Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Ejercicios Tema 2

M. C. González Dávila, I. Gutiérrez Sagredo, D. Iglesias Ponte

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Consideremos las aplicaciones:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & si\ t < 0 \\ (0,0,0) & si\ t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & si\ t > 0 \end{cases} \quad , \quad \beta(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & si\ t \neq 0 \\ (0,0,0) & si\ t = 0 \end{cases}$$

(*a*) *Probar que α y β son curvas parametrizadas regulares;*

(*b*) *Demostrar que ambas tienen la misma curvatura y que es no nula salvo en los valores del parámetro $t = 0$ y $t = \pm\sqrt{2/3}$;*

(*c*) *Probar que α y β tienen torsión nula allí donde esté definida. Sin embargo, la curva α no es plana (su traza consiste en dos curvas planas distintas unidas por un punto donde $\kappa = 0$) y β sí lo es. (Este ejemplo ilustra que, en los puntos donde la curvatura se anula, pueden ocurrir situaciones extrañas y hay que estudiarlas particularmente.)*

2. Sea α una curva regular cuya traza descansa en una esfera de radio r. Comprobar que $\kappa \geq 1/r$.

3. Calcular el triedro de Frenet, curvatura y torsión de las siguientes curvas parametrizadas:

(a) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = \left(\frac{5}{13}\cos s, \frac{8}{13} - \sin s, -\frac{12}{13}\cos s\right)$;

(b) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$. *¿Cuánto vale* κ *al pasar por* $(1, 0, 0)$*? ¿Es constante el signo de la torsión?*

4. Sea α *una curva birregular. Probar que la traza de* α *es un trozo de circunferencia si y sólo si la curva* $\beta = \alpha + (1/\kappa)N$ *es una curva constante.*

5. Sea α *una curva birregular. Calcular los elementos del triedro de Frenet, curvatura y torsión de la indicatriz esférica tangente en términos de los de* α*.*

6. Sea α *una curva birregular. Verificar que* α *es una hélice general si y sólo si su indicatriz esférica tangente es un arco de circunferencia.*

7. Sea α *una curva birregular. Probar que:*

(a) *existe una curva* $\omega : I \to \mathbb{R}^3$ *tal que las ecuaciones de Frenet-Serret se pueden expresar de la siguiente forma:*

$$T' = \omega \times T \quad , \quad N' = \omega \times N \quad , \quad B' = \omega \times B.$$

Al vector $\omega(s)$ *se le denomina vector de Darboux o vector velocidad angular de* α *en* s*;*

(b) $\omega(s)$ *es constante si y sólo si* α *es un arco de hélice circular;*

(c) $\omega(s)$ *es una recta si y sólo si* α *es un arco de hélice general (no circular).*