.43 completan la demostración:

$$\int f \, dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f \, dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} (\mathrm{R}) \int_a^b f \, dx = (\mathrm{R}) \int_{-\infty}^{\infty} f \, dx.$$ □

El siguiente resultado permite reducir los problemas que involucran funciones medibles a otros donde intervienen clases de funciones más manejables.

Teorema 1.65 *Sea f medible y acotada en un intervalo acotado $[a,b]$, y sea $\varepsilon > 0$. Existen:*

(*i*) *Una función escalonada h tal que $\int_a^b |f - h| \, dx < \varepsilon$.*

(*ii*) *Una función continua g, de soporte compacto (es decir, que se anula fuera de un intervalo acotado), tal que $\int_a^b |f - g| \, dx < \varepsilon$.*

Demostración.

[2] También son aplicables argumentos basados en el Ejercicio 2 o en el Ejercicio 16.

(*i*) Nótese, ante todo, que si f es medible y acotada en un intervalo compacto $[a,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$ (Ejemplo 1.35). Como $f = f^+ - f^-$, podemos asumir que $f \geq 0$; en tal caso,

$$\int_a^b f\,dx = \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi\,dx,$$

donde φ es simple y medible. Supongamos entonces que f es simple medible y se anula fuera de $[a,b]$, de modo que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, con $\bigcup_{i=1}^n E_i = [a,b]$. Sea $\varepsilon' = \varepsilon/(nM)$, donde $M = \max_{1\leq i\leq n} a_i$, que, obviamente, puede suponerse positivo. Para cada uno de los conjuntos medibles E_i, existe una unión finita J_i de intervalos abiertos, finitos y disjuntos dos a dos, tal que $m(J_i \triangle E_i) < \varepsilon'$; la función $h_i = \chi_{J_i}$ es escalonada, y satisface

$$\int_a^b |\chi_{E_i} - h_i|\,dx = m(J_i \triangle E_i) < \varepsilon' \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{24}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| f - \sum_{i=1}^n a_i h_i \right| dx &= \int_a^b \left| \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} - \sum_{i=1}^n a_i h_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i \int_a^b |\chi_{E_i} - h_i|\,dx < \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon' \leq nM\varepsilon' = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde la función $\sum_{i=1}^n a_i h_i$ es escalonada.

(*ii*) Por (*i*), dado $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada h, que se anula fuera de un intervalo compacto (nótese que este intervalo no tiene por qué ser igual a $[a,b]$), verificando

$$\int_a^b |f-h|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Completamos la prueba construyendo una función continua g tal que $\int_a^b |h-g|\,dx < \varepsilon/2$, y tal que $g(x) = 0$ siempre que $h(x) = 0$. Sea $h = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, donde E_i es el intervalo finito (c_i, d_i) $(i = 1,\ldots,n)$. Al igual que en (*i*), es suficiente mostrar que cada χ_{E_i} $(i = 1,\ldots,n)$ puede ser aproximada como en (24). Sean $M = \max_{1\leq i\leq n} |a_i| > 0$ y $\varepsilon' = \varepsilon/(nM)$. Para $i = 1,\ldots,n$, suponiendo que $\varepsilon' < 2(d_i - c_i)$, definimos g_i por

$$g_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in (c_i + \varepsilon'/4, d_i - \varepsilon'/4) \\ 0, & x \in (c_i, d_i)^c, \end{cases}$$

y extendemos g_i por linealidad a $(c_i, c_i + \varepsilon'/4)$ y $(d_i - \varepsilon'/4, d_i)$, como en la fig. 1, para obtener una función continua. Claramente, $\int_a^b |\chi_{E_i} - g_i|\,dx < \varepsilon'/2$. Sin más que tomar $g = \sum_{i=1}^n a_i g_i$, se obtiene (*ii*). □

Corolario 1.66 *Si f es integrable sobre $[a,b]$, se cumple la tesis del Teorema 1.65.*

Demostración. Como en la demostración del Teorema 1.65, supóngase, sin pérdida de generalidad, que $f \geq 0$, y aproxímese f por sus truncadas a altura n (Ejercicio 7), que son medibles y acotadas. □

Ejemplo 1.67 *Sea f una función medible y acotada, definida en el intervalo acotado (a,b). Probar que*

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x\,dx = 0.$$

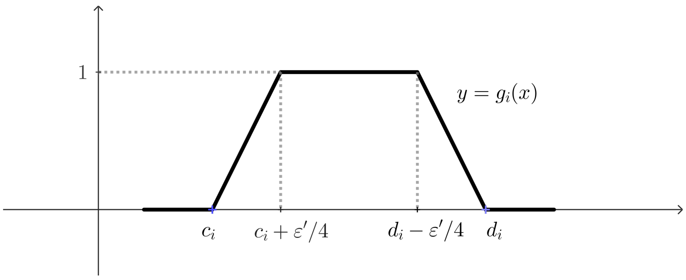

Figura 1. Extensión continua [fuente: elaboración propia].

Resolución. Por el Teorema 1.65, dado $\varepsilon > 0$ existe $h = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \chi_{(a_i,b_i)}$ satisfaciendo $\int_a^b |f-h|\,dx < \varepsilon$. Sigue que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\operatorname{sen}\beta x\,dx\right| &\leq \int_a^b |(f-h)(x)\,\operatorname{sen}\beta x|\,dx + \left|\int_a^b h(x)\,\operatorname{sen}\beta x\,dx\right| \\ &< \varepsilon + \left|\int_a^b h(x)\,\operatorname{sen}\beta x\,dx\right|.\end{aligned}$$

Ahora, existe $\beta_0 > 0$ tal que

$$\left|\int_a^b \chi_{(a_i,b_i)}(x)\,\operatorname{sen}\beta x\,dx\right| = \left|\frac{1}{\beta}\int_{\beta a_i}^{\beta b_i} \operatorname{sen} t\,dt\right| = \frac{1}{\beta}\left|\cos\beta a_i - \cos\beta b_i\right| \leq \frac{2}{\beta} < \frac{\varepsilon}{nM}$$

si $\beta > \beta_0$, donde $M = \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i| > 0$. Se concluye que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\operatorname{sen}\beta x\,dx\right| < 2\varepsilon \quad (\beta > \beta_0).$$ □

2 Integración con respecto a una medida abstracta

A continuación consideraremos la generalización de las definiciones y resultados de la Sección 1 a un espacio de medida abstracto $(X, \mathscr{S}, \mu)$. La mayoría del trabajo realizado permanece válido en este nuevo contexto. Cuando las demostraciones sólo requieran un cambio en la notación, remitiremos a la versión dada para la recta real.

Definición 2.1 *Una función* simple medible φ *es la que toma un número finito de valores finitos no negativos, cada uno de ellos en un conjunto medible; por tanto, si* $a_1, \dots, a_n$ *son los distintos valores de* φ*, se tiene que* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$*, donde* $A_i = \{x : \varphi(x) = a_i\} \in \mathscr{S}$ $(i = 1, \dots, n)$*. La* integral *de* φ *respecto de* μ *viene dada entonces por*

$$\int \varphi\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Definición 2.2 *Sea* $f : X \to [0,\infty]$ *una función medible no negativa. La* integral *de* f *se define como*

$$\int f\,d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi\,d\mu,$$

donde las funciones φ *son simples medibles.*

Definición 2.3 *Sea* $E \in \mathscr{S}$*, y sea* $f : E \to [0,\infty]$ *una función medible. La* integral de f sobre E *se define por*

$$\int_E f\,d\mu = \int f \chi_E\,d\mu.$$

Las observaciones del Ejemplo 1.9 siguen valiendo para las Definiciones 2.1 y 2.2. También valen los análogos de los Teoremas 1.12 y 1.14, excepto por cambios obvios en la notación.

Teorema 2.4 (Lema de Fatou) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $f_n : X \to [0,\infty]$ $(n \in \mathbb{N})$, una sucesión de funciones medibles. Entonces,*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Demostración. Véase la prueba del Teorema 1.15. □

Teorema 2.5 (Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $f_n : X \to [0,\infty]$ $(n \in \mathbb{N})$, una sucesión de funciones medibles, tales que $f_n \nearrow f$ cuando $n \to \infty$. Entonces,*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Demostración. Véase la prueba del Teorema 1.17. □

Teorema 2.6 (Teorema de aproximación de Lebesgue) *Sea $f : X \to [0,\infty]$ una función medible. Existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles tales que $\varphi_n \nearrow f$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Véase la prueba del Teorema 1.19. □

Teorema 2.7 (Beppo Levi) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $f_n : X \to [0,\infty]$ $(n \in \mathbb{N})$, una sucesión de funciones medibles. Entonces,*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Demostración. Véanse las pruebas de los Teoremas 1.21 y 1.22. □

Nuestro próximo resultado muestra que las integrales pueden ser utilizadas para construir nuevas medidas con una cierta propiedad de continuidad.

Teorema 2.8 *Sean $(X,\mathscr{S},\mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa. Entonces $\varphi(E) = \int_E f\, d\mu$ es una medida sobre el espacio medible $(X,\mathscr{S})$. Si además $\int f\, d\mu < \infty$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $A \in \mathscr{S}$ con $\mu(A) < \delta$ implica $\varphi(A) < \varepsilon$.*

Demostración. La función φ es contablemente aditiva: si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathscr{S}$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \int f \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}\, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{E_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \chi_{E_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n),$$

por el Teorema 2.7, y el resto de axiomas se satisfacen de forma obvia; por tanto, φ es una medida sobre $(X,\mathscr{S})$. Consideremos las funciones medibles $f_n = \min\{f,n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Se tiene que $f_n \nearrow f$ y, por el Teorema 2.5, que $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$. Luego, si $\int f\, d\mu < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int (f - f_N)\, d\mu = \int f\, d\mu - \int f_N\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $A \in \mathscr{S}$ con $\mu(A) < \varepsilon/2N$, se tiene

$$\int_A f_N\, d\mu \leq N\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Completamos la demostración tomando $\delta = \varepsilon/2N$:

$$\int_A f\, d\mu = \int_A (f - f_N)\, d\mu + \int_A f_N\, d\mu \leq \int (f - f_N)\, d\mu + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$ □

Recordemos que las partes positiva, f^+, y negativa, f^-, de una función real f fueron introducidas en la Definición 1.24, y sus principales propiedades recogidas en el Teorema 1.25.

Definición 2.9 *Si f es medible y las integrales $\int f^+\,d\mu$ y $\int f^-\,d\mu$ son finitas, se dice que f es* integrable *y se define su integral por*

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu. \tag{25}$$

Por tanto, una función medible f es integrable si, y sólo si, $|f|$ lo es. Cuando f es integrable y $E \in \mathscr{S}$, escribimos $\int_E f\,d\mu$ para denotar la integral $\int f\chi_E\,d\mu$.

Definición 2.10 *Como en la Definición 1.28, la* integral *de una función medible a valores reales viene dada por (25), siempre que, al menos, una de las integrales del segundo miembro sea finita.*

Teorema 2.11 *Sean f, g funciones integrables y a, b constantes. Entonces $af+bg$ es integrable, y*

$$\int (af+bg)\,d\mu = a\int f\,d\mu + b\int g\,d\mu.$$

Si $f = g$ c.t.p., entonces

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Demostración. Véase la prueba del Teorema 1.30. □

Siguiendo el argumento del Ejemplo 1.37, el Teorema 1.30 se extiende a funciones cuyas integrales existan en el sentido de la Definición 2.10. También continúa siendo de aplicación la Observación 1.31, relativa a funciones definidas c.t.p..

Teorema 2.12 *Si f es integrable, entonces*

$$\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu,$$

con igualdad si, y sólo si, $f \ge 0$ c.t.p. ó $f \le 0$ c.t.p..

Demostración. Véase la resolución del Ejemplo 1.32. □

Teorema 2.13 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue) *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \le g$ $(n \in \mathbb{N})$, donde g es una función integrable, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p.. Entonces f es integrable,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

Demostración. Véase la prueba del Teorema 1.38 y la resolución del Ejemplo 1.39. □

Como en el Ejemplo 1.40, es posible demostrar una versión del Teorema 2.13 para un parámetro continuo.

Teorema 2.14 *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables, tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\,d\mu < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge c.t.p., su suma f es integrable, y

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Demostración. Véase la prueba del Teorema 1.41. □