Tema 5: Integración en espacios producto
Problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Medibilidad en espacios producto **1**

2 Medidas producto y el teorema de Fubini **1**

1 Medibilidad en espacios producto

1. La representación de un rectángulo en la forma $A \times B$ no tiene por qué ser única. Determinar cuándo lo es.

2. Sea A un subconjunto no medible de X. ¿Es $A \times \emptyset$ un rectángulo medible?

3. Demostrar que un rectángulo $A \times B$ es no medible si, y sólo si, o bien A es no medible y $B \neq \emptyset$, o bien B es no medible y $A \neq \emptyset$.

4. Probar que si $V \subset X \times Y$, entonces $(\chi_V)_x = \chi_{V_x}$ y $(\chi_V)^y = \chi_{V^y}$.

5. Demostrar que si f es $\mathscr{S}$-medible y g es $\mathscr{T}$-medible, entonces fg definida por $(fg)(x,y) = f(x)g(y)$ $((x,y) \in X \times Y)$ es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible.

2 Medidas producto y el teorema de Fubini

6. Sean μ, ν medidas completas. Probar que $\mu \times \nu$ puede no ser completa.

7. Sea f una función medible definida en $\mathbb{R}$, con $0 < f < \infty$. Sean también $O_f = \{(x,y) : 0 \leq y < f(x)\}$ el conjunto de ordenadas de f, y $G = \{(x,y) : y = f(x)\}$ el grafo de f. Finalmente, sean $\mathscr{M}$ y m la σ-álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Demostrar los siguientes asertos:

   a) O_f es $(\mathscr{M} \times \mathscr{M})$-medible.

   b) $(m \times m)\left(O_f\right) = \int f\, dx$.

   c) G es $(\mathscr{M} \times \mathscr{M})$-medible.

   d) $(m \times m)(G) = 0$.

8. Sea f una función continua en $R = [a,b] \times [c,d]$, y sean $\mathscr{S} = \mathscr{T} = \mathscr{M}$. Probar que
$$\int_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

9. Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$, entonces $fg \in L^1(\mu \times \nu)$.

10. Dada $f \in L^1(0,a)$, se define
$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t}\, dt \quad (0 < x \leq a).$$
Probar que $g \in L^1(0,a)$, con
$$\int_0^a g\, dx = \int_0^a f\, dt.$$

11. Integrando $e^{-y} \operatorname{sen} 2xy$ respecto de x e y, demostrar que
$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \operatorname{sen}^2 y}{y}\, dy = \frac{1}{4} \ln 5.$$

12. Integrando $e^{-xy} \operatorname{sen} 2y$ respecto de x e y, probar que
$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \operatorname{sen} 2y}{y}\, dy = \operatorname{arctg} 2.$$

13. Dados $f \in L^1(0,\infty)$, $\alpha > 0$, pongamos

$$g_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \quad (x>0).$$

Demostrar que

$$\alpha \int_0^y g_\alpha(x)\, dx = g_{\alpha+1}(y) \quad (y>0).$$

14. Sean $a>0$, $f \in L^1(0,a)$, $f \geq 0$, y

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad (x>0).$$

Probar la igualdad

$$\int_0^a f(x) \ln \frac{1}{x}\, dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x}\, dx + F(a) \ln \frac{1}{a}.$$

15. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas de f sobre el cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ son iguales, aunque f no es integrable.

16. Probar que si

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)),$$

entonces

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx.$$

¿Contradice este resultado el Teorema 2.8 (Fubini)?

17. Se define f sobre $[0,1]\times[0,1]$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n}, & 2^{-n} \leq x < 2^{-n+1},\ 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1} \\ -2^{2n+1}, & 2^{-n-1} \leq x < 2^{-n},\ 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy.$$

¿Es f integrable en su dominio?

18. Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x,y) = \begin{cases} 2-2^{-x}, & x = y \\ -2+2^{-x}, & x = y+1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probar que las integrales iteradas de f son distintas. ¿Es f integrable en su dominio?