Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Ejercicios Tema 2

M. C. González Dávila, I. Gutiérrez Sagredo, D. Iglesias Ponte

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Consideremos las aplicaciones:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & si\ t < 0 \\ (0,0,0) & si\ t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & si\ t > 0 \end{cases} \quad , \quad \beta(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & si\ t \neq 0 \\ (0,0,0) & si\ t = 0 \end{cases}$$

(a) *Probar que α y β son curvas parametrizadas regulares;*

(b) *Demostrar que ambas tienen la misma curvatura y que es no nula salvo en los valores del parámetro $t = 0$ y $t = \pm\sqrt{2/3}$;*

(c) *Probar que α y β tienen torsión nula allí donde esté definida. Sin embargo, la curva α no es plana (su traza consiste en dos curvas planas distintas unidas por un punto donde $\kappa = 0$) y β sí lo es. (Este ejemplo ilustra que, en los puntos donde la curvatura se anula, pueden ocurrir situaciones extrañas y hay que estudiarlas particularmente.)*

(a) Se calcula la derivada primera, teniendo en cuenta que ambas funciones están definidas a trozos (en $t = 0$ se usa la definición de la derivada como límite):

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1, \dfrac{2e^{-1/t^2}}{t^3}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (1,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (1, 0, \dfrac{2e^{-1/t^2}}{t^3}) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad , \quad \beta'(t) = \begin{cases} (1, \dfrac{2e^{-1/t^2}}{t^3}, 0) & \text{si } t \neq 0 \\ (1,0,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Dado que son continuas, α y β son diferenciables. Además, como

$$\begin{cases} \|\alpha'(t)\| = \|\beta'(t)\| = \sqrt{1 + \dfrac{4e^{-2/t^2}}{t^6}} \neq 0 \quad , \quad t \neq 0, \\ \|\alpha'(0)\| = \|\beta'(0)\| = 1, \end{cases}$$

α y β son curvas parametrizadas regulares, que se recorren con la misma velocidad, y en ninguna de ellas t es parámetro arco.

(b) Usando la expresión de la curvatura para una curva con parametrización no arco, se precisa calcular las derivadas segundas:

$$\alpha''(t) = \begin{cases} (0, \dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^6}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (0, 0, \dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^6}) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad , \beta''(t) = \begin{cases} (0, \dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^3}, 0) & \text{si } t \neq 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

y el producto vectorial de las dos primeras derivadas:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \dfrac{2e^{-1/t^2}}{t^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^6} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^6}\right) & t < 0 \\ (0,0,0) & t = 0 \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{2e^{-1/t^2}}{t^3} \\ 0 & 0 & \dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^6} \end{vmatrix} = \left(0, -\dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^6}, 0\right) & t > 0 \end{cases}$$

e, igualmente,

$$\beta'(t)\times\beta''(t)=\begin{cases}\left(0,0,\dfrac{(4-6t^2)\,e^{-1/t^2}}{t^6}\right) & t\neq 0\\ (0,0,0) & t=0.\end{cases}$$

De aquí, como $\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|$ y $\|\alpha'(t)\|=\|\beta'(t)\|$, para todo $t\in\mathbb{R}$, α y β tienen igual curvatura:

$$\kappa_\alpha(t)=\frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3}=\kappa_\beta(t).$$

Además

$$\kappa_\alpha(t)=\kappa_\beta(t)=\begin{cases}\dfrac{|(4-6t^2)t^3|e^{-1/t^2}}{\left(t^6+4e^{-2/t^2}\right)^{3/2}} & t\neq 0\\ 0 & t=0,\end{cases}$$

y se anulan en $t=0$ y cuando $4-6t^2=0$, esto es, si $t=\pm\sqrt{2/3}$.

c) α y β son curvas birregulares en $\mathbb{R}-\{0,\pm\sqrt{2/3}\}$, y en este dominio podemos calcular la torsión. Para ello, hallamos las derivadas terceras de ambas curvas y dada la expresión del producto vectorial de las dos derivadas primeras:

$$\alpha'''(t)=\begin{cases}(0,\dfrac{4(6t^4-9t^2+2)\,e^{-1/t^2}}{t^9},0) & \text{si } t<0\\ (0,0,0) & \text{si } t=0\\ (0,0,\dfrac{4(6t^4-9t^2+2)\,e^{-1/t^2}}{t^6}) & \text{si } t>0\end{cases}\quad\Rightarrow(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''=(\beta'\times\beta'')\cdot\beta'''=0$$

$$\beta''(t)=\begin{cases}(0,\dfrac{4(6t^4-9t^2+2)\,e^{-1/t^2}}{t^3},0) & \text{si } t\neq 0\\ (0,0,0) & \text{si } t=0.\end{cases}$$

sigue que

$$\tau_\alpha(t)=\frac{(\alpha'(t)\times\alpha''(t))\cdot\alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2}=\frac{(\beta'(t)\times\beta''(t))\cdot\beta'''(t)}{\|\beta'(t)\times\beta''(t)\|^2}=\tau_\beta(t)=0$$

Podemos asegurar que α y β restringidas a cada subintervalo $(-\infty,-\sqrt{3/2})$, $(-\sqrt{3/2},0)$, $(0,\sqrt{3/2})$ y $(\sqrt{3/2},\infty)$ son curvas planas. Es más, β es globalmente plana ($\beta(\mathbb{R})\subset\{z=0\}$);

sin embargo, α no lo es: $\alpha(-\infty,0)\subset\{z=0\}$ y $\alpha(0,\infty)\subset\{y=0\}$. Aunque para β el que se anule la curvatura en $t=0,\pm\sqrt{3/2}$ no provoca cambio alguno, sí ocurre para α sólo en el valor $t=0$.

2. Sea α una curva regular cuya traza descansa en una esfera de radio r. Comprobar que $\kappa\geq 1/r$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que α está parametrizada con el parámetro arco s, esto es, $\|\alpha'(s)\|=1$, $\forall s$. Al ser α curva esférica, sabemos que existe un punto $c\in\mathbb{R}^3$ (centro) y una constante real $r>0$ (radio), tales que

$$(\alpha(s)-c)\cdot(\alpha(s)-c)=r^2 \quad , \quad \forall s.$$

Derivando respecto de s,

$$2(\alpha(s)-c)\cdot\alpha'(s)=0\Rightarrow(\alpha(s)-c)\cdot T(s)=0.$$

Derivando nuevamente $(\alpha(s)-c)\cdot T(s)=0$,

$$T(s)\cdot T(s)+(\alpha(s)-c)\cdot T'(s)=0\Rightarrow(\alpha(s)-c)\cdot T'(s)=-1.$$

De esta última igualdad sigue que $T'(s)\neq 0$, $\forall s$, esto es, $\kappa(s)\neq 0$, $\forall s$, y α es curva birregular (podemos definir el resto de términos del triedro de Frenet). Así, la última igualdad se reescribe como:

$$(\alpha(s)-c)\cdot\kappa(s)N(s)=-1\Rightarrow(\alpha(s)-c)\cdot N(s)=-\frac{1}{\kappa(s)}.$$

De la expresión de todo vector respecto de una base ortonormal, como lo son los elementos del triedro de Frenet para cada s, y teniendo en cuenta lo obtenido en anteriores derivaciones, sigue que:

$$\begin{aligned}\alpha(s)-c &= [(\alpha(s)-c)\cdot T(s)]\,T(s)+[(\alpha(s)-c)\cdot N(s)]\,N(s)+[(\alpha(s)-c)\cdot B(s)]\,B(s)\\ &= -\frac{1}{\kappa(s)}N(s)+\lambda(s)B(s),\end{aligned}$$

siendo λ una cierta función que dependerá diferenciablemente de s. Volviendo a la definición de curva esférica,

$$\begin{aligned}r^2=(\alpha(s)-c)\cdot(\alpha(s)-c) &= \left(-\frac{1}{\kappa(s)}N(s)+\lambda(s)B(s)\right)\cdot\left(-\frac{1}{\kappa(s)}N(s)+\lambda(s)B(s)\right)\\ &= \frac{1}{\kappa^2(s)}+\lambda^2(s).\end{aligned}$$

Hemos probado que $\frac{1}{\kappa^2(s)}\leq r^2$, al ser $\lambda^2(s)\geq 0$, o lo que es lo mismo, $\kappa^2(s)\geq\frac{1}{r^2(s)}$. Tomando raíces cuadradas, $\kappa(s)\geq 1/r$, $\forall s$.

3. Calcular el triedro de Frenet, curvatura y torsión de las siguientes curvas parametrizadas:

(a) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = \left(\frac{5}{13}\cos s, \frac{8}{13} - \sin s, -\frac{12}{13}\cos s\right)$;

(b) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$. *¿Cuánto vale* κ *al pasar por* $(1, 0, 0)$*? ¿Es constante el signo de la torsión?*

(a) $\alpha'(s) = \left(-\frac{5}{13}\sin s, -\cos s, \frac{12}{13}\sin s\right)$ y $\|\alpha'(s)\| = 1$. Al ser s parámetro arco,

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{5}{13}\sin s, -\cos s, \frac{12}{13}\sin s\right).$$

Derivando,

$$T'(s) = \left(-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s\right) \quad \text{y} \quad \|T'(s)\| = 1.$$

Por tanto,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \left(-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s\right) \quad \text{y} \quad \kappa(s) = \|T'(s)\| = 1.$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{5}{13}\sin s & -\cos s & \frac{12}{13}\sin s \\ -\frac{5}{13}\cos s & \sin s & \frac{12}{13}\cos s \end{vmatrix} = \left(-\frac{12}{13}, 0, -\frac{5}{13}\right) = \text{ cte.}$$

De aquí, $\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = 0$ es curva plana, y descansa en su plano osculador:

$$((x, y, z) - \alpha(s)) \cdot B(s) = 0 \Leftrightarrow 12x + 5z = 0.$$

Además, como $\kappa(s) = 1$, α tiene por traza una circunferencia de radio 1 y centro (ver Problema 10):

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(S) = \left(0, \frac{8}{13}, 0\right),$$

esto es, la traza de α coincide con el conjunto de puntos

$$\begin{cases} 12x + 5z = 0 \\ x^2 + \left(y - \frac{8}{13}\right)^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

(b) En este caso t no es parámetro arco dado que

$$\alpha'(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 1) \quad \text{y} \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sinh^2(t) + \cosh^2(t) + 1} = \sqrt{2}\cosh(t).$$

Entonces,

$$T(t) = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2\cosh(t)}(\sinh(t), \cosh(t), 1).$$

Como $\alpha''(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 0)$ y $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (-\sinh(t), \cosh(t), -1)$,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1}{2\cosh^2(t)}$$

El punto $(1, 0, 0)$ se obtiene cuando α pasa por $t = 0$. En ese caso, la curvatura $\kappa(0) = 1/2$. Además,

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2\cosh(t)}(-\sinh(t), \cosh(t), -1) \quad \text{y} \\ N(t) &= B(t) \times N(t) = \frac{1}{\cosh(t)}(1, 0, -\sinh(t)). \end{aligned}$$

Como $\alpha'''(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 0)$,

$$\tau = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{1}{\cosh^2(t)} > 0.$$

Eso significa que la traza de α siempre atraviesa el plano osculador en el sentido que indica el vector binormal B en cada punto.

4. Sea α una curva birregular. Probar que la traza de α es un trozo de circunferencia si y sólo si la curva $\beta = \alpha + (1/\kappa)N$ es una curva constante.

Supongamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada con el parámetro arco s. Al ser birregular, está definido el triedro de Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$ y $\kappa(s) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \beta \text{ es constante} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\alpha + \tfrac{1}{\kappa}N\right)' \Leftrightarrow T - \tfrac{\kappa'}{\kappa^2}N + \tfrac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau B) = 0 \Leftrightarrow -\tfrac{\kappa'}{\kappa^2}N + \tfrac{\tau}{\kappa}B = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \kappa' &=& 0 \Leftrightarrow \kappa = \text{ cte.} \neq 0 \\ \tau &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha \text{ es un trozo de circunferencia.} \end{aligned}$$

Además, en estas condiciones, $\beta(s)$ es el centro de tal arco de circunferencia:

$$\alpha(s)-\beta(s)=\alpha(s)-\alpha(s)-\frac{1}{\kappa(s)}N(s)=-\frac{1}{\kappa(s)}N(s)$$
$$\|\alpha(s)-\beta(s)\|^2=\left\|-\frac{1}{\kappa(s)}N(s)\right\|^2=\frac{1}{\kappa^2(s)}=\text{ cte.}$$

5. Sea α una curva birregular. Calcular los elementos del triedro de Frenet, curvatura y torsión de la indicatriz esférica tangente en términos de los de α.

Supongamos que $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ está parametrizada con el parámetro arco s. Al ser birregular, está definido el triedro de Frenet $\{T(s),N(s),B(s)\}$ y $\kappa(s)\neq 0$. Consideremos la indicatriz esférica tangente $\beta(s)=T(s)$. Denotemos por $\{T^*(s),N^*(s),B^*(s)\}$ y $\kappa^*(s),\tau^*(s)$ el triedro de Frenet, curvatura y torsión de β, respectivamente. Entonces

$\beta'=T'=\kappa N$ y es regular al ser α birregular, pero s no es parámetro arco para β.

De aquí,

$$T^*(s)=\frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}=\frac{\kappa(s)N(s)}{\kappa(s)}=N(s)$$

Como $\beta''=\kappa'N+\kappa(-\kappa T+\tau B)=-\kappa^2T+\kappa'N+\kappa\tau B$

$$\beta'\times\beta''=\begin{vmatrix} T & N & B\\ 0 & \kappa & 0\\ -\kappa^2 & \kappa' & \kappa\tau\end{vmatrix}=\kappa^2(\tau T+kB)\quad\text{y}\quad \beta'\times\beta''\neq 0 \text{ ya que } \kappa\neq 0\ \forall s.$$

y

$$\begin{aligned}
\kappa^*(s) &= \frac{\|\beta'\times\beta''\|}{\|\beta'\|^3}=\frac{\kappa^2\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}{\kappa^3}=\sqrt{\frac{\kappa^2+\tau^2}{\kappa^2}}=\sqrt{1+\left(\tfrac{\tau}{\kappa}\right)^2}\\
B^*(s) &= \frac{\beta'\times\beta''}{\|\beta'\times\beta''\|}=\frac{\kappa^2(\tau T+\kappa B)}{\kappa^2\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}=\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\\
N^*(s) &= B^*(s)\times T^*(s)=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\begin{vmatrix} T & N & B\\ \tau & 0 & \kappa\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{-\kappa T+\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\beta''' &= -2\kappa\kappa'T-\kappa^2(\kappa N)+\kappa''N+\kappa'(-\kappa T+\tau B)+\kappa'\tau B+\kappa\tau'B+\kappa\tau(-\tau'N)\\
&= -3\kappa\kappa'T+(\kappa''-\kappa^3-\kappa\tau^2)N+(2\kappa'\tau+\kappa\tau')B,
\end{aligned}$$

$$\tau^* = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = \frac{-3\kappa\kappa'\kappa^2\tau + \kappa^3(2\kappa'\tau + \kappa\tau')}{\kappa^4(\kappa^2+\tau^2)} = \frac{\kappa^3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{\kappa^4(\kappa^2+\tau^2)} = \frac{\kappa^2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa(\kappa^2+\tau^2)} = \frac{\kappa\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa^2+\tau^2}.$$

6. Sea α una curva birregular. Verificar que α es una hélice general si y sólo si su indicatriz esférica tangente es un arco de circunferencia.

Se obtiene directamente del Problema 5 y el Teorema de Lancret:

$$\alpha \text{ es hélice general} \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \text{ cte.} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \kappa^* & = & \text{cte.} \\ \tau^* & = & 0. \end{array} \right.$$

7. Sea α una curva birregular. Probar que:

(a) *existe una curva $\omega : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las ecuaciones de Frenet-Serret se pueden expresar de la siguiente forma:*

$$T' = \omega \times T \quad , \quad N' = \omega \times N \quad , \quad B' = \omega \times B.$$

Al vector $\omega(s)$ se le denomina vector de Darboux o vector velocidad angular de α en s;

(b) *$\omega(s)$ es constante si y sólo si α es un arco de hélice circular;*

(c) *$\omega(s)$ es una recta si y sólo si α es un arco de hélice general (no circular).*

Supongamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada con el parámetro arco s. Al ser birregular, está definido el triedro de Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$.

(a) Si existe $\omega : I \to \mathbb{R}^3$, esta vendrá dada como

$\omega(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \gamma(s)B(s) \quad , \quad \lambda, \mu, \gamma : I \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables.

Si $T' = \omega \times T$, por las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\kappa(s)N(s) = \mu(s)N(s)\times T(s) + \gamma(s)B(s)\times T(s) = -\mu(s)B(s) + \gamma(s)N(s) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu(s) = 0 \\ \gamma(s) = \kappa(s). \end{array} \right.$$

De aquí, $\omega(s) = \lambda(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$, y como además debe verificarse que $N' = \omega \times N$,

$$-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) = \lambda(s)T(s)\times N(s) + \kappa B(s)\times N(s) = \lambda(s)B(s) - \kappa(s)T(s) \Rightarrow \lambda(s) = \tau(s).$$

Así, $\omega(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$. Veamos si se cumple la tercera condición:

$$\omega \times B = \begin{vmatrix} T & N & B \\ \tau & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\tau N = B'.$$

(b) Analicemos en qué condiciones $\omega(s)$ es constante:

$$\omega' = 0 \Leftrightarrow \tau' T + \tau(\kappa N) + \kappa' B + \kappa(-\tau N) = \tau' T + \kappa' B = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau = \text{ cte.} \\ \kappa = \text{ cte.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha \text{ es hélice circular.}$$

(c) El que ω sea una recta implica ya regularidad, y equivale a que su curvatura sea nula. Como s no es parámetro arco para ω, calculemos las dos primeras derivadas:

$$\begin{aligned} \omega' &= \tau' T + \kappa' B \quad \text{y} \quad \|\omega'\| = \sqrt{\tau'^2 + \kappa'^2} \neq 0 \ (\alpha \text{ no es hélice circular}) \\ \omega'' &= \tau'' T + \tau' \kappa N + \kappa'' B - \kappa' \tau N = \tau'' T + (\tau' \kappa - \tau \kappa') N + \kappa'' B. \end{aligned}$$

La curvatura de ω es nula si y sólo si $\omega' \times \omega'' = 0$:

$$\begin{aligned} \omega' \times \omega'' &= \begin{vmatrix} T & N & B \\ \tau' & 0 & \kappa' \\ \tau'' & \tau'\kappa - \tau\kappa' & \kappa'' \end{vmatrix} = -\kappa'(\tau'\kappa - \tau\kappa')T - (\tau'\kappa'' - \tau''\kappa')N + \tau'(\tau'\kappa - \tau\kappa')B \\ &= -\kappa'(\tau'\kappa - \tau\kappa')T + (\tau'\kappa - \tau\kappa')' N + \tau'(\tau'\kappa - \tau\kappa')B = 0 \Leftrightarrow \tau'\kappa - \tau\kappa' = 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \text{ cte.} \Leftrightarrow \alpha \text{ es hélice general, no circular.} \end{aligned}$$