

Tema 5: Integración en espacios producto

Problemas propuestos

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

Índice

1	Medibilidad en espacios producto	1
2	Medidas producto y el teorema de Fubini	1



1 Medibilidad en espacios producto

1. La representación de un rectángulo en la forma $A \times B$ no tiene por qué ser única. Determinar cuándo lo es.
2. Sea A un subconjunto no medible de X . ¿Es $A \times \emptyset$ un rectángulo medible?
3. Demostrar que un rectángulo $A \times B$ es no medible si, y sólo si, o bien A es no medible y $B \neq \emptyset$, o bien B es no medible y $A \neq \emptyset$.
4. Probar que si $V \subset X \times Y$, entonces $(\chi_V)_x = \chi_{V_x}$ y $(\chi_V)^y = \chi_{V^y}$.
5. Demostrar que si f es $\mathcal{S}$ -medible y g es $\mathcal{T}$ -medible, entonces fg definida por $(fg)(x,y) = f(x)g(y)$ ($(x,y) \in X \times Y$) es $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible.

2 Medidas producto y el teorema de Fubini

6. Sean μ, ν medidas completas. Probar que $\mu \times \nu$ puede no ser completa.
7. Sea f una función medible definida en $\mathbb{R}$, con $0 < f < \infty$. Sean también $O_f = \{(x,y) : 0 \leq y < f(x)\}$ el conjunto de ordenadas de f , y $G = \{(x,y) : y = f(x)\}$ el grafo de f . Finalmente, sean $\mathcal{M}$ y m la σ -álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Demostrar los siguientes asertos:

a) O_f es $(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ -medible.

b) $(m \times m)(O_f) = \int f \, dx$.

c) G es $(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ -medible.

d) $(m \times m)(G) = 0$.

8. Sea f una función continua en $R = [a,b] \times [c,d]$, y sean $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathcal{M}$. Probar que

$$\int_R f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) \, dx.$$

9. Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$, entonces $fg \in L^1(\mu \times \nu)$.

10. Dada $f \in L^1(0,a)$, se define

$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, dt \quad (0 < x \leq a).$$

Probar que $g \in L^1(0,a)$, con

$$\int_0^a g \, dx = \int_0^a f \, dt.$$

11. Integrando $e^{-y} \sin 2xy$ respecto de x e y , demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin^2 y}{y} \, dy = \frac{1}{4} \ln 5.$$

12. Integrando $e^{-xy} \sin 2y$ respecto de x e y , probar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin 2y}{y} \, dy = \arctg 2.$$

13. Dados $f \in L^1(0, \infty)$, $\alpha > 0$, pongamos

$$g_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (x > 0).$$

Demostrar que

$$\alpha \int_0^y g_\alpha(x) dx = g_{\alpha+1}(y) \quad (y > 0).$$

14. Sean $a > 0$, $f \in L^1(0, a)$, $f \geq 0$, y

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x > 0).$$

Probar la igualdad

$$\int_0^a f(x) \ln \frac{1}{x} dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x} dx + F(a) \ln \frac{1}{a}.$$

15. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas de f sobre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ son iguales, aunque f no es integrable.

16. Probar que si

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)),$$

entonces

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$$

¿Contradice este resultado el Teorema 2.8 (Fubini)?

17. Se define f sobre $[0, 1] \times [0, 1]$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n}, & 2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}, 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1} \\ -2^{2n+1}, & 2^{-n-1} \leq x < 2^{-n}, 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

¿Es f integrable en su dominio?

18. Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x = y \\ -2 + 2^{-x}, & x = y + 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probar que las integrales iteradas de f son distintas. ¿Es f integrable en su dominio?