

Tema 2: La integral de Lebesgue

Problemas propuestos

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

Índice

1 Integración de funciones de variable real	1
1.1 Integración de funciones no negativas	1
1.2 La integral general	2
1.3 Integración de series	3
1.4 Las integrales de Riemann y Lebesgue	4
1.5 Miscelánea	5
2 Integración con respecto a una medida abstracta	6



1 Integración de funciones de variable real

1. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones acotadas de números reales. Demostrar las siguientes desigualdades:

- a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.
- c) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.
- d) Deducir de c) que si, además, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

1.1 Integración de funciones no negativas

2. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ y $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx.$$

3. Sean $f, g \geq 0$ funciones medibles, con $f \geq g$ y $\int g \, dx < \infty$. Demostrar que

$$\int f \, dx - \int g \, dx = \int (f - g) \, dx.$$

4. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p. y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx = \int f \, dx < \infty$. Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx \quad (1)$$

para cada conjunto medible E .

5. Demostrar que el lema de Fatou (Teorema 1.15) y el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17) pueden ser deducidos el uno del otro usando solamente las propiedades de la integral recogidas en los Teoremas 1.12 y 1.14.

6. El lema de Fatou se enuncia, a veces, de la siguiente manera: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p., entonces

$$\int f \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx.$$

Probar que esta versión es equivalente a la enunciada como Teorema 1.15.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, donde $f \geq 0$ es medible. Demostrar que $\int f_n \, dx \nearrow \int f \, dx$ cuando $n \rightarrow \infty$.

8. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, a valores finitos, tal que $f_n \searrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$. Probar que si $\int f_k \, dx < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx = \int f \, dx,$$

y que $\int f_k \, dx = \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ no implica $\int f \, dx = \infty$.

9. Sean φ, ψ funciones simples medibles. Demostrar que

$$\int \varphi \, dx + \int \psi \, dx = \int (\varphi + \psi) \, dx$$

directamente a partir de la Definición 1.6, sin hacer referencia a los Teoremas 1.12 ni 1.21.

10. Sea $f \geq 0$ una función medible. Construir una sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles, tales que $\psi_n \nearrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $m(\{x : \psi_n(x) > 0\}) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
11. Sea C el conjunto de Cantor. Sobre $[0, 1]$ se define una función f de la siguiente manera: $f(x) = 0$ si $x \in C$, $f(x) = n$ en cada intervalo complementario de longitud 3^{-n} ($n \in \mathbb{N}$). Probar que f es medible, y que $\int_0^1 f dx = 3$.
12. Se define la función f sobre $(0, 1)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q} \\ \lfloor x^{-1} \rfloor, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x . Demostrar que f es medible, con $\int_0^1 f dx = \infty$.

1.2 La integral general

13. Probar que a toda función medible f le corresponde una función medible Borel g tal que $f = g$ c.t.p..
14. Demostrar, mediante un contraejemplo, que la tesis del lema de Fatou (Teorema 1.15) no se verifica necesariamente si en vez de suponer $f_n \geq 0$, asumimos que f_n es integrable para todo $n \in \mathbb{N}$.
15. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables y g una función integrable tal que $f_n \geq g$ c.t.p., para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx.$$

16. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables tales que $f_n \nearrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$. Demostrar que

$$\int f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx.$$

17. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 0$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ es igual a:

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x.$ | e) $\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}.$ |
| b) $\frac{nx \ln x}{1+n^2x^2}.$ | f) $\frac{n^p x^{1+r}}{1+n^2x^2} \quad (r > 0, 0 < p < \min\{2, 1+r\}).$ |
| c) $\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}.$ | g) $\frac{n^p x^r \ln x}{1+n^2x^2} \quad (r > 0, 0 < p < \min\{2, 1+r\}).$ |
| d) $\frac{nx}{1+n^2x^2}.$ | |

18. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} dx = 0$.

19. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx = 0$.

20. Demostrar que si $\beta > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\beta} \int_0^1 x^{1/\beta} (1-x)^n \frac{dx}{x} = \beta \int_0^{\infty} e^{-u^\beta} du.$$

21. a) Verificar que si $f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n$, entonces $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ para cada $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
b) Decidir si es cierto que el límite de la integral es la integral del límite en los siguientes casos, evaluando los límites correspondientes:

I. $\int_0^\infty f_n(x) e^{x/2} dx.$

II. $\int_0^\infty f_n(x) e^{-x/2} dx.$

22. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$

23. Demostrar que si $\alpha > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \Gamma(\alpha).$$

24. Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\infty \sqrt{n} e^{-nx^2} dx = \int_\alpha^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} dx$$

para $\alpha > 0$, pero no para $\alpha = 0$.

25. a) Determinar el rango de valores de α para los cuales

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha (1-x) x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^\alpha (1-x) x^n dx.$$

b) Encontrar también el rango de valores de α que satisfacen las condiciones del teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38).

1.3 Integración de series

26. Demostrar que, para $a > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{e^x - 1} dx = \left(\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \right) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a} = \Gamma(a) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}.$$

27. Probar que

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

28. Verificar la igualdad

$$\int_0^1 (e^x - 1) \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)!(n^2 + n)^2}.$$

29. Demostrar que si $p > -1$,

$$\int_0^1 \frac{x^p \ln x}{1-x} dx = - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(p+n)^2}.$$

30. Suponiendo $0 < b < a$, probar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} ax} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{2b}{(2n+1)^2 a^2 - b^2}.$$

31. Demostrar que

$$\int_0^\infty \operatorname{sech} x^2 dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

32. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x + 1} dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

33. Demostrar que si $p, q > 0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{p+nq}.$$

34. Probar que si $x \geq 1$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 t}{1 + xe^t} dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n^2+2)}{n(n^2+4)} \frac{1}{x^n}.$$

35. Demostrar que

$$\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}.$$

36. a) Probar que si

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} 2tx}{\operatorname{sh} x} e^{-t^2 x} dx,$$

entonces, para $t \geq 0$ y $t \neq 1$,

$$I(t) = 4t \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(t^2 + 2n + 1)^2 - 4t^2}.$$

b) Demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left[I(t) - \frac{4t}{(t^2 - 1)^2} \right] = \frac{3}{4}.$$

37. Probar que

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

38. La función de Bessel de orden entero $m \geq 0$ se define como

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}.$$

Demostrar que:

a) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$2 \int_0^\infty J_m(2ax) x^{m+1} e^{-x^2} dx = a^m e^{-a^2}.$$

b) Si $a > 1$, entonces

$$\int_0^\infty J_0(x) e^{-ax} dx = (1 + a^2)^{-1/2}.$$

39. Probar que

$$\int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1 + x^2} dx = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}.$$

40. Demostrar que si $a > 1$, entonces

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 \operatorname{sen} nx}{a^n} \right) dx = \frac{2a(a^2 + 1)}{(a^2 - 1)^2}.$$

41. Probar que si f es integrable sobre (a, b) y $|r| < 1$, se tiene que

$$\int_a^b f(x) \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \sum_{n=0}^\infty r^n \int_a^b f(x) \cos nx dx.$$

1.4 Las integrales de Riemann y Lebesgue

42. Demostrar que si f es integrable en $(a+h, b+h)$ y se define $f_h(x) = f(x+h)$, entonces f_h es integrable en (a, b) y

$$\int_{a+h}^{b+h} f dx = \int_a^b f_h dx.$$

43. Sea f una función medible periódica, de periodo $T > 0$. Probar que si f es integrable en $[0, T]$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f \, dt. \quad (2)$$

44. Sea S un conjunto medible, con $m(S) < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S \frac{dx}{2 - \sin nx} = \frac{m(S)}{\sqrt{3}}.$$

45. Probar que $x^{-1} \sin x$ es integrable Riemann, pero no Lebesgue, sobre $(-\infty, \infty)$.

46. Sea f una función integrable. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe una función g , continua de soporte compacto, tal que

$$\int |f - g| \, dx < \varepsilon.$$

47. Sea f una función integrable. Probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int |f(x+h) - f(x)| \, dx = 0.$$

48. (*Lema de Riemann-Lebesgue*) Sean f una función integrable, φ una función medible y acotada, y supongamos que existe β tal que $\varphi(x + \beta) = -\varphi(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Demostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x) \varphi(kx) \, dx = 0.$$

1.5 Miscelánea

49. Sea f una función no negativa a valores finitos, satisfaciendo $m(\{x : f(x) \geq n\}) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe una función integrable g tal que fg no es integrable.

50. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ denota la distancia de x al número más próximo de la forma $k10^{-n}$, donde k es un entero, y sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Demostrar que

$$\int_0^1 f \, dx = \frac{1}{36}.$$

51. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ a^{-1}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ y } a \text{ es el primer entero no nulo en la representación decimal de } x. \end{cases}$$

Probar que f es medible, y que

$$\int_0^1 f \, dx = \frac{1}{9} \left(\sum_{n=1}^9 \frac{1}{n} \right).$$

52. Se define

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ [x^{-1}]^{-1}, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde, como habitualmente, $[x]$ denota la parte entera de x . Demostrar que

$$\int_0^1 f \, dx = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

53. a) Sea

$$f_n(x) = \frac{nx - 1}{(x \ln n + 1)(nx^2 \ln n + 1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ ($0 < x \leq 1$), pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$

b) Sea $h_n(x) = nx^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$ ($0 \leq x < 1$), pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n dx = 1.$$

¿Contradice alguno de estos ejemplos el Teorema 1.38 (convergencia dominada)?

54. Sea

$$F_n(x) = \frac{n}{\pi} \int \frac{f(t) dt}{1 + n^2(t-x)^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Suponiendo que las integrales involucradas existen, probar que si f es continua en x entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = f(x)$.

55. (Derivación de integrales paramétricas: regla de Leibniz) Para cada t , sea $f(x, t)$ una función integrable de x . Supongamos que $\partial f / \partial t$ existe para cada x y satisface $|(\partial f / \partial t)(x, t)| \leq \varphi(x)$, donde la función φ es integrable. Demostrar que

$$\frac{d}{dt} \int f(x, t) dx = \int \frac{\partial f}{\partial t} dx.$$

56. Supongamos que $x^\gamma f(x)$ es integrable sobre $(0, \infty)$ si $\gamma = \alpha$ y $\gamma = \beta$, con $\alpha < \beta$. Probar que para cada $\gamma \in (\alpha, \beta)$, la integral $\int_0^\infty x^\gamma f(x) dx$ existe y define una función continua de γ .

57. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), donde la función g es integrable. Demostrar que

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n dx.$$

Dar un ejemplo donde todas las desigualdades sean estrictas.

2 Integración con respecto a una medida abstracta

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contra, trabajaremos con un espacio de medida arbitrario $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

58. Sean $E_1, \dots, E_n$ conjuntos medibles y sea F_k ($k = 1, \dots, n$) el conjunto de los puntos que pertenecen a exactamente k de los conjuntos E_i ($i = 1, \dots, n$). Probar que

$$\sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{k=1}^n k \mu(F_k).$$

59. Sea g una función medible tal que $g \geq h$, con h integrable. Demostrar que $\int g d\mu$ existe en el sentido de la Definición 2.10.

60. Sean f una función integrable y g una función medible tales que $|g| \leq k|f|$ c.t.p., donde k es una constante. Probar que g es integrable.

61. Sean E, F conjuntos medibles, f integrable sobre E , y $\mu(E \triangle F) = 0$. Demostrar que f es integrable sobre F , con

$$\int_E f d\mu = \int_F f d\mu.$$

62. (*Desigualdad de Chebyshev*) Sean f una función medible, $A = \{x : f(x) \geq 0\}$, y $c > 0$. Probar que

$$\mu\{x : f(x) > c\} \leq \frac{1}{c} \int_A f d\mu.$$

63. Sea f una función integrable. Demostrar que el conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ -finita.

64. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables, $g = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$, y $h = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. Probar que los conjuntos $G = \{x : g(x) \neq 0\}$ y $H = \{x : h(x) \neq 0\}$ tienen medida σ -finita.

65. Sea $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(\{x\}) = 1$ para cada $x \in X$. Demostrar que f es integrable si, y sólo si, $f = 0$ excepto en una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ con

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i), \quad (3)$$

donde la serie del segundo miembro es absolutamente convergente y el valor de la integral del primer miembro es independiente de la ordenación de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

66. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ y $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

67. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p.. Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables tales que $|f_n| \leq g_n$ ($n \in \mathbb{N}$) y $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ c.t.p., con g integrable. Demostrar que si

$$\int g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu,$$

entonces f es integrable y

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \quad (4)$$

68. Usar el lema de Fatou (Teorema 2.4) para obtener otra resolución del Ejercicio 62 a) del Tema 1: si los conjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ son medibles, entonces

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

69. (*Lema de Borel-Cantelli*) Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Probar que casi todo $x \in X$ pertenece, a lo sumo, a un número finito de conjuntos de la sucesión.

70. Sean f una función integrable, $\lambda > 0$, y $E_n = \{x : f(x) \geq n\lambda\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Demostrar:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f d\mu = 0;$$

$$b) \mu(E_n) = o(n^{-1}).$$

71. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ una función integrable respecto de la medida de Lebesgue, y pongamos $F_n = \{x : f(x/n) \geq n\}$. Probar que para cada x fuera de un conjunto de medida nula, existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{n_i}^c$.

72. Usar el Teorema 2.8 para demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^y f dx = 0$ para todo y con $a \leq y \leq b$, entonces $f = 0$ c.t.p. en (a, b) .

73. Probar que si f es medible y $\mu(X) < \infty$, entonces f es integrable si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x)| \geq n\})$ converge. Enunciar el resultado correspondiente cuando $\mu(X) = \infty$ y cuando la serie se inicia en $n = 0$.

74. Supongamos que $\mu(X) < \infty$ y que f es una función medible. Demostrar que si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f^n d\mu$ existe y es finito, entonces es igual a $\mu(\{x : f(x) = 1\})$.

75. Sea E un conjunto medible, y sea $f > 0$, integrable sobre E . Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f^{1/n} d\mu = \mu(E).$$

76. Se considera la medida definida por

$$\varphi(E) = \int_E f dx \quad (E \in \mathcal{M}),$$

donde f es una función medible no negativa sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, como en el Teorema 2.8. Demostrar que φ es completa si, y sólo si, f no se anula en un conjunto de medida de Lebesgue positiva, es decir, $m(\{x : f(x) = 0\}) = 0$.