Tema 2: La integral de Lebesgue
Problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Integración de funciones de variable real

1. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones acotadas de números reales. Demostrar las siguientes desigualdades:

   a) $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

   b) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

   c) $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

   d) Deducir de *c*) que si, además, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \liminf_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a - \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

1.1 Integración de funciones no negativas

2. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

3. Sean $f, g \geq 0$ funciones medibles, con $f \geq g$ y $\int g\,dx < \infty$. Demostrar que

$$\int f\,dx - \int g\,dx = \int (f-g)\,dx.$$

4. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p. y $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int f\,dx < \infty$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx = \int_E f\,dx \tag{1}$$

   para cada conjunto medible E.

5. Demostrar que el lema de Fatou (Teorema 1.15) y el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17) pueden ser deducidos el uno del otro usando solamente las propiedades de la integral recogidas en los Teoremas 1.12 y 1.14.

6. El lema de Fatou se enuncia, a veces, de la siguiente manera: *Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles no negativas, tales que* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *c.t.p., entonces*

$$\int f\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

   Probar que esta versión es equivalente a la enunciada como Teorema 1.15.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, donde $f \geq 0$ es medible. Demostrar que $\int f_n\,dx \nearrow \int f\,dx$ cuando $n \to \infty$.

8. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, a valores finitos, tal que $f_n \searrow f$ cuando $n \to \infty$. Probar que si $\int f_k\,dx < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int f\,dx,$$

   y que $\int f_k\,dx = \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ no implica $\int f\,dx = \infty$.

9. Sean φ, ψ funciones simples medibles. Demostrar que

$$\int \varphi\,dx + \int \psi\,dx = \int (\varphi+\psi)\,dx$$

directamente a partir de la Definición 1.6, sin hacer referencia a los Teoremas 1.12 ni 1.21.

10. Sea $f \geq 0$ una función medible. Construir una sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles, tales que $\psi_n \nearrow f$ cuando $n \to \infty$ y $m(\{x : \psi_n(x) > 0\}) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

11. Sea C el conjunto de Cantor. Sobre $[0,1]$ se define una función f de la siguiente manera: $f(x) = 0$ si $x \in C$, $f(x) = n$ en cada intervalo complementario de longitud 3^{-n} $(n \in \mathbb{N})$. Probar que f es medible, y que $\int_0^1 f\,dx = 3$.

12. Se define la función f sobre $(0,1)$ por
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \\ \lfloor x^{-1} \rfloor, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x. Demostrar que f es medible, con $\int_0^1 f\,dx = \infty$.

1.2 La integral general

13. Probar que a toda función medible f le corresponde una función medible Borel g tal que $f = g$ c.t.p..

14. Demostrar, mediante un contraejemplo, que la tesis del lema de Fatou (Teorema 1.15) no se verifica necesariamente si en vez de suponer $f_n \geq 0$, asumimos que f_n es integrable para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables y g una función integrable tal que $f_n \geq g$ c.t.p., para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que
$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

16. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables tales que $f_n \nearrow f$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que
$$\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

17. Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx = 0$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ es igual a:
    a) $\dfrac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x$.
    b) $\dfrac{nx \ln x}{1+n^2x^2}$.
    c) $\dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$.
    d) $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.
    e) $\dfrac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$.
    f) $\dfrac{n^p x^{1+r}}{1+n^2x^2}$ $\quad (r > 0,\ 0 < p < \min\{2, 1+r\})$.
    g) $\dfrac{n^p x^r \ln x}{1+n^2x^2}$ $\quad (r > 0,\ 0 < p < \min\{2, 1+r\})$.

18. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n} \operatorname{sen} \dfrac{x}{n}\,dx = 0$.

19. Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{1+nx}{(1+x)^n}\,dx = 0$.

20. Demostrar que si $\beta > 0$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} n^{1/\beta} \int_0^1 x^{1/\beta}(1-x)^n \frac{dx}{x} = \beta \int_0^{\infty} e^{-u^{\beta}}\,du.$$

21. *a)* Verificar que si $f_n(x) = \left(\dfrac{n+x}{n+2x}\right)^n$, entonces $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ para cada $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
    b) Decidir si es cierto que el límite de la integral es la integral del límite en los siguientes casos, evaluando los límites correspondientes:

I. $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\, e^{x/2}\, dx.$ II. $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\, e^{-x/2}\, dx.$

22. Probar que $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx = 1.$

23. Demostrar que si $\alpha > 0$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha).$$

24. Probar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\infty \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx = \int_\alpha^\infty \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx$$
para $\alpha > 0$, pero no para $\alpha = 0$.

25. *a*) Determinar el rango de valores de α para los cuales
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} n^\alpha (1-x) x^n\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^\alpha (1-x) x^n\, dx.$$

 b) Encontrar también el rango de valores de α que satisfacen las condiciones del teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38).

1.3 Integración de series

26. Demostrar que, para $a > 1$,
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{e^x - 1}\, dx = \left(\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a} = \Gamma(a) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}.$$

27. Probar que
$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

28. Verificar la igualdad
$$\int_0^1 (e^x - 1)\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2+n+1}{(n-1)!\,(n^2+n)^2}.$$

29. Demostrar que si $p > -1$,
$$\int_0^1 \frac{x^p \ln x}{1-x}\, dx = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(p+n)^2}.$$

30. Suponiendo $0 < b < a$, probar que
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} ax}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{2b}{(2n+1)^2 a^2 - b^2}.$$

31. Demostrar que
$$\int_0^\infty \operatorname{sech} x^2\, dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

32. Probar que
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x + 1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}.$$

33. Demostrar que si $p, q > 0$, entonces
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{p+nq}.$$

34. Probar que si $x \geq 1$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 t}{1+xe^t}\, dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n^2+2)}{n\,(n^2+4)}\,\frac{1}{x^n}.$$

35. Demostrar que

$$\lim_{b\to 1-}\int_0^b \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}.$$

36. *a*) Probar que si

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} 2tx}{\operatorname{sh} x}\, e^{-t^2 x}\, dx,$$

entonces, para $t \geq 0$ y $t \neq 1$,

$$I(t) = 4t \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(t^2+2n+1)^2 - 4t^2}.$$

b) Demostrar que

$$\lim_{t\to 1}\left[I(t) - \frac{4t}{(t^2-1)^2}\right] = \frac{3}{4}.$$

37. Probar que

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

38. La función de Bessel de orden entero $m \geq 0$ se define como

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}.$$

Demostrar que:

a) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$2\int_0^\infty J_m(2ax)\, x^{m+1} e^{-x^2}\, dx = a^m e^{-a^2}.$$

b) Si $a > 1$, entonces

$$\int_0^\infty J_0(x)\, e^{-ax}\, dx = \left(1+a^2\right)^{-1/2}.$$

39. Probar que

$$\int_0^1 \frac{(x\ln x)^2}{1+x^2}\, dx = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}.$$

40. Demostrar que si $a > 1$, entonces

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 \operatorname{sen} nx}{a^n}\right) dx = \frac{2a\left(a^2+1\right)}{\left(a^2-1\right)^2}.$$

41. Probar que si f es integrable sobre (a,b) y $|r| < 1$, se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,\frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx = \sum_{n=0}^\infty r^n \int_a^b f(x)\cos nx\, dx.$$

1.4 Las integrales de Riemann y Lebesgue

42. Demostrar que si f es integrable en $(a+h, b+h)$ y se define $f_h(x) = f(x+h)$, entonces f_h es integrable en (a,b) y

$$\int_{a+h}^{b+h} f\, dx = \int_a^b f_h\, dx.$$

43. Sea f una función medible periódica, de periodo $T > 0$. Probar que si f es integrable en $[0,T]$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f\,dt. \tag{2}$$

44. Sea S un conjunto medible, con $m(S) < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} = \frac{m(S)}{\sqrt{3}}.$$

45. Probar que $x^{-1}\operatorname{sen} x$ es integrable Riemann sobre $(-\infty,\infty)$, pero que su integral de Lebesgue no existe.

46. Sea f una función integrable. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe una función g, continua de soporte compacto, tal que

$$\int |f-g|\,dx < \varepsilon.$$

47. Sea f una función integrable. Probar que

$$\lim_{h\to 0}\int |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0.$$

48. *(Lema de Riemann-Lebesgue)* Sean f una función integrable, φ una función medible y acotada, y supongamos que existe β tal que $\varphi(x+\beta) = -\varphi(x)$ $(x\in\mathbb{R})$. Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty}\int f(x)\,\varphi(kx)\,dx = 0.$$

1.5 Miscelánea

49. Sea f una función no negativa a valores finitos, satisfaciendo $m(\{x : f(x)\geq n\}) > 0$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Probar que existe una función integrable g tal que fg no es integrable.

50. Supongamos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ denota la distancia de x al número más próximo de la forma $k\,10^{-n}$, donde k es un entero, y sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Demostrar que

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{1}{36}.$$

51. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q} \\ a^{-1}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ y } a \text{ es el primer entero no nulo en la representación decimal de } x. \end{cases}$$

Probar que f es medible, y que

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n}\right).$$

52. Se define

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q} \\ \lfloor x^{-1}\rfloor^{-1}, & x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde, como habitualmente, $\lfloor x\rfloor$ denota la parte entera de x. Demostrar que

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{\pi^2}{6}-1.$$

53. *a*) Sea

$$f_n(x) = \frac{nx-1}{(x\ln n+1)\,(nx^2\ln n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Probar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $(0 < x \leq 1)$, pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

b) Sea $h_n(x) = nx^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ $(0 \leq x < 1)$, pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n\,dx = 1.$$

54. Sea

$$F_n(x) = \frac{n}{\pi} \int \frac{f(t)\,dt}{1+n^2(t-x)^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Suponiendo que las integrales involucradas existen, probar que si f es continua en x entonces $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = f(x)$.

55. *(Derivación de integrales paramétricas: regla de Leibniz)* Para cada t, sea $f(x,t)$ una función integrable de x. Supongamos que $\partial f/\partial t$ existe para cada x y satisface $|(\partial f/\partial t)(x,t)| \leq \varphi(x)$, donde la función φ es integrable. Demostrar que

$$\frac{d}{dt} \int f(x,t)\,dx = \int \frac{\partial f}{\partial t}\,dx.$$

56. Supongamos que $x^\gamma f(x)$ es integrable sobre $(0,\infty)$ si $\gamma = \alpha$ y $\gamma = \beta$, con $\alpha < \beta$. Probar que para cada $\gamma \in (\alpha,\beta)$, la integral $\displaystyle\int_0^\infty x^\gamma f(x)\,dx$ existe y define una función continua de γ.

57. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ $(n \in \mathbb{N})$, donde la función g es integrable. Demostrar que

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,dx \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n\,dx.$$

Dar un ejemplo donde todas las desigualdades sean estrictas.

2 Integración con respecto a una medida abstracta

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contra, trabajaremos con un espacio de medida arbitrario $(X,\mathscr{S},\mu)$.

58. Sean $E_1,\ldots,E_n$ conjuntos medibles y sea F_k $(k = 1,\ldots,n)$ el conjunto de los puntos que pertenecen a exactamente k de los conjuntos E_i $(i = 1,\ldots,n)$. Probar que

$$\sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{k=1}^n k\mu(F_k).$$

59. Sea g una función medible tal que $g \geq h$, con h integrable. Demostrar que $\displaystyle\int g\,d\mu$ existe en el sentido de la Definición 2.10.

60. Sean f una función integrable y g una función medible tales que $|g| \leq k|f|$ c.t.p., donde k es una constante. Probar que g es integrable.

61. Sean E, F conjuntos medibles, f integrable sobre E, y $\mu(E \triangle F) = 0$. Demostrar que f es integrable sobre F, con

$$\int_E f\,d\mu = \int_F f\,d\mu.$$

62. *(Desigualdad de Chebyshev)* Sean f una función medible, $A = \{x : f(x) \geq 0\}$, y $c > 0$. Probar que

$$\mu\{x : f(x) > c\} \leq \frac{1}{c} \int_A f \, d\mu.$$

63. Sea f una función integrable. Demostrar que el conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ-finita.

64. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables, $g = \limsup_{n\to\infty} f_n$, y $h = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Probar que los conjuntos $G = \{x : g(x) \neq 0\}$ y $H = \{x : h(x) \neq 0\}$ tienen medida σ-finita.

65. Sea $(X, \mathscr{P}(X), \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(\{x\}) = 1$ para cada $x \in X$. Demostrar que f es integrable si, y sólo si, $f = 0$ excepto en una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ con

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i), \tag{3}$$

donde la serie del segundo miembro es absolutamente convergente y el valor de la integral del primer miembro es independiente de la ordenación de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

66. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

67. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p.. Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables tales que $|f_n| \leq g_n$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ c.t.p., con g integrable. Demostrar que si

$$\int g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu,$$

entonces f es integrable y

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu. \tag{4}$$

68. Usar el lema de Fatou (Teorema 2.4) para obtener otra resolución del Ejercicio 61 a) del Tema 1: si los conjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ son medibles, entonces

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

69. *(Lema de Borel-Cantelli)* Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Probar que casi todo $x \in X$ pertenece, a lo sumo, a un número finito de conjuntos de la sucesión.

70. Sean f una función integrable, $\lambda > 0$, y $E_n = \{x : f(x) \geq n\lambda\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Demostrar:

   a) $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = 0$;

   b) $\mu(E_n) = o(n^{-1})$.

71. Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ una función integrable respecto de la medida de Lebesgue, y pongamos $F_n = \{x : f(x/n) \geq n\}$. Probar que para cada x fuera de un conjunto de medida nula, existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{n_i}^c$.

72. Usar el Teorema 2.8 para demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^y f \, dx = 0$ para todo y con $a \leq y \leq b$, entonces $f = 0$ c.t.p. en (a, b).

73. Probar que si f es medible y $\mu(X) < \infty$, entonces f es integrable si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x)| \geq n\})$ converge. Enunciar el resultado correspondiente cuando $\mu(X) = \infty$ y cuando la serie se inicia en $n = 0$.

74. Supongamos que $\mu(X) < \infty$ y que f es una función medible. Demostrar que si el límite $\lim_{n\to\infty} \int f^n \, d\mu$ existe y es finito, entonces es igual a $\mu(\{x : f(x) = 1\})$.

75. Sea E un conjunto medible, y sea $f > 0$, integrable sobre E. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^{1/n} \, d\mu = \mu(E).$$