Tema 4: Medidas signadas y complejas
Problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Medidas signadas y la descomposición de Hahn

1. Sea $\nu(E) = \int_E xe^{-x^2} dx$. ¿Cuáles son los conjuntos positivos, negativos y nulos con respecto a ν? Encontrar una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ respecto de ν.

2. Demostrar que si en el Teorema 1.10 se supone $\nu(E) < \infty$, se obtiene $0 < \nu(A) < \infty$.

3. Dar un ejemplo que muestre que la descomposición de Hahn no es única.

4. Dada cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y cualquier conjunto $E \subset \mathbb{N}$, sea $\nu(E)$ la suma, si existe, de los términos correspondientes de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Qué sucesiones se asocian con medidas signadas sobre $\mathbb{N}$? Probar que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una de estas sucesiones y $|a_n| > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, la descomposición de Hahn de $\mathbb{N}$ con respecto a ν es única.

5. Sea ν una medida signada y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, tales que $|\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)| < \infty$. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ es absolutamente convergente.

6. Probar que si ν es una medida signada y F, E conjuntos medibles tales que $F \subset E$, entonces $|\nu(E)| < \infty$ implica $|\nu(F)| < \infty$.

7. Demostrar que si ν es una medida signada y $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ son medibles, entonces $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_i)$.

8. Probar que si ν es una medida signada y $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ son medibles, con $|\nu(E_1)| < \infty$, entonces
$$\nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_i).$$

2 La descomposición de Jordan

9. Demostrar que si ν_1, ν_2 y μ son medidas y $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \perp \mu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

10. Sean $(X, \mathscr{S})$ un espacio medible y $E \in \mathscr{S}$. Si $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$, donde $\int f\,d\mu$ existe, ¿quién es $|\nu|(E)$?

11. Probar que si la medida signada ν sólo toma valores finitos, entonces
$$\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu), \quad \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu).$$

12. Sea ν una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathscr{S})$. Verificar que
$$\nu^+(E) = \max\{\nu(U) : U \in \mathscr{S},\, U \subset E\}, \quad \nu^-(E) = -\min\{\nu(U) : U \in \mathscr{S},\, U \subset E\} \qquad (E \in \mathscr{S}).$$
En particular, ν^+ y ν^- son independientes de la descomposición de Hahn que se use para definirlas.

13. Demostrar que $|\nu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)|$, donde el supremo se toma sobre todas las familias finitas $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, tales que $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Este resultado justifica la denominación «variación total» en la Definición 2.6.

14. Probar que la descomposición de Jordan es minimal en el sentido siguiente: si ν es una medida signada y $\nu = \nu_1 - \nu_2$, donde ν_1 y ν_2 son medidas, entonces $|\nu| \leq \nu_1 + \nu_2$, con igualdad si, y sólo si, $\nu_1 = \nu^+$ y $\nu_2 = \nu^-$.

3 El teorema de Radon-Nikodým

15. Sean μ, ν medidas sobre la misma σ-álgebra tales que $\mu \ll \nu$. Demostrar que si una proposición P se verifica c.t.p. $[\nu]$, entonces P también se verifica c.t.p. $[\mu]$. Además, si la medida μ es completa, también lo es ν.

16. Dar un ejemplo que muestre que en la Definición 3.2, las condiciones $|\mu|(E) = 0$ y $\mu(E) = 0$ no son equivalentes.

17. Encontrar dos medidas μ y ν, sobre el mismo espacio medible, para las que no se verifiquen ninguna de las relaciones $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$, $\mu \perp \nu$.

18. Sea $x_0 \in (0,1)$, y para cada conjunto medible Lebesgue $E \subset [0,1]$, defínase $\nu(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que ν es una medida que no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

19. Demostrar que si μ y ν son medidas sobre la misma σ-álgebra $\mathscr{S}$ tales que $\nu \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$, entonces ν es idénticamente nula.

20. Probar que si $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ para cada $E \in \mathscr{S}$, donde f es no negativa y medible, y $f = \infty$ en un conjunto de μ-medida positiva, entonces ν no es σ-finita.

21. Demostrar que la condición de que ν sea σ-finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.

22. Probar que la condición de que μ sea σ-finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.

4 Algunas aplicaciones del teorema de Radon-Nikodým

23. En el caso particular de que μ sea σ-finita, aplicar el Teorema 3.5 para demostrar el Teorema 4.1.

24. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números positivos tales que $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n > 0$, y sean μ, ν las medidas definidas sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ por $\mu(\{n\}) = a_n$, $\nu(\{n\}) = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Probar que $\nu \ll \mu$, pero que no se verifica la tesis del Teorema 4.1.

25. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(\mu)$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta$ implica

$$\int_E |f_n|\,d\mu < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

26. Probar que si μ y ν son medidas signadas σ-finitas y $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$, se cumple que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1} \quad [|\mu|].$$

27. Sean $\mathscr{M}$ y m, respectivamente, la σ-álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\nu(E) = \int_E f\,dx \quad (E \in \mathscr{M}),$$

donde $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Verificar que

$$\frac{dm}{d\nu} = 1 + x^2 \quad [\nu].$$

28. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 1 \\ 0, & x > 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

sean ν, μ las medidas definidas sobre $\mathscr{M}$ por

$$\nu(E) = \int_E f\,dx, \quad \mu(E) = \int_E g\,dx \qquad (E \in \mathscr{M}).$$

Encontrar la descomposición de Lebesgue de ν con respecto a μ.

29. Demostrar que el conjunto D que comparece en el Ejemplo 4.11 es contable.

30. Probar el teorema de descomposición de Lebesgue (Teorema 4.10) directamente, sin recurrir al teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5), usando, como en el teorema de descomposición de Hahn (Teorema 1.11), una sucesión de conjuntos que maximice ν para obtener el conjunto B que interviene en la demostración.