

Tema 4: Medidas signadas

Problemas propuestos

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

Índice

1	Medidas signadas y la descomposición de Hahn	1
2	La descomposición de Jordan	1
3	El teorema de Radon-Nikodým	2
4	Algunas aplicaciones del teorema de Radon-Nikodým	2



1 Medidas signadas y la descomposición de Hahn

1. Sea $\nu(E) = \int_E x e^{-x^2} dx$. ¿Cuáles son los conjuntos positivos, negativos y nulos con respecto a ν ? Encontrar una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ respecto de ν .
2. Demostrar que si en el Teorema 1.10 se supone $\nu(E) < \infty$, se obtiene $0 < \nu(A) < \infty$.
3. Dar un ejemplo que muestre que la descomposición de Hahn no es única.
4. Dada cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y cualquier conjunto $E \subset \mathbb{N}$, sea $\nu(E)$ la suma, si existe, de los términos correspondientes de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Qué sucesiones se asocian con medidas signadas sobre $\mathbb{N}$? Probar que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una de estas sucesiones y $|a_n| > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, la descomposición de Hahn de $\mathbb{N}$ con respecto a ν es única.
5. Sea ν una medida signada y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, tales que $|\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)| < \infty$. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ es absolutamente convergente.
6. Probar que si ν es una medida signada y F, E conjuntos medibles tales que $F \subset E$, entonces $|\nu(E)| < \infty$ implica $|\nu(F)| < \infty$.
7. Demostrar que si ν es una medida signada y $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ son medibles, entonces $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu(E_i)$.
8. Probar que si ν es una medida signada y $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ son medibles, con $|\nu(E_1)| < \infty$, entonces

$$\nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu(E_i).$$

2 La descomposición de Jordan

9. Demostrar que si ν_1, ν_2 y μ son medidas y $\nu_1 \perp \mu, \nu_2 \perp \mu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.
10. Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $E \in \mathcal{S}$. Si $\nu(E) = \int_E f d\mu$, donde $\int f d\mu$ existe, ¿quién es $|\nu|(E)$?
11. Probar que si la medida signada ν sólo toma valores finitos, entonces

$$\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu), \quad \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu).$$

12. Sea ν una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$. Verificar que

$$\nu^+(E) = \max\{\nu(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\}, \quad \nu^-(E) = -\min\{\nu(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\} \quad (E \in \mathcal{S}).$$

En particular, ν^+ y ν^- son independientes de la descomposición de Hahn que se use para definirlos.

13. Demostrar que $|\nu|(E) = \sup \sum_{i=1}^n |\nu(E_i)|$, donde el supremo se toma sobre todas las familias finitas $\{E_i\}_{i=1}^n$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, tales que $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Este resultado justifica la denominación «variación total» en la Definición 2.6.
14. Probar que la descomposición de Jordan es minimal en el sentido siguiente: si ν es una medida signada y $\nu = \nu_1 - \nu_2$, donde ν_1 y ν_2 son medidas, entonces $|\nu| \leq \nu_1 + \nu_2$, con igualdad si, y sólo si, $\nu_1 = \nu^+$ y $\nu_2 = \nu^-$.

3 El teorema de Radon-Nikodým

15. Sean μ, ν medidas sobre la misma σ -álgebra tales que $\mu \ll \nu$. Demostrar que si una propiedad P se verifica c.t.p. $[\nu]$, entonces P también se verifica c.t.p. $[\mu]$. Además, si la medida μ es completa, también lo es ν .
16. Dar un ejemplo que muestre que en la Definición 3.2, las condiciones $|\mu|(E) = 0$ y $\mu(E) = 0$ no son equivalentes.
17. Encontrar dos medidas μ y ν , sobre el mismo espacio medible, para las que no se verifiquen ninguna de las relaciones $\mu \ll \nu, \nu \ll \mu, \mu \perp \nu$.
18. Sea $x_0 \in [0, 1]$, y para cada conjunto medible Lebesgue $E \subset [0, 1]$, defínase $\nu(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que ν es una medida que no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.
19. Demostrar que si μ y ν son medidas sobre la misma σ -álgebra $\mathcal{S}$ tales que $\nu \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$, entonces ν es idénticamente nula.
20. Probar que si $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cada $E \in \mathcal{S}$, donde f es no negativa y medible, y $f = \infty$ en un conjunto de μ -medida positiva, entonces ν no es σ -finita.
21. Demostrar que la condición de que ν sea σ -finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.
22. Probar que la condición de que μ sea σ -finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.

4 Algunas aplicaciones del teorema de Radon-Nikodým

23. En el caso particular de que μ sea σ -finita, aplicar el Teorema 3.5 para demostrar el Teorema 4.1.
24. Sean $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones de números positivos tales que $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0, \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n > 0$, y sean μ, ν las medidas definidas sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ por $\mu(\{n\}) = a_n, \nu(\{n\}) = b_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Probar que $\nu \ll \mu$, pero que no se verifica la tesis del Teorema 4.1.
25. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^1(\mu)$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta$ implica

$$\int_E |f_n| d\mu < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

26. Probar que si μ y ν son medidas signadas σ -finitas y $\mu \ll \nu, \nu \ll \mu$, se cumple que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^{-1} \quad [|\mu|].$$

27. Sean $\mathcal{M}$ y m , respectivamente, la σ -álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\nu(E) = \int_E f dx \quad (E \in \mathcal{M}),$$

donde $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Verificar que

$$\frac{dm}{d\nu} = 1 + x^2 \quad [\nu].$$

28. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

sean ν, μ las medidas definidas sobre $\mathcal{M}$ por

$$\nu(E) = \int_E f \, dx, \quad \mu(E) = \int_E g \, dx \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Encontrar la descomposición de Lebesgue de ν con respecto a μ .

29. Demostrar que el conjunto D que comparece en el Ejemplo 4.11 es contable.
30. Probar el teorema de descomposición de Lebesgue (Teorema 4.10) directamente, sin recurrir al teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5), usando, como en el teorema de descomposición de Hahn (Teorema 1.11), una sucesión de conjuntos que maximice ν para obtener el conjunto B que interviene en la demostración.