Tema 4: Medidas signadas

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

0 Introducción

En este tema permitiremos que las medidas tomen valores negativos, y mediante las descomposiciones de Hahn y Jordan mostraremos cómo el estudio de estas nuevas *medidas con signo* o *signadas* se reduce, en muchos aspectos, al de las medidas no negativas consideradas hasta ahora.

Al integrar una función no negativa sobre los conjuntos de una σ-álgebra se obtiene una nueva medida partiendo de la medida original. El teorema de Radon-Nikodým asegura que cualquier medida con una cierta propiedad de continuidad puede ser obtenida de esta manera. Esto conduce a la definición de derivada de una medida con respecto a otra. Se describirá el cálculo de tales derivadas, y se dará un nuevo resultado de descomposición debido a Lebesgue.

1 Medidas signadas y la descomposición de Hahn

Se ha visto (Teorema 2.8 del Tema 2) que si f es una función medible no negativa sobre el espacio de medida $(X,\mathscr{S},\mu)$, la función de conjunto φ, definida sobre $\mathscr{S}$ por $\varphi(E)=\int_E f\,d\mu$, es una medida. Por otra parte, si f es cualquier función medible cuya integral con respecto a μ existe, entonces $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$ es una función de conjunto contablemente aditiva sobre $\mathscr{S}$ que se comporta, en muchos aspectos, como una medida. Este hecho sugiere ampliar la definición de medida para permitir que estas tomen valores negativos, lo que haremos en la Definición 1.1. El teorema de descomposición de Jordan mostrará, en la próxima sección, que el estudio de estas nuevas medidas signadas puede ser reducido al de las medidas propiamente dichas.

Definición 1.1 *Sea $(X,\mathscr{S})$ un espacio medible. Una función de conjunto ν definida sobre $\mathscr{S}$ se llama una* medida signada *si el rango de ν está contenido en la recta real extendida, y:*

(i) *ν toma, a lo sumo, uno de los valores ∞, $-\infty$;*

(ii) *$\nu(\emptyset)=0$;*

(iii) *$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)$ ($E_i\in\mathscr{S}$, $E_i\cap E_j=\emptyset$, $i,j\in\mathbb{N}$, $i\neq j$), donde, si el primer miembro es infinito, la serie del segundo miembro toma el valor ∞ ó $-\infty$, según sea el caso.*

Claramente, toda medida es una medida signada.

Ejemplo 1.2 *Probar que si existe $\int f\,d\mu$, entonces*

$$\varphi(E)=\int_E f\,d\mu \quad (E\in\mathscr{S})$$

define una medida signada φ.

Resolución. Puesto que $\int f\,d\mu$ existe, se tiene, o bien $\int f^+\,d\mu<\infty$, o bien $\int f^-\,d\mu<\infty$, lo que proporciona el apartado (i) de la Definición 1.1. El apartado (ii) es trivial. Finalmente, sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos en $\mathscr{S}$ disjntos dos a dos, y dado $E\in\mathscr{S}$ escribamos $\varphi^+(E)=\int_E f^+\,d\mu$, $\varphi^-(E)=\int_E f^-\,d\mu$, de modo que, por el Teorema 2.8 del Tema 2, φ^+ y φ^- son medidas. Entonces,

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\varphi^+\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)-\varphi^-\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi^+(E_i)-\sum_{i=1}^{\infty}\varphi^-(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(E_i),$$

ya que en ninguna etapa del proceso aparece la indeterminación $\infty+(-\infty)$. □

Definición 1.3 *Se dice que $A\subset X$ es un* conjunto positivo con respecto a la medida signada ν *sobre $(X,\mathscr{S})$ (o, más brevemente, un* conjunto ν-positivo*) si $A\in\mathscr{S}$ y $\nu(E)\geq 0$ para cada subconjunto medible E de A.*

Omitiremos «con respecto a ν» (o el prefijo «ν-») si la medida signada ν que se considera es obvia a partir del contexto.

Claramente, $\emptyset$ es un conjunto positivo con respecto a cualquier medida signada.

Cabe destacar que la condición $\nu(A) \geq 0$ es necesaria pero, en general, no suficiente para que A sea un conjunto positivo con respecto a ν. En efecto, si consideramos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{(1/2,1]}$, la medida signada definida sobre los conjuntos medibles Lebesgue $E \subset [0,1]$ por $\nu(E) = \int_E f\, dx$ (cf. Ejemplo 1.2), y el conjunto medible $A = [1/8, 3/4]$, entonces $\nu(A) = 1/8 > 0$ pero A no es un conjunto positivo, ya que $E = (1/2, 3/4) \subset A$ tiene medida $\nu(E) = -1/4 < 0$. Igualmente, $\nu([0,1]) = 0$ pero, como hemos visto, $[0,1]$ contiene subconjuntos de ν-medida negativa.

El siguiente ejemplo muestra una forma importante de construir una medida a partir de una medida signada.

Ejemplo 1.4 *Si A es un conjunto positivo con respecto a ν y se define $\mu(E) = \nu(E \cap A)$ $(E \in \mathscr{S})$, entonces μ es una medida.*

Definición 1.5 *Se dice que $A \subset X$ es un* conjunto negativo con respecto a ν *(o un* conjunto ν-negativo*) si A es un conjunto positivo con respecto a $-\nu$. Equivalentemente, A es un conjunto ν-negativo si $A \in \mathscr{S}$ y $\nu(E) \leq 0$ para todo conjunto medible $E \subset A$.*

Definición 1.6 *Se dirá que A es un* conjunto nulo con respecto a ν *(o un* conjunto ν-nulo*) si A es, simultáneamente, un conjunto positivo y un conjunto negativo con respecto a ν. Equivalentemente, A es un conjunto ν-nulo si $A \in \mathscr{S}$ y $\nu(E) = 0$ para todo conjunto medible $E \subset A$.*

Ejemplo 1.7 *Si A es un conjunto positivo con respecto a ν, entonces todo subconjunto medible de A es un conjunto positivo. Lo mismo sucede con los conjuntos negativos y los conjuntos nulos.*

Los siguientes teoremas, Teorema 1.8 y Teorema 1.10, serán necesarios para probar el principal resultado de esta sección, Teorema 1.11, el cual viene a afirmar que X puede ser dividido en dos conjuntos de modo que ν, en uno de ellos, y $-\nu$, en el otro, actúan como medidas positivas.

Teorema 1.8 *La unión contable de conjuntos positivos con respecto a una medida signada ν es también un conjunto positivo con respecto a ν.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de conjuntos positivos (no se excluye que sean todos iguales a $\emptyset$ desde uno en adelante). Podemos escribir $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, donde $B_n \in \mathscr{S}$, $B_n \subset A_n$, y $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ $(n,m \in \mathbb{N})$ (cf. Lema 2.16 del Tema 1). Sea ahora $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Entonces $E = \bigcup_{n=1}^\infty (E \cap B_n)$, donde, por el Ejemplo 1.7, $E \cap B_n$ es un conjunto positivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, $\nu(E) = \sum_{n=1}^\infty \nu(E \cap B_n) \geq 0$, probando que $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ es un conjunto positivo. □

Corolario 1.9 *La unión contable de conjuntos negativos o nulos es, respectivamente, un conjunto negativo o nulo.*

Teorema 1.10 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{S})$. Sea $E \in \mathscr{S}$, con $\nu(E) > 0$. Existe un conjunto A, positivo con respecto a ν, tal que $A \subset E$ y $\nu(A) > 0$.*

Demostración. Si E no contiene ningún conjunto de ν-medida negativa, es decir, si E ya es un conjunto positivo, basta tomar $A = E$. De lo contrario, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que algún $B \in \mathscr{S}$ satisface $B \subset E$ y $\nu(B) < -1/n$ (si para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo conjunto medible $B \subset E$ fuese $\nu(B) \geq -1/n$, haciendo $n \to \infty$ obtendríamos $\nu(B) \geq 0$, de modo que E sería un conjunto positivo). Sean n_1 el menor entero positivo para el que esto ocurre y E_1 un subconjunto medible de E con $\nu(E_1) < -1/n_1$. Reiterando el proceso, una vez elegidos $n_1, \ldots, n_{k-1}$ y $E_1, \ldots, E_{k-1}$, sea n_k el menor entero positivo para el que existe un subconjunto medible E_k de $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ con la propiedad de que $\nu(E_k) < -1/n_k$. Por construcción, $n_1 \leq n_2 \leq \ldots$, y disponemos de la correspondiente sucesión $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ de subconjuntos disjuntos de E con la referida propiedad.

Si el proceso se detiene, digamos, en n_m, el conjunto buscado es $A = E \setminus \bigcup_{i=1}^m E_i$. En efecto, A es, claramente, un conjunto positivo; además, $\nu(A) > 0$, por cuanto $\nu(A) = 0$ entrañaría la contradicción

$$\nu(E) = \nu(A) + \nu\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) = \sum_{i=1}^m \nu(E_i) < 0.$$

Si el proceso no se detiene, pongamos $A = E \setminus \bigcup_{k=1}^\infty E_k$; queremos probar que A es un conjunto positivo. Ahora,

$$\nu(E) = \nu(A) + \nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right). \tag{1}$$

Pero ν no puede tomar ambos valores ∞, $-\infty$, $\nu(E) > 0$, y

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) < 0,$$

por lo que el segundo término del segundo miembro de (1) es finito. Así pues, $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) > -\infty$, de modo que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k < \infty$. Si una serie converge, su término general tiende a cero; consecuentemente, $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, obligando a que $n_k > 1$ para, digamos, $k \geq k_0$. Tomemos $B \in \mathscr{S}$, $B \subset A = E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, y $k \geq k_0$; se tiene que $B \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$, y entonces

$$\nu(B) \geq -\frac{1}{n_k - 1}, \tag{2}$$

por la definición de n_k. Puesto que (2) se cumple para todo $k \geq k_0$, haciendo $k \to \infty$ resulta $\nu(B) \geq 0$, de modo que A es un conjunto positivo. Al igual que antes, $\nu(A) = 0$ implicaría $\nu(E) < 0$, y se concluye que $\nu(A) > 0$, como se pretendía. □

Teorema 1.11 (Teorema de descomposición de Hahn) *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{S})$. Existen un conjunto positivo A y un conjunto negativo B tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. El par A, B se llama una* descomposición de Hahn *de X con respecto a ν. Es única excepto por el hecho de que si A_1, B_1 y A_2, B_2 son dos descomposiciones de Hahn de X con respecto a ν, entonces $A_1 \triangle A_2 = B_1 \triangle B_2$ es un conjunto ν-nulo.*

Demostración. Podemos suponer que $\nu < \infty$ sobre $\mathscr{S}$; de lo contrario consideramos $-\nu$, y la validez de la tesis del teorema para $-\nu$ implicará su validez para ν.

Sea $\lambda = \sup\{\nu(C) : C \text{ positivo}\}$. Nótese que el conjunto del que se toma supremo contiene a $\emptyset$ y, por lo tanto, él mismo no es vacío. Entonces, $\lambda \geq 0$. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos positivos tal que $\lambda = \lim_{i\to\infty} \nu(A_i)$. Por el Teorema 1.8, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es un conjunto positivo, y, por la definición de λ, $\lambda \geq \nu(A)$. Pero $A \setminus A_i \subset A$ $(i \in \mathbb{N})$, y, por lo tanto, es un conjunto positivo. Así pues,

$$\nu(A) = \nu(A_i) + \nu(A \setminus A_i) \geq \nu(A_i) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Luego, $\nu(A) \geq \lim_{i\to\infty} \nu(A_i) = \lambda$. Se sigue que $\nu(A) = \lambda$, es decir, el valor λ es un máximo que se alcanza en el conjunto positivo A.

Pongamos ahora $B = A^c$. Si B contiene un conjunto D de ν-medida positiva, entonces $0 < \nu(D) < \infty$ y, por el Teorema 1.10, D contiene un conjunto positivo E tal que $0 < \nu(E) < \infty$. Pero entonces $\nu(A \cup E) = \nu(A) + \nu(E) > \lambda$, contradiciendo la definición de λ. Se concluye que $\nu(D) \leq 0$, B es un conjunto negativo, y A, B forman una descomposición de Hahn.

Para la unicidad, téngase en cuenta que $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap B_2 = B_2 \setminus B_1$, así que este conjunto es simultáneamente positivo y negativo, es decir, es un conjunto nulo. De manera similar, $A_2 \setminus A_1 = B_1 \setminus B_2$ es un conjunto nulo, por lo que $A_1 \triangle A_2 = B_1 \triangle B_2$ es nulo. □

2 La descomposición de Jordan

Usamos ahora la descomposición de Hahn para escribir, en el Teorema 2.3, una medida signada como diferencia de dos medidas.

Definición 2.1 *Sean ν_1, ν_2 dos medidas sobre $(X, \mathscr{S})$. Se dice que ν_1 y ν_2 son* mutuamente singulares *si, para algún $A \in \mathscr{S}$, $\nu_2(A) = \nu_1(A^c) = 0$. En tal caso, escribimos $\nu_1 \perp \nu_2$.*

Ejemplo 2.2 *Sea μ una medida y supongamos que las medidas ν_1, ν_2 están dadas por $\nu_1(E) = \mu(A \cap E)$, $\nu_2(E) = \mu(B \cap E)$, donde $\mu(A \cap B) = 0$ y $E, A, B \in \mathscr{S}$. Probar que $\nu_1 \perp \nu_2$.*

Resolución. Se tiene que $\nu_1(B) = \mu(A \cap B) = 0$, $\nu_2(B^c) = \mu(\emptyset) = 0$. □

Teorema 2.3 (Teorema de descomposición de Jordan) *Sea ν una medida signada sobre $(X,\mathscr{S})$. Existen medidas ν^+ y ν^- sobre $(X,\mathscr{S})$ tales que $\nu=\nu^+-\nu^-$ y $\nu^+\perp\nu^-$. Las medidas ν^+ y ν^- están unívocamente determinadas por ν, y la expresión $\nu=\nu^+-\nu^-$ se llama* descomposición de Jordan *de ν.*

Demostración. Sea A, B una descomposición de Hahn de X con respecto a ν, y definamos ν^+ y ν^- por

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap A),\quad \nu^-(E)=-\nu(E\cap B)\qquad (E\in\mathscr{S}). \tag{3}$$

Las funciones de conjunto ν^+ y ν^- son medidas (Ejemplo 1.4), y $\nu^+(B)=\nu^-(A)=0$. Por tanto, $\nu^+\perp\nu^-$. Además, para $E\in\mathscr{S}$,

$$\nu(E)=\nu(E\cap A)+\nu(E\cap B)=\nu^+(E)-\nu^-(E).$$

Luego, $\nu=\nu^+-\nu^-$. Para completar la demostración sólo necesitamos probar la unicidad de esta descomposición.

Sea $\nu=\nu_1-\nu_2$ cualquier descomposición de ν en medidas mutuamente singulares. Entonces $X=A\cup B$, donde $B=A^c$ y $\nu_1(B)=\nu_2(A)=0$. Sea $D\subset A$. Se tiene que $\nu(D)=\nu_1(D)-\nu_2(D)=\nu_1(D)\geq 0$, así que A es un conjunto positivo con respecto a ν. Similarmente, B es un conjunto negativo. Además, ya que $\nu_1(B)=\nu_2(A)=0$, se verifica

$$\begin{aligned}\nu_1(E)&=\nu_1(E\cap A)+\nu_1(E\cap B)=\nu_1(E\cap A)=\nu_1(E\cap A)-\nu_2(E\cap A)=\nu(E\cap A),\\ \nu_2(E)&=\nu_2(E\cap A)+\nu_2(E\cap B)=\nu_2(E\cap B)=-\nu_1(E\cap B)+\nu_2(E\cap B)=-\nu(E\cap B)\end{aligned}\qquad (E\in\mathscr{S}),$$

de modo que cualquiera de estas descomposiciones de ν se obtiene a partir de una descomposición de Hahn de X como en (3). Llegado este punto, basta probar que las medidas (3) no dependen de la descomposición de Hahn que se considere, esto es, que si A, B y A', B' son dos descomposiciones de Hahn, entonces las medidas a las que cada una de ellas dan lugar según (3) son las mismas. En efecto, para cada $E\in\mathscr{S}$, y dado que $A\cup A'$ es un conjunto positivo, se tiene

$$\begin{aligned}\nu\left(E\cap\left(A\cap A'\right)\right)&\leq\nu(E\cap A)\leq\nu\left(E\cap\left(A\cup A'\right)\right),\\ \nu\left(E\cap\left(A\cap A'\right)\right)&\leq\nu\left(E\cap A'\right)\leq\nu\left(E\cap\left(A\cup A'\right)\right).\end{aligned}$$

Ahora bien, por el Teorema 1.11, el conjunto $A\triangle A'$ es ν-nulo; así pues,

$$\nu\left(E\cap\left(A\cup A'\right)\right)=\nu\left(E\cap\left(A\triangle A'\right)\right)+\nu\left(E\cap\left(A\cap A'\right)\right)=\nu\left(E\cap\left(A\cap A'\right)\right),$$

probando que $\nu(E\cap A)=\nu\left(E\cap A'\right)$ y con ello que ν^+, definida en (3), es única. Pero entonces también lo es $\nu^-=\nu^+-\nu$, lo que completa la demostración. □

Obsérvese que la descomposición de Hahn es del espacio y no es única, mientras que la descomposición de Jordan es de la medida signada y es única.

Definición 2.4 *Las medidas ν^+ y ν^- que dan la descomposición de Jordan de ν conforme al Teorema 2.3 se denominan* variación positiva *y* variación negativa *de ν, respectivamente.*

Puesto que una medida signada ν toma, a lo sumo, uno de los valores ∞ ó $-\infty$, dada una descomposición de Hahn A, B de X respecto de ν no puede ocurrir que $\nu(A)\geq 0$ y $\nu(B)\leq 0$ sean ambas infinitas: o bien $\nu(A)<\infty$, o bien $\nu(B)>-\infty$. Sigue de (3) que, al menos, una de las medidas ν^+ ó ν^- es finita:

$$\nu^+(X)=\nu(X\cap A)=\nu(A)<\infty,\quad \text{ó}\quad \nu^-(X)=-\nu(X\cap B)=-\nu(B)<\infty.$$

Ejemplo 2.5 *Sea $(X,\mathscr{S},\mu)$ un espacio de medida, y supongamos que existe $\int f\,d\mu$. Definimos ν por $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$ $(E\in\mathscr{S})$. Encontrar una descomposición de Hahn con respecto a ν y la descomposición de Jordan de ν.*

Resolución. En virtud del Ejemplo 1.2, ν es una medida signada. Sean $A=\{x:f(x)\geq 0\}$, $B=\{x:f(x)<0\}$. El par A, B

constituye, claramente, una descomposición de Hahn, mientras que ν^+, ν^-, dadas por

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- \, d\mu \qquad (E \in \mathscr{S}),$$

pueden ser obtenidas mediante (3) a partir de dicha descomposición de Hahn (nótese que $f\chi_A = f^+$, $-f\chi_B = f^-$), y configuran la descomposición de Jordan. □

Definición 2.6 *La* variación total *de una medida signada ν es $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, donde $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es la descomposición de Jordan de ν.*

Claramente, $|\nu|$ es una medida sobre $(X, \mathscr{S})$, y $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ para cada $E \in \mathscr{S}$.

Definición 2.7 *Una medida signada ν sobre $(X, \mathscr{S})$ se dice* σ-finita *si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in \mathscr{S}$ y $|\nu(X_n)| < \infty$.*

Ejemplo 2.8 *Sea ν una medida signada. Demostrar que son equivalentes:*

(i) *ν es finita;*

(ii) *ν^+ y ν^- son finitas;*

(iii) *$|\nu|$ es finita.*

Deducir que el resultado anterior permanece válido si la finitud se reemplaza por σ-finitud.

Resolución. Supóngase que E es un conjunto medible, con $|\nu(E)| < \infty$. Como ν^+ y ν^- no son ambas infinitas, necesariamente $\nu^+(E) < \infty$ y $\nu^-(E) < \infty$, así que $|\nu|(E) < \infty$. Por último, resulta obvio que ν es finita si lo es $|\nu|$.

El resultado relativo a la σ-finitud es una consecuencia inmediata: basta aplicar las equivalencias anteriores a $E = X_n$ $(n \in \mathbb{N})$, siendo $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ la familia de conjuntos medibles que satisface las condiciones de la Definición 2.7, cuya existencia se asume. □

3 El teorema de Radon-Nikodým

Hemos visto que, cuando $\int f \, d\mu$ está definida, la función de conjunto $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ es una medida signada. En la práctica, resulta útil saber cuándo una medida tiene esta forma. La condición esencial viene dada en las Definiciones 3.1 y 3.2. El Teorema 3.5 muestra que si las medidas (positivas o signadas) son, adicionalmente, σ-finitas, entonces ν puede ser expresada como una integral.

Definición 3.1 *Si μ, ν son medidas en el espacio medible $(X, \mathscr{S})$ tales que $\nu(E) = 0$ cuando $\mu(E) = 0$, se dice que ν es* absolutamente continua *respecto de μ, y se escribe $\nu \ll \mu$.*

Definición 3.2 *Dadas dos medidas signadas μ, ν sobre $(X, \mathscr{S})$, se dice que ν es* absolutamente continua *con respecto a μ, y se escribe $\nu \ll \mu$, si $|\mu|(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$.*

Ejemplo 3.3 *Probar que las siguientes condiciones sobre las medidas signadas μ y ν, definidas en un mismo espacio medible $(X, \mathscr{S})$, son equivalentes:*

(i) *$\nu \ll \mu$;*

(ii) *$|\nu| \ll |\mu|$;*

(iii) *$\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$.*

Resolución. Por la Definición 3.2, se tiene que $\nu \ll \mu$ si, y sólo si, $\nu \ll |\mu|$. Por tanto, podemos suponer que $\mu \geq 0$.

Como $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, encontramos que $|\nu| \ll \mu$ implica $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$, así que $\nu \ll \mu$.

Para el recíproco, supongamos que $\nu = \nu^+ - \nu^-$, con descomposición de Hahn A, B. Entonces, si $\nu \ll \mu$ y $\mu(E) = 0$ se tiene $\mu(E \cap A) = 0$, así que $\nu^+(E) = 0$, y similarmente $\nu^-(E) = 0$. Se concluye que $|\nu|(E) = 0$. $\square$

Ejemplo 3.4 *Si μ es una medida, existe $\int f\,d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$, entonces $\nu \ll \mu$.*

En la dirección opuesta encontramos el principal resultado de este tema.

Teorema 3.5 (Radon-Nikodým) *Supongamos que $(X, \mathscr{S}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita y ν es una medida σ-finita sobre $\mathscr{S}$, verificando que $\nu \ll \mu$. Existe una función medible no negativa y finita f sobre X tal que*

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Además, f es única en el sentido de que si

$$\nu(E) = \int_E g\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}),$$

entonces $f = g$ c.t.p. $[\mu]$.

Demostración. Supóngase que el resultado es válido si las medidas μ, ν son finitas. Para probar el caso general, escribimos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $\mu(A_n) < \infty$, y $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, con $\nu(B_m) < \infty$, donde se puede suponer que cada una de las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ se compone de conjuntos disjuntos dos a dos. Así, $X = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} (A_n \cap B_m)$ es una unión contable de conjuntos disjuntos dos a dos sobre los que tanto μ como ν son finitas. Reescribimos esta unión como $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ y consideramos sobre cada X_k la σ-álgebra

$$\mathscr{S}_k = \{E \cap X_k : E \in \mathscr{S}\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, las restricciones de μ y ν a $\mathscr{S}_k$ son medidas finitas sobre $\mathscr{S}_k$. La validez del resultado para medidas finitas proporciona funciones $f_k \geq 0$, medibles y finitas sobre X_k, tales que

$$\nu(E) = \int_E f_k\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}_k,\ k \in \mathbb{N}).$$

Dado $E \in \mathscr{S}$, se tiene que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, donde los conjuntos $E_k = E \cap X_k \in \mathscr{S}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ son disjuntos dos a dos. Definiendo $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{X_k}$ obtenemos una función no negativa, medible (cf. Ejemplo 3.11 del Tema 1) y finita sobre X, que, por el teorema de Beppo Levi, satisface

$$\nu(E) = \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k \chi_{X_k}\,d\mu = \int_E f\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Queda así probado el caso general.

Ahora necesitamos demostrar el teorema para medidas finitas. Sea $\mathscr{K}$ la clase de todas las funciones $f \geq 0$, μ-medibles, que verifican

$$\int_E f\,d\mu \leq \nu(E) \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Como $0 \in \mathscr{K}$, resulta que $\mathscr{K} \neq \emptyset$. Sea

$$\alpha = \sup\left\{\int f\,d\mu : f \in \mathscr{K}\right\},$$

y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathscr{K}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \alpha$. Pongamos $g_m = \max\{f_1, \ldots, f_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$. Fijado $B \in \mathscr{S}$, se prueba, por inducción sobre n, que B es unión de conjuntos medibles disjuntos B_i, tales que $g_n = f_i$ en B_i $(i = 1, \ldots, n)$. En efecto, para $n = 2$ consideramos

$$B_1 = \{x \in B : f_1(x) \geq f_2(x)\}, \quad B_2 = B \setminus B_1 = \{x \in B : f_2(x) > f_1(x)\};$$

la descomposición $B = B_1 \cup B_2$ satisface las condiciones requeridas. Supongamos que una tal descomposición es posible para n, y sea

$$g_{n+1} = \max\{f_1, \dots, f_{n+1}\} = \max\{g_n, f_{n+1}\}.$$

Entonces $B = F_n \cup B_{n+1}$, donde

$$F_n = \{x \in B : g_n(x) \geq f_{n+1}(x)\} = \{x \in B : g_{n+1}(x) = g_n(x)\},$$
$$B_{n+1} = \{x \in B : f_{n+1}(x) > g_n(x)\} = \{x \in B : g_{n+1}(x) = f_{n+1}(x)\}.$$

Así pues,

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} f_{n+1}(x), & x \in B_{n+1} \\ g_n(x), & x \in F_n, \end{cases}$$

y $F_n \cap B_{n+1} = \emptyset$. Por hipótesis inductivas, $F_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$, con $g_{n+1}(x) = g_n(x) = f_i(x)$ $(x \in B_i,\ i = 1, \dots, n)$, mientras que $g_{n+1}(x) = f_{n+1}(x)$ $(x \in B_{n+1})$; esto completa la inducción.

Ahora, puesto que $f_i \in \mathscr{K}$ $(i = 1, \dots, n)$, se tiene

$$\int_B g_n \, d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f_i \, d\mu \leq \sum_{i=1}^n \nu(B_i) = \nu(B) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

La sucesión $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ es creciente; escribamos $g_0 = \lim_{n\to\infty} g_n$. Sigue de (4) y del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue que

$$\int_E g_0 \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu \leq \nu(E) \quad (E \in \mathscr{S}),$$

así que $g_0 \in \mathscr{K}$. Por consiguiente,

$$\alpha \geq \int g_0 \, d\mu \geq \int g_n \, d\mu \geq \int f_n \, d\mu \quad (n \in \mathbb{N}),$$

probando, tras un paso al límite, que $\alpha = \int g_0 \, d\mu$.

Como, en particular,

$$\int g_0 \, d\mu \leq \nu(X) < \infty,$$

existe una función medible y finita $f \geq 0$, tal que $f = g_0$ c.t.p. $[\mu]$. Afirmamos que la medida

$$\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathscr{S})$$

es idénticamente nula. En efecto, por la construcción de f, ν_0 es no negativa. Supongamos, para alcanzar una contradicción, que existe $C \in \mathscr{S}$ tal que $\nu_0(C) > 0$. Para un $0 < \varepsilon < 1$ apropiado se tiene entonces que $(\nu_0 - \varepsilon\mu)(C) > 0$, y el Teorema 1.10 proporciona un conjunto $A \subset C$, positivo con respecto a $\nu_0 - \varepsilon\mu$, tal que $(\nu_0 - \varepsilon\mu)(A) > 0$. Además, $\mu(A) > 0$; de lo contrario, como $\nu \ll \mu$, tendríamos $\nu(A) = 0$, obligando a que $(\nu_0 - \varepsilon\mu)(A) = 0$. Así pues,

$$\varepsilon\mu(E \cap A) \leq \nu_0(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E\cap A} f \, d\mu \quad (E \in \mathscr{S}).$$

La función $g = f + \varepsilon\chi_A$ cumple entonces que

$$\int_E g \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \varepsilon\mu(E \cap A) \leq \int_{E\setminus A} f \, d\mu + \nu(E \cap A) \leq \nu(E \setminus A) + \nu(E \cap A) = \nu(E) \quad (E \in \mathscr{S}),$$

de modo que $g \in \mathscr{K}$. Pero

$$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu + \varepsilon\mu(A) > \alpha,$$

contradiciendo la maximalidad de α. Se concluye que $\nu_0 = 0$ en $\mathscr{S}$, esto es, que

$$\int_E f\,d\mu = \nu(E) \quad (E \in \mathscr{S}),$$

de modo que f tiene las propiedades requeridas.

Finalmente, supongamos que g también las tiene. Entonces

$$\int_E (f-g)\,d\mu = 0$$

para todo $E \in \mathscr{S}$, y particularizando $E = \{x : f(x) > g(x)\}$ encontramos que $f \leq g$ c.t.p.. Se prueba similarmente que $f \geq g$ c.t.p. y, con ello, que f es única en el sentido que se afirmaba. □

Corolario 3.6 *El teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5) puede ser extendido al caso en que ν es una medida signada σ-finita.*

Demostración. El teorema de descomposición de Jordan (Teorema 2.3) permite escribir $\nu = \nu^+ - \nu^-$ y, por los Ejemplos 2.8 y 3.3, ν^+ y ν^- son medidas σ-finitas, absolutamente continuas respecto de ν. El Teorema 3.5 asegura entonces que

$$\nu^+(E) = \int_E f_1\,d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f_2\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}),$$

siendo f_1 y f_2 funciones medibles no negativas y finitas, al menos una de las cuales es integrable. Luego, la integral de $f = f_1 - f_2$ está bien definida, y

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E f\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}).$$ □

Corolario 3.7 *El teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5) también puede ser extendido al caso en que μ es una medida signada, donde por $\int_E f\,d\mu$ entendemos entonces*

$$\int_E f\,d\mu^+ - \int_E f\,d\mu^- \quad (E \in \mathscr{S}),$$

siempre que esta diferencia no sea indeterminada. Cualesquiera dos funciones representantes f y g así obtenidas son iguales c.t.p. $[|\mu|]$.

Demostración. Sea A, B una descomposición de Hahn de X con respecto a μ, de modo que $\mu^+(E) = \mu(E \cap A)$, $\mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$ $(E \in \mathscr{S})$.

Se tiene que $\nu \ll \mu^+$ sobre A. En efecto, sea $E \subset A$ tal que $\mu^+(E) = 0$. Como $E \cap B = \emptyset$, también $\mu^-(E) = 0$, con lo cual $|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E) = 0$; puesto que $\nu \ll \mu$, necesariamente $\nu(E) = 0$. Además, atendiendo al Ejemplo 2.8, μ^+ es σ-finita sobre A. Aplicando el Teorema 3.5 a las restricciones de ν y μ^+ a A, obtenemos

$$\nu(E \cap A) = \int_{E \cap A} f_1\,d\mu^+ \quad (E \in \mathscr{S})$$

para una función apropiada f_1 sobre A. Similarmente,

$$\nu(E \cap B) = \int_{E \cap B} f_2\,d\mu^- \quad (E \in \mathscr{S})$$

para cierta función f_2 definida en B. Pongamos $f = f_1\chi_A - f_2\chi_B$. Por el Ejemplo 3.11 del Tema 1, f es medible en X y

$$\begin{aligned}
\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) &= \int_{E \cap A} f_1\,d\mu^+ - \int_{E \cap B} (-f_2)\,d\mu^- \\
&= \int_{E \cap A} f\,d\mu^+ - \int_{E \cap B} f\,d\mu^- = \int_E f\,d\mu^+ - \int_E f\,d\mu^- \\
&= \int_E f\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}),
\end{aligned}$$

donde, para escribir la penúltima igualdad, hemos usado que $\mu^+(E\cap B) = \mu^-(E\cap A) = 0$. Como ν es una medida signada, toma, a lo sumo, uno de los valores ∞ ó $-\infty$, de modo que la integral anterior no tiene la forma $\infty + (-\infty)$ y está bien definida.

Por construcción, dos cualesquiera de estas funciones coinciden excepto en un conjunto de μ^+-medida y μ^--medida nulas, lo que completa la prueba. □

4 Algunas aplicaciones del teorema de Radon-Nikodým

En esta sección consideramos el «cálculo de derivadas» al que da lugar el teorema de Radon-Nikodým, otra de cuyas múltiples aplicaciones es el teorema de descomposición de Lebesgue, recogido aquí como Teorema 4.10.

Nuestro primer resultado, relativo a la continuidad absoluta, es una generalización del Teorema 2.8 del Tema 2.

Teorema 4.1 *Sean μ, ν medidas signadas sobre $(X,\mathscr{S})$ tales que ν es finita y $\nu \ll \mu$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $E \in \mathscr{S}$ y $|\mu|(E) < \delta$ implica $|\nu|(E) < \varepsilon$.*

Demostración. Por el Ejemplo 3.3, $\nu \ll \mu$ es equivalente a $|\nu| \ll |\mu|$, mientras que, por el Ejemplo 2.8, $|\nu|$ es finita si, y sólo si, ν lo es; por tanto, no se pierde generalidad suponiendo que μ y ν son medidas.

Si el resultado fuera falso, existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{S}$, tales que $\mu(E_n) < 1/2^n$ pero $\nu(E_n) \geq \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$. Considérese

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k, \quad F_k = \bigcup_{m=k}^{\infty} E_m.$$

Entonces

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \leq \mu(F_k) \leq \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (k\in\mathbb{N}),$$

así que $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$. Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\nu(F_k) \geq \nu(E_k) \geq \varepsilon$ y ν es finita, de modo que, por el Teorema 3.9 (ii) del Tema 1,

$$\nu\Big(\limsup_{n\to\infty} E_n\Big) = \nu\Big(\lim_{k\to\infty} F_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \nu(F_k) \geq \varepsilon > 0,$$

contradiciendo la hipótesis de que $\nu \ll \mu$ y probando el teorema. □

El recíproco es cierto sin ninguna restricción de finitud.

Ejemplo 4.2 *Si μ,ν son medidas signadas sobre $(X,\mathscr{S})$ y si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\mu|(E) < \delta$ implica $|\nu|(E) < \varepsilon$, entonces $\nu \ll \mu$.*

Resolución. Si $|\mu|(E) = 0$, entonces $|\nu|(E) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicamos el Ejemplo 3.3. □

Definición 4.3 *Sean μ, ν medidas signadas σ-finitas sobre $(X,\mathscr{S})$, y supongamos que $\nu \ll \mu$. La* derivada de Radon-Nikodým *$d\nu/d\mu$ de ν con respecto a μ es cualquier función medible f tal que*

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}),$$

donde

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f\,d\mu^+ - \int_E f\,d\mu^- \quad (E \in \mathscr{S}),$$

como en el Corolario 3.7.

El teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5) muestra que la Definición 4.3 solamente especifica $d\nu/d\mu$ como una de un conjunto de funciones que coinciden dos a dos c.t.p. $[\mu]$; esta circunstancia no es significativa, ya que, en la práctica, $d\nu/d\mu$ comparecerá, usualmente, bajo el signo integral.

Nos disponemos a establecer diversas conexiones entre derivadas de Radon-Nikodým. En lo que sigue continuaremos indicando la medida, digamos μ, con respecto a la cual las funciones son iguales c.t.p. mediante la notación $[\mu]$. En caso de que

μ sea una medida signada, las funciones son iguales c.t.p. $[|\mu|]$. Al escribir $d\nu/d\psi \neq d\varphi/d\lambda$ $[\mu]$ querremos significar que, o bien las funciones difieren en un conjunto de μ-medida positiva, o bien no son medibles con respecto a la misma σ-álgebra.

Teorema 4.4 *Si ν_1, ν_2, μ son medidas σ-finitas sobre $(X,\mathscr{S})$ con $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \ll \mu$, entonces*

$$\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \quad [\mu]. \tag{5}$$

Demostración. Claramente, $\nu_1+\nu_2$ es una medida σ-finita y $\nu_1+\nu_2 \ll \mu$, por lo que existe $d(\nu_1+\nu_2)/d\mu$ (Teorema 3.5). Además,

$$\begin{aligned}(\nu_1+\nu_2)(E) &= \nu_1(E)+\nu_2(E)\\ &= \int_E \frac{d\nu_1}{d\mu}\,d\mu + \int_E \frac{d\nu_2}{d\mu}\,d\mu\\ &= \int_E \left(\frac{d\nu_1}{d\mu}+\frac{d\nu_2}{d\mu}\right)d\mu \quad (E\in\mathscr{S}).\end{aligned}$$

La unicidad de $d(\nu_1+\nu_2)/d\mu$ completa la demostración. □

Probamos ahora que (5) se cumple para medidas signadas, usando descomposiciones de Hahn de X a fin de poder reducir la demostración a medidas.

Teorema 4.5 *Si ν_1, ν_2, $\nu_1+\nu_2$ y μ son medidas signadas σ-finitas sobre $(X,\mathscr{S})$, con $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces se verifica* (5).

Demostración. La suma $\nu_1+\nu_2$ es una medida signada a menos que $\nu_1(E)+\nu_2(E)$ $(E\in\mathscr{S})$ produzca la indeterminación $\infty+(-\infty)$.

(i) Supongamos que μ es una medida. Para $i=1,2$, sean $\nu_i=\nu_i^+-\nu_i^-$ las respectivas descomposiciones de Jordan, con descomposiciones de Hahn asociadas A_i, B_i; nótese que ν_i^+ y ν_i^- son σ-finitas y absolutamente continuas respecto de μ (Ejemplos 2.8 y 3.3). Consideremos por separado los cuatro conjuntos $A_1\cap A_2$, $A_1\cap B_2$, $A_2\cap B_1$ y $B_1\cap B_2$, que constituyen una partición de X. Sobre subconjuntos de $A_1\cap B_2$, por ejemplo, se tiene que $\nu_1+\nu_2=\nu_1^+-\nu_2^-$; luego, si $F\subset A_1\cap B_2$,

$$\begin{aligned}(\nu_1+\nu_2)(F) &= \nu_1^+(F)-\nu_2^-(F)\\ &= \int_F \frac{d\nu_1^+}{d\mu}\,d\mu - \int_F \frac{d\nu_2^-}{d\mu}\,d\mu = \int_F \frac{d\nu_1}{d\mu}\,d\mu + \int_F \frac{d\nu_2}{d\mu}\,d\mu\\ &= \int_F \left(\frac{d\nu_1}{d\mu}+\frac{d\nu_2}{d\mu}\right)d\mu, \end{aligned} \tag{6}$$

pues, claramente, $d\lambda/d\mu=-d(-\lambda)/d\mu$ $[\mu]$ para toda medida signada λ. Ya que cualquier $E\in\mathscr{S}$ puede ser escrito como unión de cuatro conjuntos similares a F, el resultado se obtiene sumando las respectivas ecuaciones (6), toda vez que, al ser ν_1, ν_2 y $\nu_1+\nu_2$ medidas signadas, no se presentará el caso $\infty+(-\infty)$.

(ii) Sea μ una medida signada, y sea A, B una descomposición de Hahn de X respecto de μ. Escribimos $\mathscr{S}'=\{E\cap A : E\in\mathscr{S}\}$ y denotamos por μ', ν_1', ν_2' las restricciones de μ, ν_1, ν_2 a $\mathscr{S}'$. Definimos análogamente $\mathscr{S}''$, μ'', ν_1'', ν_2'' para B. Todas estas restricciones respetan la σ-finitud y la continuidad absoluta. El caso (i), aplicado a A y a B, proporciona:

$$\frac{d(\nu_1'+\nu_2')}{d\mu'} = \frac{d\nu_1'}{d\mu'} + \frac{d\nu_2'}{d\mu'} \quad [|\mu|],$$

$$\frac{d(\nu_1''+\nu_2'')}{d(-\mu'')} = \frac{d\nu_1''}{d(-\mu'')} + \frac{d\nu_2''}{d(-\mu'')} \quad [|\mu|].$$

Ponemos $f_i = d\nu_i'/d\mu'$ sobre A, $f_i = -d\nu_i''/d(-\mu'')$ sobre B. Entonces, para cada $E \in \mathscr{S}$,

$$\int_E f_i \, d\mu = \int_{E\cap A} f_i \, d\mu' - \int_{E\cap B} f_i \, d\left(-\mu''\right) = \nu_i(E\cap A) + \nu_i(E\cap B) = \nu_i(E) \quad (i = 1,2),$$

y análogamente para $\nu_1+\nu_2$: si $g = d(\nu_1+\nu_2)'/d\mu'$ sobre A y $g = -d(\nu_1+\nu_2)''/d(-\mu'')$ sobre B,

$$\int_E g \, d\mu = \int_{E\cap A} g \, d\mu' - \int_{E\cap B} g \, d\left(-\mu''\right) = (\nu_1+\nu_2)(E\cap A) + (\nu_1+\nu_2)(E\cap B) = (\nu_1+\nu_2)(E) \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Puesto que

$$(\nu_1+\nu_2)' = \nu_1' + \nu_2' \quad \text{ y } \quad (\nu_1+\nu_2)'' = \nu_1'' + \nu_2'',$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} = f_1 + f_2 &= \left[\frac{d\nu_1'}{d\mu'} + \frac{d\nu_2'}{d\mu'}\right]\chi_A - \left[\frac{d\nu_1''}{d(-\mu'')} + \frac{d\nu_2''}{d(-\mu'')}\right]\chi_B \\
&= \frac{d\left(\nu_1'+\nu_2'\right)}{d\mu'}\chi_A - \frac{d\left(\nu_1''+\nu_2''\right)}{d\left(-\mu''\right)}\chi_B = \frac{d\left(\nu_1+\nu_2\right)'}{d\mu'}\chi_A - \frac{d\left(\nu_1+\nu_2\right)''}{d\left(-\mu''\right)}\chi_B \\
&= g = \frac{d\left(\nu_1+\nu_2\right)}{d\mu} \quad [|\mu|].
\end{aligned}$$

Nótese que en este proceso tampoco pueden comparecer expresiones indeterminadas. □

Ejemplo 4.6 *Sean μ una medida σ-finita y ν una medida signada σ-finita, con $\nu \ll \mu$. Probar que*

$$\frac{d|\nu|}{d\mu} = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| \quad [\mu].$$

Demostración. Sea $\nu = \nu^+ - \nu^-$ la descomposición de Jordan de ν, asociada a la descomposición de Hahn A, B. Como en el Teorema 4.5, tenemos

$$\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| = \frac{d\nu^+}{d\mu} \quad [\mu]$$

sobre A, y

$$\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| = \frac{d\nu^-}{d\mu} \quad [\mu]$$

sobre B. Más precisamente: las variaciones positiva y negativa de ν son medidas σ-finitas (Ejemplo 2.8). Además, ν^+ y ν^- son absolutamente continuas respecto de μ (Ejemplo 3.3). Por tanto, el teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5) proporciona derivadas medibles, no negativas y finitas $d\nu^+/d\mu$, $d\nu^-/d\mu$. De este modo,

$$\int_E \frac{d\nu^+}{d\mu} \, d\mu = \nu^+(E) = \nu(E\cap A) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\chi_A \, d\mu \quad (E \in \mathscr{S});$$

luego,

$$0 \le \frac{d\nu^+}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu}\chi_A = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|\chi_A \quad [\mu].$$

Similarmente,

$$\int_E \frac{d\nu^-}{d\mu} \, d\mu = \nu^-(E) = -\nu(E\cap B) = -\int_E \frac{d\nu}{d\mu}\chi_B \, d\mu \quad (E \in \mathscr{S})$$

implica

$$0 \le \frac{d\nu^-}{d\mu} = -\frac{d\nu}{d\mu}\chi_B = \left|-\frac{d\nu}{d\mu}\right|\chi_B = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|\chi_B \quad [\mu].$$

Del Teorema 4.4 se concluye que

$$\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| = \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|\chi_A + \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right|\chi_B = \frac{d\nu^+}{d\mu} + \frac{d\nu^-}{d\mu} = \frac{d|\nu|}{d\mu} \quad [\mu]. \qquad \square$$

Teorema 4.7 *Sea ν una medida signada y sean μ, λ medidas sobre $(X,\mathscr{S})$ tales que λ, μ, ν son σ-finitas, $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \lambda$. Entonces,*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \quad [\lambda]. \tag{7}$$

Demostración. Escribimos $\nu = \nu^+ - \nu^-$ y usamos el hecho de que

$$-\frac{d\nu^-}{d\lambda} = \frac{d(-\nu^-)}{d\lambda} \quad [\lambda],$$

y similarmente para $d\nu^-/d\mu$. Así, en virtud del Teorema 4.5, basta demostrar (7) para medidas. Supongamos, pues, que ν es una medida, y tomemos como $d\nu/d\mu$ y $d\mu/d\lambda$ las funciones no negativas f y g, respectivamente, proporcionadas por el teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5). Dado $F \in \mathscr{S}$, queremos probar que se cumple

$$\nu(F) = \int_F fg\,d\lambda.$$

Si ψ es una función simple medible, de la forma $\psi = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}$, entonces

$$\int_F \psi\,d\mu = \sum_{i=1}^n a_i\mu(E_i \cap F) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{E_i\cap F} g\,d\lambda = \int_F \psi g\,d\lambda.$$

Tomando ahora una sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones simples medibles, creciente a f, se tiene que $\psi_n g \nearrow fg$ cuando $n \to \infty$ y, por lo tanto,

$$\nu(F) = \int_F f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_F \psi_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_F \psi_n g\,d\lambda = \int_F fg\,d\lambda,$$

completando la demostración. $\square$

De nuevo, podemos extender el resultado precedente a medidas signadas.

Teorema 4.8 *Sean λ, μ, ν medidas signadas σ-finitas sobre $(X,\mathscr{S})$, tales que $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \lambda$. Entonces, se verifica* (7).

Demostración. Sean A_1, B_1 y A_2, B_2 descomposiciones de Hahn con respecto a λ y a μ, respectivamente. Consideramos por separado los cuatro conjuntos $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap B_2$, $A_2 \cap B_1$ y $B_1 \cap B_2$, que constituyen una partición de X. Sobre, por ejemplo, $A_1 \cap B_2$ tomamos $\mathscr{S}' = \{E \cap A_1 \cap B_2 : E \in \mathscr{S}\}$ y denotamos por λ', μ' las restricciones de λ, μ a $\mathscr{S}'$. Ya que λ' y $-\mu'$ son medidas, aplicando el Teorema 4.7 obtenemos, sobre $A_1 \cap B_2$,

$$\frac{d\nu}{d\lambda'} = \frac{d\nu}{d(-\mu')}\frac{d(-\mu')}{d\lambda'} \quad [|\mu|].$$

Como en la prueba del Teorema 4.5, encontramos que $-d\nu/d(-\mu')$ es la restricción de $d\nu/d\mu$ a $A_1 \cap B_2$, y $-d(-\mu')/d\lambda'$ la restricción de $d\mu/d\lambda$ a $A_1 \cap B_2$. Luego, sobre $A_1 \cap B_2$,

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \quad [|\lambda|].$$

Sumando las cuatro ecuaciones correspondientes a los conjuntos $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap B_2$, $A_2 \cap B_1$ y $B_1 \cap B_2$, se obtiene el resultado. $\square$

Ejemplo 4.9 *Sean μ, ν medidas σ-finitas sobre $(X,\mathscr{S})$, con $\nu \ll \mu$. Probar que existe una función medible g tal que si $f \in L^1(\nu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$ y*

$$\int_E f\,d\nu = \int_E fg\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Resolución. Considérese la medida signada λ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\nu \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Como

$$|\lambda|(X) = \int |f|\, d\nu < \infty,$$

resulta que la medida signada λ es finita; luego, $d\lambda/d\nu = f\ [\nu]$. Sea $g = d\nu/d\mu\ [\mu]$, una función medible no negativa. Por el Teorema 4.7, $fg = d\lambda/d\mu\ [\mu]$; así pues,

$$\int_E f\, d\nu = \lambda(E) = \int_E fg\, d\mu.$$

Además, $fg \in L^1(\mu)$ ya que, por el Ejemplo 4.6,

$$\int |fg|\, d\mu = \int \left|\frac{d\lambda}{d\nu}\right| \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \int \frac{d|\lambda|}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = |\lambda|(X) < \infty. \qquad \square$$

El siguiente resultado muestra que, aun cuando no sea posible aplicar el teorema de Radon-Nikodým a una medida, todavía puede ser aplicado a «una parte» de la medida. El Ejercicio 30 ofrece un método alternativo para probarlo.

Teorema 4.10 (Teorema de descomposición de Lebesgue) *Sean $(X, \mathscr{S}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, y ν una medida σ-finita sobre $\mathscr{S}$. Entonces $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde ν_0, ν_1 son medidas sobre $\mathscr{S}$ tales que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$. Esta es la llamada* descomposición de Lebesgue *de la medida ν con respecto a μ, y es única.*

Demostración. Es claro que la medida $\lambda = \mu + \nu$ es σ-finita, y que $\mu \ll \lambda$. Por el teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5), existe una función medible no negativa y finita f tal que

$$\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Pongamos $A = \{x : f(x) > 0\}$, $B = \{x : f(x) = 0\}$. Entonces $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, y

$$\mu(B) = \int_B f\, d\lambda = 0.$$

Definamos las medidas ν_0, ν_1 por $\nu_0(E) = \nu(E \cap B)$, $\nu_1(E) = \nu(E \cap A)$ $(E \in \mathscr{S})$, de modo que $\nu = \nu_0 + \nu_1$. Como $\nu_0(A) = 0$, resulta que $\nu_0 \perp \mu$. Además, $\nu_1 \ll \mu$, pues $\mu(E) = 0$ implica

$$\int_E f\, d\lambda = 0,$$

así que, sobre E, $f = 0$ c.t.p. $[\lambda]$. Como f es positiva sobre $E \cap A$, necesariamente $\lambda(E \cap A) = 0$. De la definición de λ se sigue que $\nu \ll \lambda$, y se concluye que $\nu_1(E) = \nu(E \cap A) = 0$.

Para establecer la unicidad de la descomposición, supongamos que $\nu = \nu_0 + \nu_1 = \nu_0' + \nu_1'$, donde $\nu_0 \perp \mu$, $\nu_0' \perp \mu$, $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_1' \ll \mu$. Entonces, existen A, B, A', B' tales que $X = A \cup B = A' \cup B'$, $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, y

$$\nu_0(B) = \mu(A) = \nu_0'(B') = \mu(A') = 0.$$

Dado $E \in \mathscr{S}$, se tiene

$$E = (E \cap B \cap B') \cup (E \cap B \cap A') \cup (E \cap A \cap A') \cup (E \cap A \cap B').$$

Claramente, μ es nula sobre los últimos tres conjuntos de esta unión; luego, por continuidad absoluta, ν_1 y ν_1' también lo son. Como $\nu_1' - \nu_1 = \nu_0 - \nu_0'$, encontramos que

$$(\nu_1' - \nu_1)(E) = (\nu_1' - \nu_1)(E \cap B \cap B') = (\nu_0 - \nu_0')(E \cap B \cap B') = 0,$$

por cuanto $\nu_0(B) = \nu_0'(B) = 0$. Consecuentemente, $\nu_1(E) = \nu_1'(E)$, probando que $\nu_0(E) = \nu_0'(E)$ y, con ello, la afirmación de unicidad del teorema. $\square$

Ejemplo 4.11 *Sea $(X, \mathscr{S})$ un espacio medible tal que los conjuntos unitarios $\{x\}$ $(x \in X)$ son medibles, y sean ν, μ medidas σ-finitas sobre $(X, \mathscr{S})$. Entonces, $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, donde $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 + \nu_3 \perp \mu$, $\nu_i \perp \nu_j$ si $i \neq j$, y $\nu_3(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$.*

Resolución. El Teorema 4.10 proporciona la descomposición de Lebesgue $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_0 \perp \mu$. Sea $D = \{x : \nu_0(\{x\}) > 0\}$ y escribamos $\nu_2(E) = \nu_0(E \cap D)$, $\nu_3(E) = \nu_0(E \cap D^c)$ $(E \in \mathscr{S})$. Entonces, $\nu_2 \perp \nu_3$ y $\nu_2 \perp \mu$, $\nu_3 \perp \mu$, de modo que $\nu_2 \perp \nu_1$ y $\nu_3 \perp \nu_1$, por cuanto $\nu_1 \ll \mu$. Resulta evidente que $\nu_3(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$. $\square$