Tema 5: Integración en espacios producto

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

0 Introducción

Para considerar integrales múltiples, necesitamos estudiar la medida y la integración en el producto cartesiano de espacios medibles. Lo haremos en un marco general.

1 Medibilidad en espacios producto

Esta sección recoge las definiciones y propiedades básicas relativas al producto de espacios medibles.

Definición 1.1 *El* producto cartesiano *$X \times Y$ de los conjuntos X e Y es la colección de pares ordenados $\{(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}$. Un* rectángulo *en $X \times Y$ es un conjunto de la forma $A \times B$, con $A \subset X$ y $B \subset Y$.*

Queremos construir un espacio medible sobre $X \times Y$ a partir de espacios medibles $(X, \mathscr{S})$ e $(Y, \mathscr{T})$. A tal fin, daremos la siguiente definición.

Definición 1.2 *Sean $(X, \mathscr{S})$ e $(Y, \mathscr{T})$ espacios medibles. Un* rectángulo medible *en $X \times Y$ es cualquier conjunto de la forma $A \times B$, con $A \in \mathscr{S}$ y $B \in \mathscr{T}$. La clase de los rectángulos medibles será denotada por $\mathscr{R}$.*

Definición 1.3 *Un* conjunto elemental *es cualquier subconjunto de $X \times Y$ que puede ser expresado como unión de un número finito de rectángulos medibles, disjuntos dos a dos. La clase de los conjuntos elementales será denotada por $\mathscr{E}$.*

Teorema 1.4 *$\mathscr{E}$ es un álgebra.*

Demostración. Nótese que $\mathscr{R} \subset \mathscr{E}$. Nótese también que la intersección de rectángulos medibles es un rectángulo medible: si $A_i \times B_i \in \mathscr{R}$ $(i = 1,2)$, con $A_1, A_2 \in \mathscr{S}$ y $B_1, B_2 \in \mathscr{T}$, entonces

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathscr{R}.$$

Para que $\mathscr{E}$ sea un álgebra, necesitamos justificar que:

(i) $X \times Y \in \mathscr{E}$. Esto es obvio, ya que $X \times Y \in \mathscr{R}$.

(ii) $\mathscr{E}$ es cerrada bajo intersecciones finitas: si $P = \bigcup_{i=1}^n U_i \in \mathscr{E}$, $Q = \bigcup_{j=1}^m V_j \in \mathscr{E}$, donde $U_i, V_j \in \mathscr{R}$, con $U_i \cap U_k = \emptyset$ $(i,k = 1,\dots,n,\ i \neq k)$ y $V_j \cap V_l = \emptyset$ $(j,l = 1,\dots,m,\ j \neq l)$, entonces

$$P \cap Q = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} U_i \cap V_j,$$

con $U_i \cap V_j \in \mathscr{R}$ y $(U_i \cap V_j) \cap (U_k \cap V_l) = \emptyset$ $(i,k = 1,\dots,n,\ j,l = 1,\dots,m,\ (i,j) \neq (k,l))$, de modo que $P \cap Q \in \mathscr{E}$.

(iii) $\mathscr{E}$ es cerrada por complementación. Dado $A \times B \in \mathscr{R}$, con $A \in \mathscr{S}$ y $B \in \mathscr{T}$, se tiene

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (A \times B^c),$$

donde $A, A^c \in \mathscr{S}$, $B^c, Y \in \mathscr{T}$, y

$$(A^c \times Y) \cap (A \times B^c) = (A^c \cap A) \times (Y \cap B^c) = \emptyset,$$

así que $(A \times B)^c \in \mathscr{E}$. Ahora, si $P = \bigcup_{i=1}^n U_i \in \mathscr{E}$, con $U_i \in \mathscr{R}$, entonces $U_i^c \in \mathscr{E}$ $(i = 1 \dots, n)$. Como $\mathscr{E}$ es cerrada por intersecciones finitas, se concluye que $P^c = \bigcap_{i=1}^n U_i^c \in \mathscr{E}$. □

Definimos ya la σ-álgebra producto sobre $X \times Y$.

Definición 1.5 *El* espacio medible producto *de los espacios medibles* $(X,\mathscr{S})$ *e* $(Y,\mathscr{T})$ *es* $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$*, donde la* σ-álgebra producto

$$\mathscr{S}\times\mathscr{T}=\sigma(\mathscr{R})$$

es la σ*-álgebra generada por la clase de los rectángulos medibles.*

Ejemplo 1.6 *Se tiene que* $\mathscr{S}\times\mathscr{T}=\sigma(\mathscr{E})$*, la* σ*-algebra generada por* $\mathscr{E}$*.*

Demostración. Todo rectángulo medible es un conjunto elemental: $\mathscr{R}\subset\mathscr{E}$. Por tanto, $\mathscr{S}\times\mathscr{T}=\sigma(\mathscr{R})\subset\sigma(\mathscr{E})$. Inversamente, $\mathscr{R}\subset\sigma(\mathscr{R})$ implica $\mathscr{E}\subset\sigma(\mathscr{R})$, así que $\sigma(\mathscr{E})\subset\sigma(\mathscr{R})=\mathscr{S}\times\mathscr{T}$. □

Se obtiene una caracterización más conveniente de $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ en términos de clases monótonas. Definimos estas clases a continuación y damos como Teorema 1.9 el denominado teorema de la clase monótona, que constituye la herramienta esencial para la teoría de la integración en espacios producto.

Definición 1.7 *Una clase* $\mathscr{M}_0$ *de subconjuntos de un conjunto* X *es una* clase monótona *en* X *si el límite de cualquier sucesión monótona (creciente o decreciente) de conjuntos* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{M}_0$ *se queda en* $\mathscr{M}_0$*.*

Teorema 1.8 *Dada una familia* $\mathscr{Y}$ *de subconjuntos de un conjunto* X*, existe la menor clase monótona* $\mathscr{M}_0(\mathscr{Y})$ *en* X *que contiene a* $\mathscr{Y}$*.*

Demostración. Sea $\mathscr{Q}$ la colección de todas las clases monótonas en X que contienen a $\mathscr{Y}$. Nótese que $\mathscr{Q}\neq\emptyset$, ya que $\mathscr{P}(X)\in\mathscr{Q}$. Como la intersección de clases monótonas es una clase monótona, se concluye que

$$\mathscr{M}_0(\mathscr{Y})=\bigcap_{\mathscr{M}_0\in\mathscr{Q}}\mathscr{M}_0.$$ □

Teorema 1.9 (Teorema de la clase monótona) *Si* $\mathscr{A}$ *es un álgebra en* X*, se tiene que* $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{M}_0(\mathscr{A})$*, es decir, la menor* σ*-álgebra que contiene a* $\mathscr{A}$ *coincide con la menor clase monótona que contiene a* $\mathscr{A}$*.*

Demostración. Por simplicidad notacional, escribiremos $\mathscr{M}_0$ en vez de $\mathscr{M}_0(\mathscr{A})$.

Puesto que toda σ-álgebra es una clase monótona, resulta que $\mathscr{M}_0\subset\sigma(\mathscr{A})$.

La inclusión opuesta seguirá tan pronto se pruebe que $\mathscr{M}_0$ es una σ-álgebra; para ello, será suficiente ver que es un álgebra. En efecto, si $\mathscr{M}_0$ es un álgebra (cerrada por uniones finitas), y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{M}_0$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ es el límite de la sucesión creciente $\{\bigcup_{i=1}^{n}E_i\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{M}_0$, que permanecerá en $\mathscr{M}_0$ al ser $\mathscr{M}_0$ una clase monótona, de modo que $\mathscr{M}_0$ también será cerrada por uniones contables.

Demostremos, pues, que $\mathscr{M}_0$ es un álgebra.

(i) Trivialmente, $X\in\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_0$.

(ii) Para comprobar que $\mathscr{M}_0$ es cerrada por complementación, consideramos la clase

$$\mathscr{M}_0'=\{A:A^c\in\mathscr{M}_0\},$$

formada por los complementarios de los elementos de $\mathscr{M}_0$; afirmamos que $\mathscr{M}_0'$ es una clase monótona. En efecto, dada una sucesión creciente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{M}_0'$, se tiene que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\in\mathscr{M}_0,$$

toda vez que $\mathscr{M}_0$ es una clase monótona y $\{A_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de elementos de $\mathscr{M}_0$; así pues, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}_0'$. Se justifica análogamente que el límite $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ de una sucesión decreciente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{M}_0'$ se queda en $\mathscr{M}_0'$.

Por otra parte, $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_0'$. En efecto: como $\mathscr{A}$ es un álgebra, contiene a los complementarios de todos sus elementos, y $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_0$.

La minimalidad de $\mathscr{M}_0$ obliga ahora a que $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}_0'$, probando que $\mathscr{M}_0$ es cerrada por complementación.

(iii) Finalmente, queremos demostrar que $\mathscr{M}_0$ es cerrada bajo uniones finitas. A tal fin, para cada $F \in \mathscr{M}_0$, sea

$$\mathscr{K}(F) = \{E \in \mathscr{M}_0 : E \cup F \in \mathscr{M}_0\}.$$

Basta probar que $\mathscr{K}(F) = \mathscr{M}_0$ para todo $F \in \mathscr{M}_0$.

Nótese que $\mathscr{K}(F)$ es una clase monótona. Para verificarlo, considérese una sucesión creciente $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{K}(F)$. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{M}_0$ y

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F) = \lim_{n\to\infty} (E_n \cup F) \in \mathscr{M}_0,$$

así que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{K}(F)$. Se demuestra de modo similar, para una sucesión decreciente $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{K}(F)$, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{K}(F)$.

Afirmamos que $\mathscr{A} \subset \mathscr{K}(G)$ cuando $G \in \mathscr{A}$. En efecto, dado $A \in \mathscr{A}$, se tiene que $A \in \mathscr{M}_0$. Si, además, $G \in \mathscr{A}$, entonces, puesto que $\mathscr{A}$ es un álgebra, necesariamente $A \cup G \in \mathscr{A} \subset \mathscr{M}_0$. Luego, $A \in \mathscr{K}(G)$, y la arbitrariedad de A establece nuestra afirmación.

Hemos probado que si $G \in \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{K}(G)$ es una clase monótona que contiene a $\mathscr{A}$, lo que obliga a que $\mathscr{K}(G) \supset \mathscr{M}_0$. Como, por construcción, $\mathscr{K}(G) \subset \mathscr{M}_0$, se concluye que $\mathscr{K}(G) = \mathscr{M}_0$.

Ahora, dados $G \in \mathscr{A} \subset \mathscr{M}_0$ y $F \in \mathscr{M}_0$, se tiene que $F \in \mathscr{K}(G)$; en particular, $G \cup F \in \mathscr{M}_0$ y, por simetría, $G \in \mathscr{K}(F)$. La arbitrariedad de $G \in \mathscr{A}$ implica que $\mathscr{A} \subset \mathscr{K}(F)$, y como $\mathscr{K}(F)$ es una clase monótona, también $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{K}(F)$. De nuevo, se tiene la inclusión opuesta por la construcción de $\mathscr{K}(F)$, y se concluye así que $\mathscr{K}(F) = \mathscr{M}_0$ para todo $F \in \mathscr{M}_0$, como se pretendía. $\square$

Corolario 1.10 $\mathscr{S} \times \mathscr{T} = \mathscr{M}_0(\mathscr{E})$.

Demostración. Es consecuencia del Ejemplo 1.6, del Teorema 1.4 y del teorema de la clase monótona (Teorema 1.9). $\square$

Definición 1.11 *Si $E \subset X \times Y$, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$ se define la* x-sección *de E como el conjunto*

$$E_x = \{y : (x,y) \in E\} \subset Y,$$

y la y-sección *de E como el conjunto*

$$E^y = \{x : (x,y) \in E\} \subset X.$$

Ejemplo 1.12 *Probar que si la sucesión de conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona, entonces* $\lim_{i\to\infty} A_i^y = (\lim_{i\to\infty} A_i)^y$ $(y \in Y)$ *y* $\lim_{i\to\infty} (A_i)_x = (\lim_{i\to\infty} A_i)_x$ $(x \in X)$.

Resolución. El primer enunciado se sigue del hecho de que, para cada $y \in Y$, $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^y = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^y$, mientras que $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^y = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^y$. El argumento para x-secciones es similar. $\square$

Nuestro próximo teorema establece que los conjuntos medibles tienen secciones medibles. Se demuestra que el recíproco es falso, es decir, que un conjunto puede no ser medible aunque sus x-secciones e y-secciones lo sean para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$.

Teorema 1.13 *Si $E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$, entonces $E_x \in \mathscr{T}$ para cada $x \in X$ y $E^y \in \mathscr{S}$ para cada $y \in Y$.*

Demostración. Sea

$$\Omega = \{E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T} : E_x \in \mathscr{T}\ (x \in X)\}.$$

Si $A \in \mathscr{S}$ y $B \in \mathscr{T}$, entonces $(A \times B)_x = B$ ó $\emptyset$ según que $x \in A$ ó $x \in A^c$; luego, Ω contiene a los rectángulos medibles. Dado $E \in \Omega$, la igualdad

$$(E^c)_x = \{y : (x,y) \in E^c\} = \{y : (x,y) \in E\}^c = (E_x)^c$$

prueba que $E^c \in \Omega$. Además, si $E_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ entonces, para cada $x \in X$,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x.$$

Así pues, Ω es una σ-álgebra en $X \times Y$ que contiene a $\mathscr{R}$, forzando a que $\Omega = \mathscr{S} \times \mathscr{T}$. Se demuestra similarmente que $E^y \in \mathscr{S}$ cualquiera que sea $y \in Y$. □

Para funciones definidas sobre $X \times Y$ se tienen enunciados paralelos.

Definición 1.14 *Sea f una función definida sobre $X \times Y$. Entonces, dado $x \in X$, la* x-sección *de f es la función f_x, definida sobre Y por $f_x(y) = f(x,y)$ $(y \in Y)$. Análogamente, dado $y \in Y$, la* y-sección *de f es la función f^y, definida sobre X por $f^y(x) = f(x,y)$ $(x \in X)$.*

Teorema 1.15 *Sea f una función $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible sobre $X \times Y$; entonces, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, la x-sección f_x de f es $\mathscr{T}$-medible, mientras que la y-sección f^y de f es $\mathscr{S}$-medible.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, y sea

$$E = \{(x,y) : f(x,y) > \alpha\}.$$

Por el Teorema 1.13, fijado $x \in X$, la x-sección de E,

$$E_x = \{y : f_x(y) > \alpha\},$$

está en $\mathscr{T}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, así que f_x es $\mathscr{T}$-medible. El correspondiente resultado para f^y se prueba de forma análoga. □

2 Medidas producto y el teorema de Fubini

Abordamos en la presente sección los tres resultados principales sobre integración con respecto a una medida producto. Estos resultados (Teoremas 2.5, 2.7 y 2.8) son debidos a Leonida Tonelli (1855-1946), Ernest Hobson (1856-1933) y Guido Fubini (1879-1943), aunque en conjunto se conocen, habitualmente, por el nombre del tercero.

Para definir una medida sobre $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ nos apoyaremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sean $(X,\mathscr{S},\mu)$ e $(Y,\mathscr{T},\nu)$ espacios de medida σ-finita. Dado $V \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$, escribimos $\varphi(x) = \nu(V_x)$, $\psi(y) = \mu(V^y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$. Entonces φ es $\mathscr{S}$-medible, ψ es $\mathscr{T}$-medible, y*

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu. \tag{1}$$

Demostración. En primer lugar, supondremos que el resultado se verifica cuando μ y ν son medidas finitas, y procederemos a deducir el caso general. A tal fin, descomponemos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ e $Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$, respectivamente, en uniones de conjuntos de μ-medida y ν-medida finitas disjuntos dos a dos, y consideramos la restricción de μ y ν a los subconjuntos medibles de X_n e Y_m, de modo que el resultado vale para cada rectángulo $X_n \times Y_m$. Sea $V \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$, y pongamos $V_{n,m} = V \cap (X_n \times Y_m)$ $(n,m \in \mathbb{N})$; entonces, para todo $x \in X$, $V_x = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} (V_{n,m})_x$. Por hipótesis, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\nu\left((V_{n,m})_x\right)$ es una función de x medible sobre

X_n, así que $\sum_{m=1}^{\infty} \nu\left((V_{n,m})_x\right)$ es medible sobre X_n; luego, por el Ejemplo 3.11 del Tema 1,

$$\varphi(x) = \nu(V_x) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \nu\left((V_{n,m})_x\right) \quad (x \in X)$$

es $\mathscr{S}$-medible. Similarmente, $\psi(y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \mu\left(V_{n,m}^y\right)$ $(y \in Y)$ es $\mathscr{T}$-medible. El Teorema 2.7 del Tema 2 (Beppo Levi) permite escribir:

$$\begin{aligned} \int_X \varphi \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} \varphi \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} \sum_{m=1}^{\infty} \nu\left((V_{n,m})_x\right) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{X_n} \nu\left((V_{n,m})_x\right) d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Y_m} \mu\left(V_{n,m}^y\right) d\nu. \end{aligned}$$

La última igualdad se verifica por hipótesis, y este último término se corresponde con $\displaystyle\int_Y \psi \, d\nu$.

Necesitamos demostrar ahora la validez del resultado cuando μ y ν son medidas finitas sobre $\mathscr{S}$ y $\mathscr{T}$, respectivamente. Con este propósito, denotemos por Ω la clase de todos los conjuntos $V \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ para los que se verifica la tesis del teorema. Nótese que Ω contiene a todos los rectángulos medibles $A \times B$, puesto que

$$\nu\left((A \times B)_x\right) = \chi_A(x)\nu(B), \quad \mu\left((A \times B)^y\right) = \chi_B(y)\mu(A),$$

de manera que se cumple (1):

$$\int_X \nu\left((A \times B)_x\right) d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \mu\left((A \times B)^y\right) d\nu.$$

No es difícil probar que (1) también se verifica para cualquier conjunto elemental: si $R \in \mathscr{E}$ es de la forma $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$, con $R_i \in \mathscr{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, disjuntos dos a dos, entonces

$$\begin{aligned} \nu(R_x) &= \nu\left(\left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^n (R_i)_x\right) = \sum_{i=1}^n \nu\left((R_i)_x\right) \quad (x \in X), \\ \mu(R^y) &= \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right)^y\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n R_i^y\right) = \sum_{i=1}^n \mu(R_i^y) \quad (y \in Y), \end{aligned}$$

así que

$$\int_X \nu(R_x) \, d\mu = \sum_{i=1}^n \int_X \nu\left((R_i)_x\right) d\mu = \sum_{i=1}^n \int_Y \mu(R_i^y) \, d\nu = \int_Y \mu(R^y) \, d\nu.$$

Consecuentemente, Ω contiene al álgebra $\mathscr{E}$. Si $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, con $V_i \in \Omega$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y si $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, entonces $V \in \Omega$. En efecto, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, pongamos $\varphi_i(x) = \nu\left((V_i)_x\right)$, $\psi_i(y) = \mu\left(V_i^y\right)$ $(i \in \mathbb{N})$. Por la definición de Ω, estas funciones son medibles; además, en virtud del Ejemplo 1.12, $\varphi_i(x) \nearrow \varphi(x) = \nu(V_x)$, y $\psi_i(y) \nearrow \psi(y) = \mu(V^y)$, cuando $i \to \infty$. Luego, φ y ψ son medibles, con

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_X \varphi_i \, d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_Y \psi_i \, d\nu = \int_Y \psi \, d\nu.$$

Si $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$, donde $V_i \in \Omega$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y si $V = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$, obtenemos, similarmente, sucesiones $\varphi_i \searrow \varphi$, $\psi_i \searrow \psi$ $(i \to \infty)$, tales que $\varphi_i \leq \nu(Y)$ y $\psi_i \leq \mu(X)$ $(i \in \mathbb{N})$. Las funciones mayorantes son integrables sobre X e Y, respectivamente, porque μ y ν son finitas. Podemos aplicar entonces el Teorema 2.13 del Tema 2 (convergencia dominada) para concluir que los límites, φ y ψ, verifican (1). Hemos probado así que Ω es una clase monótona contenida en $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ y que contiene a $\mathscr{E}$; el resultado se deduce del Teorema 1.9 y del Ejemplo 1.6. □

La siguiente versión de (1) es más intuitiva.

Corolario 2.2 *En la notación y bajo las hipótesis de σ-finitud del Teorema 2.1, se cumple:*

$$\int_X d\mu(x) \int_Y \chi_V(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y d\nu(y) \int_X \chi_V(x,y)\, d\mu(x).$$

Demostración. Se tiene que

$$\varphi(x) = \nu(V_x) = \int_Y (\chi_{V_x})(y)\, d\nu(y) = \int_Y (\chi_V)_x(y)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_V(x,y)\, d\nu(y),$$

y similarmente para ψ. □

Definición 2.3 *Sean $(X,\mathscr{S},\mu)$ y $(Y,\mathscr{T},\nu)$ espacios de medida σ-finita. La* medida producto *$\mu\times\nu$ de $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ viene dada por*

$$(\mu\times\nu)(V) = \int_X \nu(V_x)\, d\mu = \int_Y \mu(V^y)\, d\nu \quad (V\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}),$$

donde la última igualdad se verifica en virtud del Teorema 2.1.

La expresión alternativa que proporciona el Corolario 2.2 para las integrales anteriores pone de manifiesto que $\mu\times\nu$ es una medida sobre $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$. Claramente, $\mu\times\nu$ es σ-finita.

Ejemplo 2.4 *Probar que si μ y ν son medidas σ-finitas, entonces la medida producto $\mu\times\nu$, dada por la Definición 2.3, es la única medida sobre $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ que asigna a cada rectángulo medible $A\times B$ la medida $\mu(A)\nu(B)$.*

Resolución. Una tal medida debe tomar el valor $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\,\nu(B_i)$ sobre el conjunto elemental cuya descomposición en rectángulos medibles es $\bigcup_{i=1}^n (A_i\times B_i)$. Nótese que $\mu\times\nu$ toma el valor correcto sobre los rectángulos medibles y, por el Teorema 2.1, es una medida sobre $\mathscr{E}$, luego toma el valor correcto sobre los elementos de $\mathscr{E}$ y es, claramente, una medida σ-finita sobre el álgebra $\mathscr{E}$. Se demuestra que la extensión de $\mathscr{E}$ a $\sigma(\mathscr{E})$ es única. □

Los principales resultados sobre integración en espacios producto vienen dados por los tres teoremas que siguen, los cuales proporcionan métodos para calcular integrales respecto de medidas producto. Como en el Teorema 2.1, del que derivan, para su validez necesitamos la σ-finitud de los espacios de medida factores, $(X,\mathscr{S},\mu)$ e $(Y,\mathscr{T},\nu)$.

Teorema 2.5 (Tonelli-Hobson) *Sea $f\geq 0$ una función $(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-medible, y sean*

$$\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y\, d\mu \qquad (x\in X,\ y\in Y).$$

Entonces, φ es $\mathscr{S}$-medible, ψ es $\mathscr{T}$-medible, y

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \int_Y \psi\, d\nu. \tag{2}$$

Demostración. El Teorema 2.1 proporciona el resultado cuando f es la función característica de un conjunto $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$-medible, y, por lo tanto, también cuando f es simple medible. En el caso general, sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones simples medibles tal que $f_n\nearrow f$ cuando $n\to\infty$. Por el Teorema 2.1, $\varphi_n(x) = \displaystyle\int (f_n)_x\, d\nu$ es $\mathscr{S}$-medible, y

$$\int_X \varphi_n\, d\mu = \int_{X\times Y} f_n\, d(\mu\times\nu). \tag{3}$$

Cuando $n\to\infty$, $(f_n)_x\nearrow f_x$, así que, en virtud del Teorema 2.5 del Tema 2 (convergencia monótona), $\varphi_n\nearrow\varphi$, probando que φ es medible. Una nueva aplicación del Teorema 2.5, esta vez a (3), proporciona la primera igualdad de (2). La segunda se deduce análogamente.

Corolario 2.6 *En las hipótesis del Teorema 2.5, se tiene:*

$$\int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y d\nu(y) \int_X f(x,y)\, d\mu(x). \tag{4}$$

Demostración. Escríbanse el primer y último términos de (2) como integrales iteradas de f. □

Teorema 2.7 (Tonelli-Hobson) *Dada una función $(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$-medible f, definimos*

$$\varphi^*(x)=\int_Y |f|_x\,d\nu,\quad \psi^*(y)=\int_X |f|^y\,d\mu \qquad (x\in X,\ y\in Y).$$

Las condiciones $\varphi^*\in L^1(\mu)$, $\psi^*\in L^1(\nu)$, $f\in L^1(\mu\times\nu)$, son equivalentes.

Demostración. Aplicamos el Teorema 2.5 a $|f|$, y (2) proporciona el resultado. □

Teorema 2.8 (Fubini) *Si $f\in L^1(\mu\times\nu)$, entonces $f_x\in L^1(\nu)$ para casi todo $x\in X$, $f^y\in L^1(\mu)$ para casi todo $y\in Y$, las funciones φ y ψ definidas en el Teorema 2.5 están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$, respectivamente, y se verifica (2).*

Demostración. Obtenemos φ_1, φ_2 a partir de las funciones medibles no negativas f^+, f^- de la misma forma que se obtuvo φ a partir de f en el Teorema 2.5. Puesto que $f^+,f^-\in L^1(\mu\times\nu)$, (2) garantiza que $\varphi_1,\varphi_2\in L^1(\mu)$. Luego, para casi todo $x\in X$, tanto $\varphi_1(x)$ como $\varphi_2(x)$ son finitas, y para tales x, $f_x=f_x^+-f_x^-$ implica $f_x\in L^1(\nu)$ y $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$; así, φ es integrable. Por otra parte, la primera igualdad de (2) se verifica para φ_1 y f^+, y para φ_2 y f^-, de modo que al restar obtenemos el resultado para φ y f. La segunda igualdad y las afirmaciones relativas a f^y y ψ se establecen análogamente. □

Corolario 2.9 *Los Teoremas 2.7 y 2.8 implican que si alguna de las integrales iteradas de $|f|$ es finita, entonces la otra también lo es, y f satisface (4).*

La versión del Teorema 2.8 que recoge el Corolario 2.9 es la que resulta más útil en la práctica. Daremos a continuación algunos ejemplos ilustrativos de que, en general, las hipótesis de los Teoremas 2.1 a 2.8 no pueden ser debilitadas.

El primer ejemplo muestra que el Teorema 2.1 deja de verificarse si μ y ν no son ambas σ-finitas, y que la σ-finitud también es esencial en los Teoremas 2.5, 2.7 y 2.8.

Ejemplo 2.10 *Sean $X=Y=[0,1]$, $\mathscr{S}=\mathscr{T}=\mathscr{B}$. Tomemos $\mu=m$ sobre los borelianos de $[0,1]$, y sea ν la medida cardinal en $[0,1]$. Sea también $V=\{(x,y)\in X\times Y : x=y\}$. Entonces, V es $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$-medible: dado cualquier entero positivo n, ponemos $I_j=[(j-1)/n,j/n]$ $(j=1,\ldots,n)$ y $V_n=(I_1\times I_1)\cup\ldots\cup(I_n\times I_n)$; puesto que V_n es medible, $V=\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ también lo es. Sin embargo,*

$$\int_Y d\nu\int_X \chi_V\,d\mu=0\neq 1=\int_X d\mu\int_Y \chi_V\,d\nu.$$ □

Ejemplo 2.11 *La condición $f\in L^1(\mu\times\nu)$ del Teorema 2.8 es necesaria para que el orden de integración sea intercambiable.*

Resolución. Tomamos $X,Y,\mathscr{S},\mathscr{T}$ como en el último ejemplo y $\mu=\nu=m$, restringida a $[0,1]$. Sean $0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n<\ldots<1$, con $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, elegimos una función continua g_n tal que $\{t:g_n(t)\neq 0\}\subset(\alpha_n,\alpha_{n+1})$ e $\int_0^1 g_n\,dt=1$, y definimos

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^\infty g_n(y)\left[g_n(x)-g_{n+1}(x)\right].$$

Fijado (x,y), sólo un término de esta serie puede ser no nulo, así que f está bien definida. Además, f es medible, porque es continua excepto en $(1,1)$. Por una parte,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dx&=\int_0^1\sum_{n=1}^\infty g_n(y)\left[g_n(x)-g_{n+1}(x)\right]\,dx\\&=g_n(y)\left[\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} g_n\,dx-\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_{n+2}} g_{n+1}\,dx\right]=0\quad (y\in Y)\end{aligned}$$

implica

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx=0.$$

Por otra,

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(x) - g_{n+1}(x)] \int_0^1 g_n\,dy = g_1(x) \quad (x \in X)$$

implica

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1.$$

Así pues, las integrales iteradas son distintas. Sin embargo, no se contradice el teorema de Fubini, porque f no es integrable: escribiendo $I_i = (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ $(i \in \mathbb{N})$, encontramos que

$$\begin{aligned}
\int |f(x,y)|\,dx\,dy &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{I_i \times I_j} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)\,[g_n(x) - g_{n+1}(x)] \Big|\,dx\,dy \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{I_i \times I_j} \big| g_j(y) \left[g_j(x) - g_{j+1}(x) \right] \big|\,dx\,dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{I_j \times I_j} + \int_{I_{j+1} \times I_j} \right\} \big| g_j(y) \left[g_j(x) - g_{j+1}(x) \right] \big|\,dx\,dy = \infty.
\end{aligned}$$

□

En algunos espacios producto, como, por ejemplo, el plano, la medida «natural» a considerar no es $\mu \times \nu$ sino su compleción. En tal caso, es posible obtener resultados equivalentes al Teorema 2.8 bajo hipótesis más débiles. Por ejemplo, las funciones φ y ψ del Teorema 2.1 en adelante no tienen que ser medibles, sino que basta con que sean iguales c.t.p. a funciones medibles[1].

[1] Para más detalles sobre un enfoque basado en medidas completas, véase el capítulo 12 de H.L. Royden: *Real analysis*, Macmillan, 1968.