Tema 2: La integral de Lebesgue
Problemas resueltos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Integración de funciones de variable real

1. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones acotadas de números reales. Demostrar las siguientes desigualdades:

   a) $\limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

   b) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n)$.

   c) $\liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n)$.

   d) Deducir de *c*) que si, además, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) = a + \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \liminf_{n\to\infty} (a_n-b_n) = a - \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Resolución.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $p_n, q_n, r_n \in \mathbb{R}$ por

$$p_n = \sup_{k\geq n} a_k, \quad q_n = \sup_{k\geq n} b_k, \quad r_n = \sup_{k\geq n} (a_k+b_k),$$

de modo que

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} p_n, \quad \limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} q_n, \quad \limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} r_n.$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, para todo $k \geq n$ es $a_k + b_k \leq p_n + q_n$, así que $r_n = \sup_{k\geq n}(a_k+b_k) \leq p_n + q_n$, y la arbitrariedad de n permite concluir:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} r_n \leq \lim_{n\to\infty} (p_n+q_n) = \lim_{n\to\infty} p_n + \lim_{n\to\infty} q_n = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

b) Como

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} (-a_n), \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = -\limsup_{n\to\infty} (-b_n), \quad \liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) = -\limsup_{n\to\infty} (-a_n-b_n),$$

sigue de *a*) que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = -\limsup_{n\to\infty} (-a_n) - \limsup_{n\to\infty} (-b_n) \leq -\limsup_{n\to\infty} (-a_n-b_n) = \liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n),$$

probando *b*).

c) Por aplicación de *b*), podemos escribir

$$\liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) - \limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) + \liminf_{n\to\infty} (-b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} ((a_n+b_n)-b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

lo que, trasponiendo términos, proporciona la primera desigualdad de *c*). En cuanto a la segunda, usando *a*) obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} ((a_n+b_n)-a_n) \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) + \limsup_{n\to\infty} (-a_n) = \limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) - \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

de donde

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n).$$

d) Finalmente, si, además, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, la primera desigualdad de *c*) implica

$$a = \liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} ((a_n + b_n) - b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) + \limsup_{n\to\infty} (-b_n) = \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) - \liminf_{n\to\infty} b_n,$$

y la segunda,

$$\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) - \liminf_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) + \limsup_{n\to\infty} (-b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n = a.$$

Combinando ambas desigualdades se obtiene la primera de las igualdades en *d*); la segunda es inmediata a partir de esta. □

1.1 Integración de funciones no negativas

2. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

Resolución. Claramente,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,dx \leq \int f\,dx.$$

Pero, por el lema de Fatou (Teorema 1.15),

$$\int f\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

□

3. Sean $f, g \geq 0$ funciones medibles, con $f \geq g$ y $\int g\,dx < \infty$. Demostrar que

$$\int f\,dx - \int g\,dx = \int (f-g)\,dx.$$

Resolución. Pongamos $E = \{x : g(x) < \infty\}$. Combinando el teorema de aproximación de Lebesgue (Teorema 1.19) con el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17) encontramos que el resultado de aditividad finita del Teorema 1.12 (*ii*) se extiende a cualquier función medible no negativa. En particular,

$$\infty > \int g\,dx = \int_E g\,dx + \int_{E^c} g\,dx \geq \int_E g\,dx + n\,m(E^c) \quad (n \in \mathbb{N})$$

obliga a que $m(E^c) = 0$, probando que g es finita c.t.p.. La función $f - g$ está definida, al menos, en E; (re)definiéndola arbitrariamente, en caso necesario, sobre E^c podemos aplicar el Teorema 1.21 para obtener:

$$\int f\,dx = \int_E f\,dx = \int (f-g)\chi_E\,dx + \int g\chi_E\,dx = \int (f-g)\,dx + \int g\,dx.$$

Puesto que $\int g\,dx < \infty$, sin más que restar esta integral a ambos miembros de la expresión precedente ya resulta la igualdad deseada. □

4. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p. y $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int f\,dx < \infty$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx = \int_E f\,dx \tag{1}$$

para cada conjunto medible E.

Resolución. Nótese, en primer lugar, que la sucesión de integrales $\int f_n\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$ está acotada, porque converge. Fijado un conjunto medible E, escribimos $g_n = f_n\chi_E$ $(n \in \mathbb{N})$, $g = f\chi_E$, de modo que $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ c.t.p., la integral de g es finita, y la sucesión de integrales $\int g_n\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$ también está acotada. Aplicando el Ejemplo 1.13 y el lema de Fatou (Teorema 1.15), encontramos que

$$\int_E f\,dx = \int g\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int g_n\,dx = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx. \tag{2}$$

Por otra parte, los Ejercicios 1 y 3 y, de nuevo, el lema de Fatou permiten escribir:

$$\int f\,dx - \int g\,dx = \int (f-g)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int (f_n - g_n)\,dx = \int f\,dx - \limsup_{n\to\infty} \int g_n\,dx.$$

Ya que $\int f\,dx < \infty$, se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx = \limsup_{n\to\infty} \int g_n\,dx \le \int g\,dx = \int_E f\,dx. \tag{3}$$

Combinando (2) y (3), resulta (1). □

5. Demostrar que el lema de Fatou (Teorema 1.15) y el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17) pueden ser deducidos el uno del otro usando solamente las propiedades de la integral recogidas en los Teoremas 1.12 y 1.14.

   Resolución. Sólo necesitamos probar que es posible establecer el lema de Fatou a partir del teorema de la convergencia monótona. Escribimos $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$ $(n \in \mathbb{N})$; la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente, y converge a $\liminf_{n\to\infty} f_n$. Por convergencia monótona,

   $$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx = \int \lim_{n\to\infty} g_n\,dx = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,dx.$$

   Como $\int g_n\,dx \le \int f_n\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$ implica

   $$\lim_{n\to\infty} \int g_n\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx,$$

   se obtiene, finalmente, la conclusión deseada. □

6. El lema de Fatou se enuncia, a veces, de la siguiente manera: *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p., entonces*

   $$\int f\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx.$$

   Probar que esta versión es equivalente a la recogida como Teorema 1.15.

   Resolución. Si suponemos cierta la versión del lema de Fatou dada por el Teorema 1.15 y atendemos al Ejemplo 1.13, la validez del enunciado alternativo es inmediata. Recíprocamente, admitiendo como cierta esta versión alternativa, consideramos la sucesión $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$ $(n \in \mathbb{N})$, que converge a $\liminf_{n\to\infty} f_n$ y satisface $g_n \le f_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Se tiene entonces que

   $$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx = \int \lim_{n\to\infty} g_n\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int g_n\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,dx,$$

   como se pretendía. □

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, donde $f \ge 0$ es medible. Demostrar que $\int f_n\,dx \nearrow \int f\,dx$ cuando $n \to \infty$.

Resolución. Basta ver que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, formada, claramente, por funciones medibles no negativas, es monótona creciente con límite f, y aplicar el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17). En efecto, fijemos $x \in \mathbb{R}$; si $f_n(x) = n \leq f(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge monótonamente a $f(x) = \infty$; si, por el contrario, existe el menor $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_N(x) = f(x) \leq N$, entonces $f_n(x) = f(x)$ para todo $n \geq N$, así que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ también converge monótonamente a $f(x)$. $\square$

8. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, a valores finitos, tal que $f_n \searrow f$ cuando $n \to \infty$. Probar que si $\int f_k\, dx < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dx = \int f\, dx,$$

y que $\int f_k\, dx = \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ no implica $\int f\, dx = \infty$.

Resolución. Para la primera parte, aplíquese el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17) a la sucesión creciente de funciones medibles no negativas $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Para el contraejemplo, considérese la sucesión $\left\{\chi_{(n,\infty)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, que decrece a la función idénticamente nula. $\square$

9. Sean φ, ψ funciones simples medibles. Demostrar que

$$\int \varphi\, dx + \int \psi\, dx = \int (\varphi + \psi)\, dx$$

directamente a partir de la Definición 1.6, sin hacer referencia a los Teoremas 1.12 ni 1.21.

Resolución. Tendremos en cuenta la Observación 1.7. Supongamos que las funciones $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, $\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ son simples medibles. Entonces

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap B_j}, \quad \psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{A_i \cap B_j},$$

con

$$\int \varphi\, dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i m(A_i \cap B_j), \quad \int \psi\, dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j m(A_i \cap B_j).$$

De este modo,

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\, \chi_{A_i \cap B_j}$$

y

$$\int (\varphi + \psi)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\, m(A_i \cap B_j) = \int \varphi\, dx + \int \psi\, dx. \qquad \square$$

10. Sea $f \geq 0$ una función medible. Construir una sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles, tales que $\psi_n \nearrow f$ cuando $n \to \infty$ y $m(\{x : \psi_n(x) > 0\}) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resolución. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión proporcionada por el teorema de aproximación de Lebesgue (Teorema 1.19), y considérese la sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $\psi_n = \varphi_n \chi_{(-n,n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Se tiene que $\psi_n \nearrow f$ cuando $n \to \infty$, ya que $\varphi_n \nearrow f$ y $\chi_{(-n,n)} \nearrow 1$ cuando $n \to \infty$. Es claro también que, para cada $n \in \mathbb{N}$, ψ_n es simple medible, y que el conjunto donde esta función no se anula, que es un subconjunto de $(-n,n)$, tiene medida finita. $\square$

11. Sea C el conjunto de Cantor. Sobre $[0,1]$ se define una función f de la siguiente manera: $f(x) = 0$ si $x \in C$, $f(x) = n$ en cada intervalo complementario de longitud 3^{-n} $(n \in \mathbb{N})$. Probar que f es medible, y que $\int_0^1 f\, dx = 3$.

Resolución. En la notación de la Sección 2.6.3 del Tema 1 se tiene que $f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$, donde cada $\varphi_n = n \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \chi_{I_n^j}$ $(n \in \mathbb{N})$ es medible no negativa. El teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) garantiza que la integral de la función medible no negativa

f es

$$\int_0^1 f\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \varphi_n\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'\Bigg|_{x=2/3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}\right)'\Bigg|_{x=2/3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=2/3} = 3. \qquad \square$$

12. Se define la función f sobre $(0,1)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1)\cap\mathbb{Q} \\ \lfloor x^{-1}\rfloor, & x \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde $\lfloor x\rfloor$ denota la parte entera de x. Demostrar que f es medible, con $\displaystyle\int_0^1 f\,dx = \infty$.

Resolución. Sea $g(x) = \lfloor x^{-1}\rfloor$ $(0<x<1)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)^{-1} < x \le n^{-1}$ implica $n \le x^{-1} < n+1$, de modo que $\lfloor x^{-1}\rfloor = n$; por tanto, $g = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{((n+1)^{-1},n^{-1}]}$ es medible. Aplicamos ahora el teorema de Beppo Levi para obtener

$$\int_0^1 g\,dx = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{((n+1)^{-1},n^{-1}]}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty.$$

Por otra parte, ya que $g \ge f$ y $g-f=0$ c.t.p., sigue del Ejemplo 1.13 que $\displaystyle\int_0^1 (g-f)\,dx = 0$, y finalmente

$$\int_0^1 f\,dx = \int_0^1 f\,dx + \int_0^1 (g-f)\,dx = \int_0^1 g\,dx = \infty. \qquad \square$$

1.2 La integral general

13. Probar que a toda función medible f le corresponde una función medible Borel g tal que $f=g$ c.t.p..

Resolución. En virtud de la descomposición $f = f^+ - f^-$, no se pierde generalidad suponiendo $f\ge 0$. Por el teorema de aproximación de Lebesgue (Teorema 1.19), f es el límite de una sucesión de funciones simples medibles $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Fijado $n\in\mathbb{N}$, el Ejercicio 10 permite suponer también que $\varphi_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_n}\alpha_{n,k}\chi_{E_{n,k}}$, con $m\left(\bigcup_{k=1}^{N_n}E_{n,k}\right) < \infty$ (aunque esto último no es relevante al problema). Puesto que cada $E_{n,k}$ es medible, por regularidad encontramos conjuntos $F_{n,k}\in\mathscr{F}_\sigma$ tales que $F_{n,k}\subset E_{n,k}$ y $m\left(E_{n,k}\setminus F_{n,k}\right) = 0$ $(k=1,\ldots,N_n)$. Para todo $n\in\mathbb{N}$, la función medible Borel $g_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_n}\alpha_{n,k}\chi_{F_{n,k}}$ es igual a φ_n c.t.p., ya que $g_n = \varphi_n$ excepto en el conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{N_n}(E_{n,k}\setminus F_{n,k})$, con $m(E)=0$. Como $g_n\chi_{E^c} = \varphi_n\chi_{E^c}$ $(n\in\mathbb{N})$, la sucesión $\{g_n\chi_{E^c}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la función $f\chi_{E^c}$, que es igual a f c.t.p.; pero no podemos asegurar que $f\chi_{E^c}$ sea de Borel. Elegimos entonces $F\in\mathscr{F}_\sigma$ con $F\subset E^c$ y $m(E^c\setminus F)=0$, de manera que

$$m(F^c) = m(F^c\setminus E) + m(E) = m(E^c\setminus F) + m(E) = 0.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $\varphi_n\chi_F = g_n\chi_F$ es medible Borel, así que $f\chi_F = \lim_{n\to\infty}\varphi_n\chi_F$ también lo es, y se cumple que $f\chi_F = f$ c.t.p.. La función $g = f\chi_F$ satisface, pues, lo requerido. $\square$

14. Demostrar, mediante un contraejemplo, que la tesis del lema de Fatou (Teorema 1.15) no se verifica necesariamente si, en vez de suponer $f_n\ge 0$, asumimos que f_n es integrable para todo $n\in\mathbb{N}$.

Resolución. Pongamos $f_n = -n\chi_{[0,1]} + n\chi_{(1,2]}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Puesto que

$$f_n(x) = \begin{cases} -n, & 0 \le x \le 1 \\ n, & 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & 0 \le x \le 1 \\ \infty, & 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de modo que

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} \infty, & 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} \infty, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $\displaystyle\int f^+ \, dx = \int f^- \, dx = \infty$, la integral

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx = \int f^+ \, dx - \int f^- \, dx$$

ni siquiera está definida. □

15. Sean $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones integrables y g una función integrable tal que $f_n \ge g$ c.t.p., para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, dx.$$

Resolución. Escribiendo $f_n' = \max\{f_n, g\}$ encontramos que que $f_n' \ge g$ y $f_n' = f_n$ c.t.p. $(n \in \mathbb{N})$. Por otra parte, $\liminf_{n\to\infty} f_n' = \liminf_{n\to\infty} f_n$ c.t.p., porque la unión contable de conjuntos de medida nula tiene medida nula. Llegado este punto, basta aplicar el lema de Fatou (Teorema 1.15) a la sucesión $\{f_n' - g\}_{n=1}^\infty$.

Justifiquemos la afirmación sobre la igualdad c.t.p. de los límites inferiores. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, es $f_n' = f_n$ c.t.p., entonces $m(E_n) = 0$, donde $E_n = \{x : f_n'(x) \ne f_n(x)\}$. El conjunto $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ tiene medida nula, y como $f_n'\chi_{E^c} = f_n\chi_{E^c}$ $(n \in \mathbb{N})$, sigue fácilmente que

$$(\liminf_{n\to\infty} f_n')\chi_{E^c} = \liminf_{n\to\infty} f_n'\chi_{E^c} = \liminf_{n\to\infty} f_n\chi_{E^c} = (\liminf_{n\to\infty} f_n)\chi_{E^c},$$

es decir, $\liminf_{n\to\infty} f_n' = \liminf_{n\to\infty} f_n$ c.t.p.. □

16. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones integrables, tales que $f_n \nearrow f$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que

$$\int f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, dx.$$

Resolución. En virtud del Ejemplo 1.34, podemos asumir que f_1 toma valores finitos. De esta manera, las funciones $g_n = f_n - f_1$ $(n \in \mathbb{N})$ están definidas, son no negativas, y $g_n \nearrow f - f_1 = g$ cuando $n \to \infty$. El teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17) permite escribir

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, dx = \int g \, dx.$$

Se obtiene el resultado sin más que sumar $\displaystyle\int f_1 \, dx$ a ambos miembros de esta igualdad. □

17. Probar que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dx = 0$, donde, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ es igual a:

a) $\dfrac{\ln(x+n)}{n}\,e^{-x}\cos x$.

b) $\dfrac{nx\ln x}{1+n^2x^2}$.

c) $\dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$.

d) $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

e) $\dfrac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$.

f) $\dfrac{n^p\,x^{1+r}}{1+n^2x^2}$ $\quad (r>0,\ 0<p<\min\{2,1+r\})$.

g) $\dfrac{n^p\,x^r\ln x}{1+n^2x^2}$ $\quad (r>0,\ 0<p<\min\{2,1+r\})$.

Resolución. En todos los casos se cumple que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ c.t.p.. Queremos aplicar el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38).

a) Ya que $x<e^x$ $(x\in\mathbb{R})$, o bien $\ln x<x$ $(x>0)$, podemos escribir

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\ln(x+n)}{n}\,e^{-x}\cos x\right| \le \frac{x+n}{n}\,e^{-x} \le \frac{nx+n}{n}\,e^{-x} = (1+x)e^{-x} \quad (0\le x\le 1,\ n\in\mathbb{N}),$$

donde la función mayorante es integrable en $[0,1]$ al ser continua, y por lo tanto medible y acotada, en dicho intervalo. En efecto, para $x\ge 0$ se tiene que $1+x\le e^x$, porque $h(x)=1+x-e^x$ satisface $h(0)=0$ y $h'(x)=1-e^x<0$ si $x>0$; o bien, porque

$$1+x\le e^x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \quad (x\ge 0).$$

Luego, $x<1+x\le e^x$ implica $x<e^x$ si $x\ge 0$, desigualdad que es trivial cuando $x<0$.

b) Para cualesquiera $x\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$ se cumple que $(1-nx)^2\ge 0$, así que $2nx\le 1+n^2x^2$. Además, $\ln x\le 0$ si $0<x\le 1$. Por tanto, $|f_n(x)|\le -\ln x/2$ $(0<x<1,\ n\in\mathbb{N})$, donde la función mayorante es integrable en $(0,1)$:

$$-\int_0^1 \ln x\,dx = x(1-\ln x)\Big|_0^1 = 1.$$

c) De nuevo, usamos que $2nx\le 1+n^2x^2$ para obtener $|f_n(x)|\le 1/2\sqrt{x}$ $(0<x<1,\ n\in\mathbb{N})$, con

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1.$$

d) Una vez más, es claro que $|f_n(x)|\le 1/2$ $(x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$ y que la función mayorante es integrable en $[0,1]$.

e) Dados $x\in(0,1)$ y $n\in\mathbb{N}$, se verifica que

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = \frac{n^{3/2}x^{3/2}}{\sqrt{x}(1+n^2x^2)}\\ &\le \begin{cases}\dfrac{n^2x^2}{\sqrt{x}(1+n^2x^2)}, & nx\ge 1\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+n^2x^2)}, & nx<1\end{cases}\\ &\le \frac{1}{\sqrt{x}},\end{aligned}$$

donde la función mayorante es integrable en $(0,1)$.

f) Fijemos $x\in[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}$.

- Si $\min\{2,1+r\}=2$, entonces

$$\frac{n^p x^{1+r}}{1+n^2x^2} \le \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} \le 1.$$

- Si $\min\{2,1+r\}=1+r$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{n^p x^{1+r}}{1+n^2x^2} &\leq \frac{n^{1+r}x^{1+r}}{1+n^2x^2}\\ &\leq \begin{cases}\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}, & nx\geq 1\\ \dfrac{1}{1+n^2x^2}, & nx<1\end{cases}\\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Hemos probado que $|f_n(x)|\leq 1$ $(0\leq x\leq 1,\ n\in\mathbb{N})$, donde la función mayorante es integrable en $[0,1]$.

g) De nuevo, fijemos $x\in(0,1)$ y $n\in\mathbb{N}$. Factorizamos

$$\frac{n^p x^r \ln x}{1+n^2x^2}=\frac{n^p x^p}{1+n^2x^2}\,x^{r-p}\ln x.$$

Como $r-p>-1$, la función $x^{r-p}\ln x$ es integrable en $(0,1)$. Por otra parte, como $0<p<2$,

$$\begin{aligned}\frac{n^p x^p}{1+n^2x^2} &\leq \begin{cases}\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}, & nx\geq 1\\ \dfrac{1}{1+n^2x^2}, & nx<1\end{cases}\\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Así pues, $|f_n(x)|\leq x^{r-p}\ln x$ $(0<x<1,\ n\in\mathbb{N})$, donde la función mayorante es integrable en $(0,1)$. □

18. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\operatorname{sen}\frac{x}{n}\,dx=0$.

Resolución. Es fácil ver que el integrando tiende a 0 cuando $n\to\infty$. Tomamos

$$g(x)=\begin{cases}4x^{-2}, & x\geq 1\\ 1, & 0<x<1,\end{cases}$$

como en el Ejemplo 1.50. Si $x>0$ y $n\geq 2$, cada integrando está mayorado por la función integrable g. Aplicamos convergencia dominada (Teorema 1.38) para concluir que el límite de la sucesión de integrales es igual a 0. □

19. Probar que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1+nx}{(1+x)^n}\,dx=0$.

Resolución. Denotemos por f_n la función que comparece en el integrando. La regla de L'Hôpital permite calcular

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx}{(1+x)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1+x)^n\ln(1+x)}=\frac{x}{\ln(1+x)}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x)^n}=0\quad(0\leq x\leq 1).$$

Como[1]

$$1+nx=\binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1\leq\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n\quad(0\leq x\leq 1,\ n\in\mathbb{N}),$$

la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ está mayorada por la función idénticamente igual a 1, que es integrable en $[0,1]$. Por convergencia dominada (Teorema 1.38), el límite buscado vale 0. □

[1] La desigualdad $(1+x)^n\geq 1+nx$, válida si $x\geq -1$ y $n\in\mathbb{N}$, es conocida como *desigualdad de Bernoulli* y se puede demostrar por inducción sobre n. En efecto, sea $x\geq -1$. Para $n=1$, se cumple trivialmente. Suponiéndola cierta para n y multiplicando ambos miembros de la expresión correspondiente por $1+x\geq 0$, resulta

$$(1+x)^{n+1}\geq(1+x)(1+nx)=1+nx+x+nx^2=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x,$$

lo que establece su validez para $n+1$.

20. Demostrar que si $\beta > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/\beta} \int_0^1 x^{1/\beta}(1-x)^n \frac{dx}{x} = \beta \int_0^\infty e^{-u^\beta}\, du.$$

Resolución. Dado $n \in \mathbb{N}$, sustitúyase $nx = u^\beta$, úsese que $1-x \le e^{-x}$ $(x \ge 0)$ para conseguir un integrando mayorado por βe^{-u^β}, y aplíquese convergencia dominada (Teorema 1.38). En efecto, tras el cambio de variable se obtiene

$$n^{1/\beta} \int_0^1 x^{1/\beta}(1-x)^n \frac{dx}{x} = \beta \int_0^\infty \left(1-\frac{u^\beta}{n}\right)^n \chi_{(0,n^{1/\beta})}(u)\, du \quad (n \in \mathbb{N}),$$

con

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{u^\beta}{n}\right)^n \chi_{(0,n^{1/\beta})}(u)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-nu^{-\beta}}\right)^{-nu^{-\beta}(-u^\beta)} \chi_{(0,n^{1/\beta})}(u)\right] = e^{-u^\beta}\chi_{(0,\infty)}(u).$$

En cuanto a la mayorante, si se admite que $1-x \le e^{-x}$ $(x \ge 0)$, es claro que, tomando $x = u^\beta/n$,

$$\left(1-\frac{u^\beta}{n}\right)^n \le e^{-\frac{u^\beta}{n}n} = e^{-u^\beta}.$$

La estimación admitida se establece, por ejemplo, considerando la función auxiliar $h(x) = 1-x-e^{-x}$, que satisface $h(0) = 0$ y $h'(x) = -1+e^{-x} < 0$ si $x > 0$. Incidentalmente, nótese que $h'(x) > 0$ si $x < 0$, lo que muestra que

$$1-x \le e^{-x}, \qquad \text{y también} \qquad 1+x \le e^x, \tag{4}$$

para todo x. □

21. *a*) Verificar que si $f_n(x) = \left(\dfrac{n+x}{n+2x}\right)^n$, entonces $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ para cada $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

b) Decidir si es cierto que el límite de la integral es la integral del límite en los siguientes casos, evaluando los límites correspondientes:

I. $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)e^{x/2}\, dx.$ II. $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)e^{-x/2}\, dx.$

Resolución. Fijado $x > 0$, reemplazamos $n \in \mathbb{N}$ por un parámetro continuo $t > 0$; se tiene que $d/dt\,(\ln f_t(x)) < 0$. En efecto,

$$\frac{d}{dt}(\ln f_t(x)) = \ln\frac{t+x}{t+2x} + \frac{t}{t+x}\left(1-\frac{t+x}{t+2x}\right) \le \ln\frac{t+x}{t+2x} + \left(1-\frac{t+x}{t+2x}\right).$$

Poniendo

$$u = \frac{t+x}{t+2x},$$

basta ver que $\ln u + (1-u) < 0$ si $0 < u < 1$; pero esta es otra versión de la desigualdad $1+x < e^x$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Además,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2x)-x}{n+2x}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2x}{-x}}\right)^{\frac{n+2x}{-x}\,\frac{-nx}{n+2x}} = e^{-x}.$$

Luego:

I. Por un lado,

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)e^{x/2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = 2.$$

Por otro lado, $f_n(x) > 1/2^n$ cualesquiera sean $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ (nótese que $2n+2x > n+2x$), así que $\int_0^\infty f_n(x)\, e^{x/2}\, dx = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, en este caso, el límite de la integral no es la integral del límite.

II. Como, por *a*), $f_n \le f_1 \le 1$ $(n \in \mathbb{N})$, el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38) permite intercambiar el límite con la integral para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, e^{-x/2}\, dx = \int_0^\infty e^{-3x/2}\, dx = \frac{2}{3}. \qquad \square$$

22. Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx = 1$.

Resolución. Dado $n \in \mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad $1+x \le e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, ya establecida, a x/n en vez de x y elevamos ambos miembros a n para obtener la estimación $(1+x/n)^n e^{-2x}\chi_{[0,n]}(x) \le e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. En virtud del teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38), es posible intercambiar el límite $e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ (que es también la función mayorante) con la integral. Nótese que la integral del límite no es otra que $\Gamma(1) = 1$. $\square$

23. Demostrar que si $\alpha > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha).$$

Resolución. La desigualdad $1+x \le e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ aplicada a $-x/n$ en vez de x prueba que $(1-x/n)^n \le e^{-x}$ para todo x y todo $n \in \mathbb{N}$, cf. Ejercicio 22. Procédase como en dicho ejercicio. $\square$

24. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\infty \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx = \int_\alpha^\infty \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx$$

para $\alpha > 0$, pero no para $\alpha = 0$.

Resolución. El segundo miembro es igual a 0 para todo α.

Si $\alpha > 0$, sustitúyase $t = x\sqrt{n}$ para obtener, por convergencia dominada (Teorema 1.38), que el límite del primer miembro vale 0:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\infty \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-t^2}\chi_{(\alpha\sqrt{n},\infty)}(t)\, dt = 0$$

toda vez que $\lim_{n\to\infty} e^{-t^2}\chi_{(\alpha\sqrt{n},\infty)}(t) = 0$, con

$$e^{-t^2}\chi_{(\alpha\sqrt{n},\infty)}(t) \le e^{-t^2}\chi_{(0,\infty)}(t)$$

y

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Sin embargo, si $\alpha = 0$, el mismo cambio de variable conduce a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \square$$

25. *a*) Determinar el rango de valores de α para los cuales

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} n^\alpha(1-x)x^n\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^\alpha(1-x)x^n\, dx.$$

b) Encontrar también el rango de valores de α que satisfacen las condiciones del teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38).

Resolución.

a) El primer miembro vale 0:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha > 0, \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} x^{n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

De otra parte,

$$\int_0^1 n^{\alpha}(1-x)x^n\, dx = n^{\alpha}B(n+1,2) = n^{\alpha}\,\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)} = n^{\alpha}\,\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n^{\alpha}}{(n+2)(n+1)},$$

así que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^{\alpha}(1-x)x^n\, dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2} = \begin{cases} 0, & \alpha < 2 \\ 1, & \alpha = 2 \\ \infty, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Por tanto, el rango de valores de α pedido es $\alpha < 2$.

b) Si $\alpha \leq 0$, el integrando $f_n(x) = n^{\alpha}(1-x)x^n$ $(0 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N})$ está, claramente, acotado por 1, que es integrable en $[0,1]$. Si $\alpha \geq 2$, el apartado *a*) impide que se satisfagan las hipótesis del teorema de la convergencia dominada. Para $0 < \alpha < 2$ se verifica que $n^{\alpha}(1-x)x^n < \alpha^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}$, donde la función del segundo miembro es integrable:

$$\int_0^1 (1-x)^{1-\alpha}\, dx = -\left.\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_0^1 = \frac{1}{2-\alpha}.$$

En efecto: fijados $n \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha < 2$, sea $h(x) = n^{\alpha}(1-x)^{\alpha}x^n$; procediendo como en el Ejemplo 1.49, se quiere ver que $h(x) < \alpha^{\alpha}$ $(x \in [0,1])$. Ahora,

$$h'(x) = n^{\alpha}(1-x)^{\alpha-1}x^{n-1}[n-(n+\alpha)x] = 0$$

implica que el único punto crítico de h en $(0,1)$ es

$$x_n = \frac{n}{n+\alpha}.$$

Este punto debe corresponder a un máximo absoluto, toda vez que $h(0) = h(1) = 0$ y $h(x) > 0$ $(x \in (0,1))$. Calculamos

$$h(x_n) = n^{\alpha}(1-x_n)^{\alpha}x_n^n = n^{\alpha}\left(1-\frac{n}{n+\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n} = \alpha^{\alpha}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n+\alpha} < \alpha^{\alpha},$$

alcanzando, con ello, la conclusión requerida.

Por tanto, el rango de valores de α pedido es también $\alpha < 2$. □

1.3 Integración de series

26. Demostrar que, para $a > 1$,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{e^x-1}\, dx = \left(\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\, dx\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a} = \Gamma(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}.$$

Resolución. El integrando admite el desarrollo

$$\frac{x^{a-1}}{e^x-1} = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{a-1}e^{-nx} \quad (x>0).$$

Aplicamos el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) y efectuamos un cambio de variable $(nx = t)$ para obtener la conclusión deseada. $\square$

27. Probar que

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Resolución. El integrando admite el desarrollo

$$\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 = \ln^2 x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (0<x<1).$$

Aplicando el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) y la fórmula de reducción (obtenida mediante integración por partes)

$$I_r = \int x^s \ln^r x\, dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \ln^r x - \frac{r}{s+1} I_{r-1} \tag{5}$$

con $s = n-1$ y $r = 2$, encontramos que

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 x^{n-1} \ln^2 x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[x^n \left(\ln^2 x - \frac{2}{n}\ln x + \frac{2}{n^2}\right)\right]_0^1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Alternativamente, es posible proceder de la siguiente forma. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n(x) = nx^{n-1}\ln^2 x$ $(0<x<1)$. Entonces, $f_n \geq 0$ y

$$\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0<x<1).$$

Además, los cambios de variable $\ln x = t$, $x = e^t$, $x^{-1}\, dx = dt$ y $nt = -s$, $n\, dt = -ds$ proporcionan, sucesivamente:

$$\int_0^1 f_n\, dx = n\int_0^1 x^{n-1}\ln^2 x\, dx = n\int_{-\infty}^0 t^2 e^{nt}\, dt = \frac{1}{n^2}\int_0^{\infty} s^2 e^{-s}\, ds = \frac{\Gamma(3)}{n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

Por el teorema de Beppo Levi,

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n\, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$ $\square$

28. Verificar la igualdad

$$\int_0^1 (e^x-1)\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{(n-1)!\,(n^2+n)^2}.$$

Resolución. El integrando admite el desarrollo

$$(e^x-1)\left(\ln x+\frac{1}{x}\right) = (e^x-1)\ln x + \frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} \quad (0<x<1).$$

Como los términos de ambas series tienen signo constante, aplicamos el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) a cada una de ellas. Para la primera usamos de nuevo (5), esta vez con $s = n$ y $r = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} \ln x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \ln x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)} \left[x^{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) \right]_0^1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)^2}.$$

Calculamos directamente la segunda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{n-1} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,n} x^n \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,n}.$$

Sumamos ambas:

$$\int_0^1 (e^x - 1) \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{(n-1)!\,(n^2+n)^2}. \qquad \square$$

29. Demostrar que si $p > -1$,

$$\int_0^1 \frac{x^p \ln x}{1-x} \, dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}.$$

Resolución. Desarrollamos $(1-x)^{-1}$ en serie de potencias y aplicamos el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22), aprovechando nuevamente que, al ser $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$, el integrando tiene signo constante:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^p \ln x}{1-x} \, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{p+n} \ln x \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{p+n+1}}{p+n+1} \left(\ln x - \frac{1}{p+n+1} \right) \right]_0^1 \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}. \end{aligned} \qquad \square$$

30. Suponiendo $0 < b < a$, probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} ax} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2b}{(2n+1)^2 a^2 - b^2}.$$

Resolución. Se tiene:

$$\frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} ax} = 2e^{-ax} \operatorname{sh} bx \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2anx} \quad (x > 0).$$

El teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) es aplicable, por cuanto $e^{(b-a)x} \geq e^{-(b+a)x}$ implica $2e^{-ax} \operatorname{sh} bx = e^{(b-a)x} - e^{-(b+a)x} \geq 0$. Resulta así que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} ax} \, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[e^{(b-a-2an)x} - e^{-(b+a+2an)x} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-(2na+a+b)x}}{2na+a+b} - \frac{e^{-(2na+a-b)x}}{2na+a-b} \right]_0^{\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2na+a-b} - \frac{1}{2na+a+b} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2b}{(2n+1)^2 a^2 - b^2}. \end{aligned} \qquad \square$$

31. Demostrar que

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sech} x^2 \, dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Resolución. Expresamos el integrando como

$$\operatorname{sech} x^2 = \frac{2e^{-x^2}}{1-(-e^{-2x^2})} = 2e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-2x^2})^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x^2} \quad (x > 0),$$

con sumas parciales dominadas por el primer término de la serie, $2e^{-x^2}$, que es integrable (recuérdese que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx =$

$\sqrt{\pi}/2$):

$$\left| 2e^{-x^2}\,\frac{1+(-1)^m e^{-2(m+1)x^2}}{1+e^{-2x^2}} \right| \le 2e^{-x^2}\,\frac{1+(e^{-2x^2})^{m+1}}{1+e^{-2x^2}} \le 2e^{-x^2} \quad (m\in\mathbb{N}).$$

El teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38) es entonces aplicable y proporciona el resultado que se buscaba:

$$\int_0^\infty \operatorname{sech} x^2\, dx = 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-(2n+1)x^2} dx = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}. \qquad \square$$

32. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x+1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}.$$

Resolución. Procedemos como en el Ejercicio 31, obteniendo un desarrollo en serie alternada a cuyas sumas parciales aplicamos el Teorema 1.38 (convergencia dominada). En efecto, para $x>0$ se tiene

$$\frac{1}{e^x+1} = -\frac{-e^{-x}}{1-(-e^{-x})} = -\sum_{n=1}^\infty (-1)^n e^{-nx} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} e^{-nx},$$

donde la m-ésima suma parcial del desarrollo admite la mayoración

$$\left|\frac{e^{-x}-(-1)^m e^{-(m+1)x}}{1+e^{-x}}\right| = \left| e^{-x}\,\frac{1-(-1)^m e^{-mx}}{1+e^{-x}}\right| \le e^{-x}\,\frac{1+(e^{-x})^m}{1+e^{-x}} \le e^{-x} \quad (m\in\mathbb{N}).$$

Por tanto,

$$\frac{\cos x}{e^x+1} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} e^{-nx}\cos x,$$

y, puesto que $|\cos x|\le 1$, cada suma parcial de la serie del segundo miembro está mayorada por la función e^{-x}, que es integrable en $(0,\infty)$. Aplicando convergencia dominada a la sucesión de sumas parciales encontramos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x+1}\, dx &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^\infty e^{-nx}\cos x\, dx\\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\left.\frac{(\operatorname{sen} x - n\cos x)\,e^{-nx}}{n^2+1}\right|_0^\infty = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}. \qquad \square\end{aligned}$$

33. Demostrar que si $p,q>0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{p+nq}.$$

Resolución. Procedemos como en el Ejercicio 31, obteniendo un desarrollo en serie alternada a cuyas sumas parciales aplicamos el Teorema 1.38 (convergencia dominada). En efecto, se tiene

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \frac{x^{p-1}}{1-(-x^q)} = x^{p-1}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{nq},$$

así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx &= \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{p+nq-1}\right] dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^1 x^{p+nq-1}\, dx\\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left[\frac{x^{p+nq}}{p+nq}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{p+nq}.\end{aligned}$$

La m-ésima suma parcial de la serie que integramos término a término está mayorada por una función integrable: si $x > 0$,

$$\left| x^{p-1} \frac{1+(-1)^m x^{(m+1)q}}{1+x^q} \right| \leq x^{p-1} \frac{1+(x^q)^{m+1}}{1+x^q} \leq x^{p-1} \quad (m \in \mathbb{N}),$$

siendo

$$\int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{x^p}{p}\bigg|_0^1 = \frac{1}{p} < \infty.$$

□

34. Probar que si $x \geq 1$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 t}{1+xe^t}\, dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n^2+2)}{n\,(n^2+4)} \frac{1}{x^n}.$$

Resolución. Para $t > 0$, el integrando es expresable como

$$\frac{\cos^2 t}{1+xe^t} = -\cos^2 t \frac{(-xe^t)^{-1}}{1-(-xe^t)^{-1}} = -\cos^2 t \sum_{n=1}^\infty (-xe^t)^{-n} = \cos^2 t \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} x^{-n} e^{-nt}.$$

Aplicamos el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38) a la sucesión de sumas parciales para obtener el resultado:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos^2 t}{1+xe^t}\, dt &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} x^{-n} \int_0^\infty e^{-nt} \cos^2 t\, dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} x^{-n} \left[\frac{e^{-nt}}{n(n^2+4)} \left(2\cos 2t + n \operatorname{sen} 2t - (n^2+4)\cos^2 t\right) \right]_0^\infty \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n^2+2)}{n\,(n^2+4)} \frac{1}{x^n},\end{aligned}$$

toda vez que

$$\left| \cos^2 t \sum_{n=1}^m (-xe^t)^{-n} \right| = \left| \cos^2 t \frac{(-xe^t)^{-1} - (-xe^t)^{-m-1}}{1-(-xe^t)^{-1}} \right| \leq (xe^t)^{-1} \frac{1+(xe^t)^{-m}}{1+(xe^t)^{-1}} \leq e^{-t} \quad (t > 0,\ m \in \mathbb{N}),$$

con

$$\int_0^\infty e^{-t}\, dt = \Gamma(1) = 1.$$

□

35. Demostrar que

$$\lim_{b \to 1-} \int_0^b \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Resolución. Para $0 < b < 1$,

$$\chi_{[0,b]}(x) \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \chi_{[0,1]}(x) \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Además, cuando $b \to 1-$, las funciones del primer miembro convergen a la del segundo. Por el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22), el segundo miembro tiene integral $\sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} < \infty$. Aplicamos al primero el teorema de la convergencia dominada con parámetro continuo (Ejemplo 1.40) para obtener el resultado. □

36. *a*) Probar que si

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} 2tx}{\operatorname{sh} x} e^{-t^2 x}\, dx,$$

entonces, para $t \geq 0$ y $t \neq 1$,

$$I(t) = 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(t^2+2n+1)^2 - 4t^2}.$$

b) Demostrar que

$$\lim_{t\to 1} \left[I(t) - \frac{4t}{\left(t^2-1\right)^2} \right] = \frac{3}{4}.$$

Resolución.

a) Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} 2tx}{\operatorname{sh} x} e^{-t^2 x} &= \frac{e^{2tx} - e^{-2tx}}{e^x - e^{-x}} e^{-t^2 x} = \frac{e^{2tx} - e^{-2tx}}{1 - e^{-2x}} e^{-(t^2+1)x} \\ &= \left[e^{-(t^2-2t+1)x} - e^{-(t^2+2t+1)x} \right] \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nx}. \end{aligned}$$

Puesto que el integrando es no negativo, aplicamos el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2tx}{\operatorname{sh} x} e^{-t^2 x}\, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[e^{-(t^2-2t+1+2n)x} - e^{-(t^2+2t+1+2n)x} \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-(t^2+2t+1+2n)x}}{(t+1)^2+2n} - \frac{e^{-(t^2-2t+1+2n)x}}{(t-1)^2+2n} \right]_0^{\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-1)^2+2n} - \frac{1}{(t+1)^2+2n} \right] \\ &= 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(t^2+2n+1)^2 - 4t^2}, \end{aligned}$$

como se pretendía.

b) Escribimos

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} 2tx}{\operatorname{sh} x} e^{-t^2 x} &= \frac{2e^{-t^2 x} \operatorname{sh} 2tx}{e^x - e^{-x}} = 2e^{-(t^2+1)x} \operatorname{sh} 2tx \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} \\ &= 2e^{-(t^2+1)x} \operatorname{sh} 2tx \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} = 2e^{-(t^2+1)x} \operatorname{sh} 2tx \left(1 + \frac{1}{e^{2x}-1} \right) \\ &= 2e^{-(t^2+1)x} \operatorname{sh} 2tx + \frac{2e^{-(t^2+1)x} \operatorname{sh} 2tx}{e^{2x}-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

La integral del primer sumando del segundo miembro de (6) da

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\infty} e^{-(t^2+1)x} \operatorname{sh} 2tx\, dx &= \int_0^{\infty} e^{-(t-1)^2 x}\, dx - \int_0^{\infty} e^{-(t+1)^2 x}\, dx \\ &= \left[\frac{e^{-(t+1)^2 x}}{(t+1)^2} - \frac{e^{-(t-1)^2 x}}{(t-1)^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{4t}{(t^2-1)^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Como $\operatorname{sh} x \leq xe^x$ para $x \geq 0$, el segundo sumando del segundo miembro de (6) está mayorado por $8x\left(e^{2x}-1\right)^{-1}$ si $0 \leq t \leq 2$. Ciertamente: $1 - 2x \leq e^{-2x}$ (cf. (4)) implica $1 - e^{-2x} \leq 2x$, o bien $e^x - e^{-x} \leq 2xe^x$, que es la primera estimación a probar (válida, de hecho, para todo x). Es claro entonces que, si $0 \le t \le 2$,

$$\frac{2e^{-(t^2+1)x}\operatorname{sh}2tx}{e^{2x}-1} \le \frac{8xe^{-(t-1)^2x}}{e^{2x}-1} \le \frac{8x}{e^{2x}-1},$$

donde, por el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22),

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{8x}{e^{2x}-1}\,dx &= 8\int_0^\infty \frac{xe^{-2x}}{1-e^{-2x}}\,dx = 8\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty xe^{-2nx}\,dx \\ &= 8\sum_{n=1}^\infty \left[-\frac{xe^{-2nx}}{2n} - \frac{1}{(2n)^2}e^{-2nx}\right]_0^\infty \\ &= 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

Ya que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1}\frac{2e^{-(t^2+1)x}\operatorname{sh}2tx}{e^{2x}-1} &= \frac{2e^{-2x}\operatorname{sh}2x}{e^{2x}-1} = \frac{1-e^{-4x}}{e^{2x}-1} \\ &= \frac{(1-e^{-2x})(1+e^{-2x})e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \\ &= e^{-2x}+e^{-4x},\end{aligned}$$

el teorema de la convergencia dominada con parámetro continuo (Ejemplo 1.40) permite escribir

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1}\int_0^\infty \frac{2e^{-(t^2+1)x}\operatorname{sh}2tx}{e^{2x}-1}\,dx &= \int_0^\infty \lim_{t\to1}\frac{2e^{-(t^2+1)x}\operatorname{sh}2tx}{e^{2x}-1}\,dx \\ &= \int_0^\infty \left(e^{-2x}+e^{-4x}\right)\,dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}+\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.\end{aligned} \tag{8}$$

Combinando (6) y (7) encontramos que

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}2tx}{\operatorname{sh}x}e^{-t^2x}\,dx = \frac{4t}{(t^2-1)^2} + \int_0^\infty \frac{2e^{-(t^2+1)x}\operatorname{sh}2tx}{e^{2x}-1}\,dx.$$

Finalmente, atendiendo a (8) concluimos:

$$\lim_{t\to1}\left[I(t) - \frac{4t}{(t^2-1)^2}\right] = \lim_{t\to1}\int_0^\infty \frac{2e^{-(t^2+1)x}\operatorname{sh}2tx}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{3}{4}.$$ □

37. Probar que

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.$$

Resolución. Para $x \ge 0$, desarrollamos en serie $\cos\sqrt{x}$ y aplicamos el Teorema 1.41. En efecto, claramente

$$e^{-x}\cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^n e^{-x}}{(2n)!};$$

y dado que

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \Gamma(n+1) = n!,$$

se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\frac{(-1)^n x^n e^{-x}}{(2n)!}\right| dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int_0^{\infty}x^n e^{-x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}.$$

Comprobamos mediante el criterio del cociente que esta serie converge:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}:\frac{n!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n)!}{n!\,(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}=0<1.$$

Sin más que apelar al Teorema 1.41, ya resulta

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^{\infty}x^n e^{-x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.$$ □

38. La función de Bessel de orden entero $m\geq 0$ se define como

$$J_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}.$$

Demostrar que:

a) Si $a\in\mathbb{R}$, entonces

$$2\int_0^{\infty}J_m(2ax)\,x^{m+1}e^{-x^2}\,dx=a^m e^{-a^2}.$$

b) Si $a>1$, entonces

$$\int_0^{\infty}J_0(x)\,e^{-ax}\,dx=\left(1+a^2\right)^{-1/2}.$$

Resolución. Sustitúyanse J_m y J_0 en *a*) y *b*), respectivamente, y aplíquese el Teorema 1.41.

a) Se tiene:

$$\begin{aligned}2\int_0^{\infty}J_m(2ax)\,x^{m+1}e^{-x^2}\,dx&=2\int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}\left(\frac{2ax}{2}\right)^{m+2n}x^{m+1}e^{-x^2}\right]dx\\&=2\int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{m+2n}}{n!(n+m)!}\,x^{2m+2n+1}e^{-x^2}\right]dx.\end{aligned}$$

Estudiamos[2]

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a|^{m+2n}}{n!(n+m)!}\int_0^{\infty}x^{2m+2n+1}e^{-x^2}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a|^{m+2n}}{n!(n+m)!}\int_0^{\infty}t^{m+n}e^{-t}\,dt=|a|^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a|^{2n}}{n!}=|a|^m e^{a^2}<\infty.$$

Por tanto, cabe aplicar el Teorema 1.41 para obtener

$$2\int_0^{\infty}J_m(2ax)\,x^{m+1}e^{-x^2}\,dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{m+2n}}{n!(n+m)!}\int_0^{\infty}x^{2m+2n+1}e^{-x^2}\,dx=a^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a^2)^n}{n!}=a^m e^{-a^2}.$$

b) Se verifica:

$$\int_0^{\infty}J_0(x)\,e^{-ax}\,dx=\int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}e^{-ax}\right]dx=\int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n\,(n!)^2}\,x^{2n}e^{-ax}\right]dx.$$

[2]Adviértase que el cambio de variable $x^2=t$ conduce a

$$2\int_0^{\infty}x^{2m+2n+1}e^{-x^2}\,dx=\int_0^{\infty}t^{m+n}e^{-t}\,dt=\Gamma(m+n+1)=(m+n)!.$$

Estudiamos[3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n\,(n!)^2} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n\,(n!)^2} \frac{(2n)!}{a^{2n+1}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4a^2}\right)^n.$$

Probaremos ahora que, para $0 < x < 1/4$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

En efecto, para cada $n = 0, 1, \ldots$ se tiene

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)\cdots(-1/2-(n-1))}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} \frac{2^n\,n!}{2^n\,n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{(-4)^n} \binom{2n}{n};
\end{aligned}$$

luego,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(-4x)^n}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Esto significa que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n\,(n!)^2} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4a^2}\right)^n = \frac{1}{a\sqrt{1-4\,(1/4a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} < \infty.$$

Por tanto, el Teorema 1.41 es aplicable y conduce a

$$\int_0^{\infty} J_0(x)\,e^{-ax}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n\,(n!)^2} \frac{(2n)!}{a^{2n+1}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{4a^2}\right)^n = \frac{1}{a\sqrt{1-4\,(-1/4a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}. \qquad \square$$

39. Probar que

$$\int_0^1 \frac{(x\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}.$$

Resolución. Desarróllese $\left(1+x^2\right)^{-1}$ en serie y aplíquese el Teorema 1.41. Concretamente, para $0 < x < 1$ escribimos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

de modo que, trasladando los índices de sumación,

$$\frac{(x\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} \ln^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} \ln^2 x.$$

[3] El cambio de variable $ax = t$, $a\,dx = dt$ proporciona

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^{2n+1}} \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t} = \frac{\Gamma(2n+1)}{a^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{a^{2n+1}}.$$

Se tiene ahora

$$\int_0^1 x^{2n}\ln^2 x\,dx = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^3}\left[(2n+1)^2\ln^2 x - 2(2n+1)\ln x + 2\right]\Big|_0^1 = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

(cf. (5)), con

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < \infty.$$

Como

$$\int_0^1 (-1)^{n-1}x^{2n}\ln^2 x\,dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3},$$

aplicando el Teorema 1.41 ya obtenemos

$$\int_0^1 \frac{(x\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}.$$

□

40. Demostrar que si $a > 1$, entonces

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\operatorname{sen} nx}{a^n}\right)dx = \frac{2a\left(a^2+1\right)}{\left(a^2-1\right)^2}.$$

Resolución. Desarróllese el segundo miembro en potencias de a^{-1} y aplíquese el Teorema 1.41 al primer miembro para obtener la misma serie. Más precisamente, para el primer miembro se tiene:

$$\int_0^{\pi}|\operatorname{sen} nx|\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\operatorname{sen} t|\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\operatorname{sen} t|\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} t\,dt = -\cos t\Big|_0^{\pi} = 2,$$

mientras que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx &= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} t\,dt\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos t\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \begin{cases}0, & n \text{ par}\\ 2n^{-1}, & n \text{ impar}.\end{cases}\end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\left|\frac{n^2\operatorname{sen} nx}{a^n}\right| = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{a^n} < \infty,$$

como muestra el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{a^{n+1}} : \frac{n^2}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2a^n}{n^2a^{n+1}} = \frac{1}{a} < 1.$$

Aplicamos el Teorema 1.41:

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\operatorname{sen} nx}{a^n}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{a^n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx = 2\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impar}}}^{\infty}\frac{n^2}{n\,a^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{a^{2n+1}}. \tag{9}$$

Escribiendo ahora, por simplicidad, $z = a^{-1}$ (nótese que $0 < z < 1$), encontramos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{a^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}n\,z^n - \sum_{n=1}^{\infty}2n\,z^{2n}. \tag{10}$$

Para la primera serie del segundo miembro de (10) se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{z}{(1-z)^2};$$

y para la segunda serie del segundo miembro,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n z^{2n} = z \sum_{n=1}^{\infty} 2n z^{2n-1} = z \left(\frac{1}{1-z^2} \right)' = \frac{2z^2}{(1-z^2)^2}.$$

Por tanto, (10) se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{a^{2n+1}} &= \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{2z^2}{(1-z^2)^2} = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{2z^2}{(1-z)^2(1+z)^2} \\ &= \frac{z(1+z)^2 - 2z^2}{(1-z^2)^2} = \frac{z(1+z^2)}{(1-z^2)^2} = \frac{a(a^2+1)}{(a^2-1)^2}. \end{aligned}$$

La resolución se completa multiplicando por 2 ambos miembros de esta igualdad e insertándola en (9). □

41. Probar que si f es integrable sobre (a,b) y $|r|<1$, se tiene que

$$\int_a^b f(x) \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_a^b f(x) \cos nx\, dx.$$

Resolución. Un cálculo directo establece la igualdad

$$f(x) \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} = \frac{1}{2} f(x) \left\{ \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{1}{1 - re^{-ix}} \right\}.$$

Desarrollamos el segundo miembro en serie geométrica y aplicamos el Teorema 1.41. En primer lugar,

$$\frac{1}{2} f(x) \left\{ \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{1}{1 - re^{-ix}} \right\} = f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n f(x) \cos nx.$$

Ahora, poniendo $I = \int_a^b |f(x)|\, dx$ encontramos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |r^n f(x) \cos nx|\, dx \le I \sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty.$$

En virtud del Teorema 1.41, podemos escribir

$$\int_a^b f(x) \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n f(x) \cos nx \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_a^b f(x) \cos nx\, dx,$$

como se pretendía. □

1.4 Las integrales de Riemann y Lebesgue

42. Demostrar que si f es integrable en $(a+h, b+h)$ y se define $f_h(x) = f(x+h)$, entonces f_h es integrable en (a,b) y

$$\int_{a+h}^{b+h} f\, dx = \int_a^b f_h\, dx.$$

Resolución. Claramente, $(f_h)^+ = (f^+)_h$, $(f_h)^- = (f^-)_h$, por lo que basta probar el resultado para $f \geq 0$. Por el Corolario 1.20, existe una sucesión de funciones simples medibles $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\varphi_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\int \varphi_n \, dx \nearrow \int f \, dx$ cuando $n \to \infty$. Pero entonces $(\varphi_n)_h \nearrow f_h$ cuando $n \to \infty$, así que, por convergencia monótona (Teorema 1.17),

$$\int_{a+h}^{b+h} f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a+h}^{b+h} \varphi_n \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n)_h \, dx = \int_a^b f_h \, dx.$$

En la segunda igualdad se ha usado que, para cualquier conjunto medible E,

$$\chi_{E\cap(a+h,b+h)} = \chi_{(E-h)\cap(a,b)} = \chi_{E-h}\chi_{(a,b)} = (\chi_E)_h \chi_{(a,b)}. \qquad \square$$

43. Sea f una función medible periódica, de periodo $T > 0$. Probar que si f es integrable en $[0,T]$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f \, dt. \tag{11}$$

Resolución. Dado $x > 0$, arbitrario, escribimos $x = nT + r$, donde $r \equiv x \,(\operatorname{mod} T) \in [0,T)$. Por la periodicidad de f y el Ejercicio 42, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^x f \, dt &= \frac{1}{nT+r}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{iT}^{(i+1)T} f \, dt + \int_{nT}^{nT+r} f \, dt\right) = \frac{1}{nT+r}\left(n\int_0^T f(t)\, dt + \int_0^r f(t+nT)\, dt\right) \\
&= \frac{1}{nT+r}\left(n\int_0^T f \, dt + \int_0^r f \, dt\right) = \frac{n}{nT+r}\int_0^T f \, dt + \frac{1}{nT+r}\int_0^r f \, dt.
\end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$,

$$\frac{n}{nT+r} \longrightarrow \frac{1}{T}$$

y

$$\left|\frac{1}{nT+r}\int_0^r f \, dt\right| \leq \frac{1}{nT}\int_0^T |f| \, dt \longrightarrow 0,$$

lo que establece (11). $\square$

44. Sea S un conjunto medible, con $m(S) < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \frac{dx}{2 - \operatorname{sen} nx} = \frac{m(S)}{\sqrt{3}}.$$

Resolución. Si $S = (a,b)$, integramos explícitamente y usamos la periodicidad del integrando para lograr el resultado en el límite. En efecto, tras el cambio de variable

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt,$$

se tiene:

$$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x} = \int \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \int \frac{dt}{(t-1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2) - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Por tanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Dado $b > 0$, efectuamos el nuevo cambio de variable $nx = t$ y aplicamos el Ejercicio 43 para obtener, en el límite cuando

$n \to \infty$:

$$\int_0^b \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} = \frac{1}{n}\int_0^{nb} \frac{dt}{2-\operatorname{sen} t} = b\,\frac{1}{nb}\int_0^{nb} \frac{dt}{2-\operatorname{sen} t} \longrightarrow b\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\operatorname{sen} t} = \frac{b}{2\pi}\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Análogamente, para $a>0$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Por último, tomando $S=(a,b)$, donde $a,b>0$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} = \lim_{n\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} - \lim_{n\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} = \frac{b-a}{\sqrt{3}} = \frac{m(S)}{\sqrt{3}}.$$

Cualquier otro intervalo se puede obtener por traslación a partir de un intervalo (a,b) con $a,b>0$ y la correspondiente traslación del integrando preserva la periodicidad, lo que completa la demostración en este caso.

A continuación probaremos el caso general. Puesto que $m(S)<\infty$, dado $\varepsilon>0$ existen intervalos abiertos $I_1,\dots,I_k$, disjuntos dos a dos, tales que si $J=\bigcup_{j=1}^k I_j$, entonces $m(S\triangle J)<\varepsilon$. Para dos conjuntos A, B cualesquiera, sigue de la definición de función característica que

$$\begin{aligned}
|\chi_A(x)-\chi_B(x)| &= \begin{cases} |0-0|, & x\in (A\cup B)^c \\ |1-1|, & x\in A\cap B \\ |1-0|, & x\in A\setminus B \\ |0-1|, & x\in B\setminus A \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & x\in (A\setminus B)\cup(B\setminus A) \\ 0, & x\notin (A\setminus B)\cup(B\setminus A) \end{cases} \\
&= \chi_{A\triangle B}(x).
\end{aligned}$$

Ahora, como $2-\operatorname{sen} nx \geq 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\left|\left[\int_S \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} - \frac{m(S)}{\sqrt{3}}\right] - \left[\int_J \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} - \frac{m(J)}{\sqrt{3}}\right]\right| &= \left|\int_S \left(\frac{1}{2-\operatorname{sen} nx} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx - \int_J \left(\frac{1}{2-\operatorname{sen} nx} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx\right| \\
&\leq \int \left|\frac{1}{2-\operatorname{sen} nx} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| |\chi_S(x)-\chi_J(x)|\; dx \\
&\leq \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\int |\chi_S(x)-\chi_J(x)|\, dx \\
&= \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) m(S\triangle J) < 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

con

$$\int_J \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} - \frac{m(J)}{\sqrt{3}} = \sum_{j=1}^k \int_{I_j} \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} - \sum_{j=1}^k \frac{m(I_j)}{\sqrt{3}} = \sum_{j=1}^k \left(\int_{I_j} \frac{dx}{2-\operatorname{sen} nx} - \frac{m(I_j)}{\sqrt{3}}\right) \longrightarrow 0$$

cuando $n\to\infty$, lo que completa la resolución. □

45. Probar que $x^{-1}\operatorname{sen} x$ es integrable Riemann sobre $(-\infty,\infty)$, pero que su integral de Lebesgue no existe.

Resolución. Definimos el integrando como 1 en $x=0$, para obtener una función continua y acotada en toda la recta real.

En primer lugar, veamos que la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = L < \infty$$

conlleva la del límite
$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx = L.$$
En efecto: partimos de que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N$ implica
$$\left|\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Paralelamente, la propiedad arquimediana de los números naturales proporciona $M\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq M$ implica $n^{-1}<2^{-1}\varepsilon$. Sea $B=\max\{(M+1)\pi,(N+1)\pi\}$, y sea $b\geq B$. Para $n=\lfloor b\pi^{-1}\rfloor\in\mathbb{N}$ es $n\pi\leq b<(n+1)\pi$, de donde $(n+1)\pi>b\geq (N+1)\pi$, y $n\geq N$. Por otra parte, $(n+1)\pi>b\geq (M+1)\pi$ implica $n\geq M$. Así, podemos escribir:
$$\begin{aligned}\left|\int_0^b\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx-L\right| &\leq \left|\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx-L\right|+\left|\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx-\int_0^b\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\int_b^{(n+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}\,dx\leq\frac{\varepsilon}{2}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}\,dx\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}<\varepsilon.\end{aligned}$$
Hemos probado que para todo $\varepsilon>0$, existe $B>0$ tal que $b\geq B$ implica
$$\left|\int_0^b\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx-L\right|<\varepsilon,$$

como se pretendía.

Ahora,
$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\int\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx &= 2\,(\mathrm{R})\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx\\ &= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx = 2\sum_{k=0}^\infty\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx\\ &= 2\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}\,dx,\end{aligned}$$

donde la serie del segundo miembro es alternada y converge por el criterio de Leibniz[4]: para cada $k\in\mathbb{N}$,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}\,dx\leq\frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\operatorname{sen}x|\,dx=\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi\operatorname{sen}x\,dx=\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\operatorname{sen}x|\,dx\leq\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}\,dx,$$
y, como antes,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}\,dx\leq\frac{1}{k}\longrightarrow 0$$
cuando $k\to\infty$. Por tanto, la integral de Riemann de $x^{-1}\operatorname{sen}x$ existe.

Para ver que $x^{-1}\operatorname{sen}x$ no es integrable (Lebesgue), escribimos, análogamente,
$$\int\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|dx=2\sum_{k=0}^\infty\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}\,dx\geq\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\operatorname{sen}x\,dx\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k},$$

[4] *(Criterio de Leibniz para la convergencia de series alternadas)* Sea la serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$, donde, o bien $a_k=(-1)^k b_k$, o bien $a_k=(-1)^{k+1}b_k$, con $b_k\geq 0$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Si

a) $\lim_{k\to\infty}b_k=0$, y

b) la sucesión $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ es decreciente,

entonces $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge.

donde la serie del segundo miembro es ahora armónica divergente.

La integrabilidad Riemann de la función bajo estudio también se puede demostrar mediante el argumento siguiente. Al ser continua, dicha función es integrable en $[0,\pi]$. Por otro lado, sea $b>0$. Integrando por partes,

$$\int_\pi^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\frac{\cos b}{b} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Puesto que

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\chi_{(\pi,b)}(x)\right| \le \frac{1}{x^2} \quad (\pi < x < \infty,\ b>0)$$

y $1/x^2$ es integrable en (π,∞), el teorema de la convergencia dominada para parámetros continuos (Ejemplo 1.40) asegura que existe

$$\text{(R)}\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_\pi^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\frac{1}{\pi} - \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx < \infty. \qquad \square$$

46. Sea f una función integrable. Demostrar que para cada $\varepsilon>0$, existe una función g, continua de soporte compacto, tal que

$$\int |f-g|\,dx < \varepsilon.$$

Resolución. Si f es integrable, entonces $|f|$ lo es. Como la sucesión $\{|f|\chi_{[-n,n]}\}_{n=1}^\infty$ converge monótonamente a $|f|$, dado $\varepsilon>0$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x|>n}|f|\,dx = \int |f|\,dx - \int_{|x|\le n}|f|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por el Corolario 1.62, existe una función g, continua de soporte compacto, tal que

$$\int_{|x|\le n}|f-g|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya que g tiene soporte compacto, se puede elegir n suficientemente grande como para que, además,

$$\int_{|x|>n}|g|\,dx = 0.$$

Por tanto, para n grande:

$$\begin{aligned}\int |f-g|\,dx &= \int_{|x|\le n}|f-g|\,dx + \int_{|x|>n}|f-g|\,dx\\ &\le \int_{|x|\le n}|f-g|\,dx + \int_{|x|>n}|f|\,dx + \int_{|x|>n}|g|\,dx < \varepsilon.\end{aligned} \qquad \square$$

47. Sea f una función integrable. Probar que

$$\lim_{h\to 0}\int |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0.$$

Resolución. Dado $\varepsilon>0$, el Ejercicio 46 proporciona una función continua k de soporte compacto, digamos $[a,b]$, tal que $\int |k-f|\,dx<\varepsilon$. Para todo h con $|h|<1$, se tiene entonces que $k(x+h)=0$ si $x\notin[a-1,b+1]$. Como k es uniformemente continua sobre el compacto $[a-1,b+1]$, existe $0<\delta<1$ tal que $|h|<\delta$ implica $|k(x+h)-k(x)|<\varepsilon/(b-a+2)$. Así pues, si $|h|<\delta$, teniendo en cuenta el Ejercicio 42 se concluye que

$$\int |f(x+h)-f(x)|\,dx \le \int |f(x+h)-k(x+h)|\,dx + \int_{a-1}^{b+1}|k(x+h)-k(x)|\,dx + \int |k(x)-f(x)|\,dx < 3\varepsilon. \qquad \square$$

48. *(Lema de Riemann-Lebesgue)* Sean f una función integrable, φ una función medible y acotada, y supongamos que existe

β tal que $\varphi(x+\beta) = -\varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)\,\varphi(kx)\,dx = 0.$$

Resolución. Para $k \in \mathbb{N}$, en virtud del Ejercicio 42 podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_k &= \int f(x)\,\varphi(kx)\,dx = \int f\left(x+\beta k^{-1}\right)\,\varphi\left(k(x+\beta k^{-1})\right)\,dx \\ &= \int f\left(x+\beta k^{-1}\right)\,\varphi(kx+\beta)\,dx = -\int f\left(x+\beta k^{-1}\right)\,\varphi(kx)\,dx; \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} 2\,|I_k| &= \left| \int f(x)\,\varphi(kx)\,dx - \int f\left(x+\beta k^{-1}\right)\,\varphi(kx)\,dx \right| \\ &\le \sup|\varphi| \int \left| f(x) - f\left(x+\beta k^{-1}\right) \right|\,dx, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue del Ejercicio 47. □

1.5 Miscelánea

49. Sea f una función no negativa a valores finitos, satisfaciendo $m(\{x : f(x) \ge n\}) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe una función integrable g tal que fg no es integrable.

Resolución. Pongamos $E_n = \{x : n \le f(x) < n+1\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces

$$\{x : f(x) \ge n\} \subset E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

implica $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; luego, existe una subsucesión $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ tal que $n_r \ge r$ y $m(E_{n_r}) > 0$ $(r \in \mathbb{N})$. Definiendo

$$g = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2\,m(E_{n_r})}\,\chi_{E_{n_r}},$$

encontramos que g es integrable:

$$\int g\,dx = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2\,m(E_{n_r})} \int \chi_{E_{n_r}}\,dx = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} < \infty;$$

pero

$$\int fg\,dx = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2\,m(E_{n_r})} \int_{\chi_{E_{n_r}}} f\,dx \ge \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n_r}{r^2} = \infty,$$

por cuanto $n_r \ge r$ $(r \in \mathbb{N})$. □

50. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ denota la distancia de x al número más próximo de la forma $k\,10^{-n}$, donde k es un entero, y sea $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Demostrar que

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{1}{36}.$$

Resolución. Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n tiene una gráfica en «dientes de sierra», con ceros en $k\,10^{-n}$: la distancia de un punto a los extremos de un intervalo $(k\,10^{-n}, (k+1)\,10^{-n}]$ $(k = 0, 1, \ldots, 10^n - 1)$ es máxima en el punto medio (pico de la gráfica) y disminuye, hasta anularse, a medida que nos acercamos a dichos extremos. La integral en uno de tales intervalos es el área de un triángulo de base igual a la longitud del intervalo y altura la mitad de esta, es decir,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{10^n}-\frac{k}{10^n}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{1}{10^{2n}}\quad (k=0,1,\dots,10^n-1).$$

Como, para cada n, hay 10^n intervalos,

$$\int_0^1 f_n\,dx=\frac{1}{4}\frac{10^n}{10^{2n}}=\frac{1}{4}\frac{1}{10^n}.$$

Llegado este punto, aplicamos el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22) para obtener:

$$\int_0^1 f\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n\,dx=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{1}{4}\frac{1/10}{1-1/10}=\frac{1}{36}.$$ □

51. Sea

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ a^{-1}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\text{ y } a \text{ es el primer entero no nulo en la representación decimal de } x.\end{cases}$$

Probar que f es medible, y que

$$\int_0^1 f\,dx=\frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n}\right).$$

Resolución. Definimos

$$g(0)=\begin{cases}0, & x=0\\ a^{-1}, & a \text{ es el primer entero no nulo en la representación decimal de } x.\end{cases}$$

Entonces g es medible, $g=f$ c.t.p. (luego, por el Teorema 2.53 del Tema 1, g es medible), y $\int_0^1 g\,dx=\int_0^1 f\,dx$. Además, $g=n^{-1}$ en $\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[n\,10^{-k},(n+1)10^{-k}\right)$ para $n=1,\dots,9$, así que

$$g=\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n}\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[n\,10^{-k},(n+1)10^{-k}\right)}=\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{\left[n\,10^{-k},(n+1)10^{-k}\right)}$$

y

$$\int_0^1 g\,dx=\left(\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n}\right).$$ □

52. Se define

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ \lfloor x^{-1}\rfloor^{-1}, & x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

donde, como habitualmente, $\lfloor x\rfloor$ denota la parte entera de x. Demostrar que

$$\int_0^1 f\,dx=\frac{\pi^2}{6}-1.$$

Resolución. Puesto que $\mathbb{Q}$ tiene medida nula, para nuestros propósitos es equivalente considerar la función $f(x)=\lfloor x^{-1}\rfloor^{-1}$, definida en $(0,1)$. Esta función se puede expresar también como $f(x)=n^{-1}$ si $(n+1)^{-1}<x\le n^{-1}$, para $n\in\mathbb{N}$:

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\chi_{((n+1)^{-1},n^{-1}]}.$$

Por el teorema de Beppo Levi (Teorema 1.22),

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \chi_{((n+1)^{-1},n^{-1}]}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\ &= \frac{\pi^2}{6}-1.\end{aligned}$$

La suma de la segunda serie se calcula volviendo a descomponer el término general, para obtener sumas parciales telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1. \qquad \square$$

53. *a*) Sea

$$f_n(x) = \frac{nx-1}{(x\ln n+1)\,(nx^2\ln n+1)} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Probar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $(0<x\le 1)$, pero

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

b) Sea $h_n(x) = nx^n$ $(n\in\mathbb{N})$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ $(0\le x<1)$, pero

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_n\,dx = 1.$$

Resolución. Usamos integración elemental. No se contradice el Teorema 1.38 (convergencia dominada).

a) Para $x\neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx-1}{(x\ln n+1)\,(nx^2\ln n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2\ln^2 n} = 0.$$

Efectuando el cambio de variable $x\ln n = t$, $\ln n\,dx = dt$ (nuevos extremos de integración: $t=0$, $t=\ln n$), encontramos que

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{\ln n}\int_0^{\ln n}\frac{nt-\ln n}{(t+1)\,(nt^2+\ln n)}\,dt \quad (n\in\mathbb{N},\ n\ge 2).$$

Descomponemos el integrando en fracciones simples, dando a t los valores $t=0$, $t=\pm 1$, para obtener:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= -\frac{1}{\ln n}\int_0^{\ln n}\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{\ln n}\int_0^{\ln n}\frac{nt}{nt^2+\ln n}\,dt\\ &= -\frac{\ln(1+\ln n)}{\ln n}+\frac{\ln\left(n\ln^2 n+\ln n\right)-\ln(\ln n)}{2\ln n}\\ &= -\frac{\ln(1+\ln n)}{\ln n}+\frac{\ln(n\ln n+1)}{2\ln n} \quad (n\in\mathbb{N},\ n\ge 2).\end{aligned}$$

Ahora,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\ln n)}{\ln n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n\ln n+1)}{2\ln n} = \frac{1}{2},$$

lo que completa la resolución de esta parte.

b) Es claro que basta comprobar el valor del límite cuando $0<x<1$. En tal caso, aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^{-n}} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{-n}\ln x} = -\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{\ln x} = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_n\,dx = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{nx^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

como se pretendía.

En ninguno de los dos casos se vulnera el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38).

- En el primero: deshaciendo el cambio de variable en la descomposición en fracciones simples se pone de manifiesto que, para cada $0 < x \leq 1$ y $n \geq 2$, $f_n(x)$ está mayorada por

$$g_n(x) = \frac{nx}{nx^2\ln n + 1},$$

cuya derivada es

$$g_n'(x) = n\,\frac{nx^2\ln n + 1 - 2nx^2\ln n}{(nx^2\ln n+1)^2} = n\,\frac{1-nx^2\ln n}{(nx^2\ln n+1)^2},$$

con punto crítico

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n\ln n}} \in (0,1),$$

correspondiente a un máximo: g_n crece a la izquierda y decrece a la derecha de este punto. Por tanto, el mínimo de g_n en el intervalo $I_n = [x_n, 1]$ se alcanza en su extremo derecho 1, siendo

$$g_n(1) = \frac{n}{n\ln n + 1}.$$

Esto significa que cualquier mayorante de $\{g_n\}_{n=2}^{\infty}$ en $(0,1)$ debe mayorar también a la función

$$g = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n\ln n+1}\,\chi_{I_n};$$

veamos que g no es integrable, lo que implicará que ninguna mayorante de $\{g_n\}_{n=2}^{\infty}$ en $(0,1)$ lo es. Como, para cada $n \geq 2$,

$$q_n(x) = \frac{1}{x\ln n + 1} \leq 1 \quad (x \in (0,1)),$$

donde la mayorante es integrable en $(0,1)$, y (véase la descomposición en fracciones simples de f_n) $f_n = g_n - q_n$ implica $g_n = f_n + q_n$, resulta que si $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ admitiera una mayorante integrable en $(0,1)$ también la admitiría $\{g_n\}_{n=2}^{\infty}$, una contradicción.

Para probar que g no es integrable, observamos que su integral viene dada por la serie

$$\int_0^1 g\,dx = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n\ln n+1}\,|I_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n\ln n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n\ln n}}\right),$$

la cual diverge por comparación[5] con la serie divergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$:

$$\frac{n}{n \ln n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right) : \frac{1}{n \ln n} = \frac{n^2 \ln n}{n \ln n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right) \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge se comprueba aplicando el criterio de la integral[6]. Nos apoyaremos en la función

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad (x \geq 2).$$

Esta función es positiva y decreciente:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln^2 x}(\ln x + 1) < 0$$

si $\ln x > -1$, esto es, si $x > e^{-1}$. Por tanto, sólo necesitamos estudiar la convergencia de la integral siguiente (cambio de variable: $\ln x = u$, $dx/x = du$):

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty} \ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b\to\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty.$$

Como la integral es divergente, la serie también diverge.

- En el segundo: si $x \in I_n = [2^{-1/n}, 1)$, entonces $h_n(x) \geq h_n(2^{-1/n}) = n/2$ ($n \in \mathbb{N}$), así que toda mayorante de $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1)$ ha de mayorar también a la función

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \chi_{I_n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \chi_{I_n}.$$

Pero esta función no es integrable, toda vez que la serie

$$2\int_0^1 g\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\,|I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1-\frac{1}{2^{1/n}}\right),$$

[5]*(Criterio de comparación por paso al límite del cociente)* Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos no negativos, para las que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Se verifica:

a) Si $L = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $L = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

c) Si $0 < L < \infty$, entonces las dos series tienen el mismo carácter: o bien ambas convergen, o bien ambas divergen.

[6]*(Criterio de la integral para la convergencia de series)* Considérese un entero $N \in \mathbb{N}$ y una función f, monótona decreciente en el intervalo no acotado $[N, \infty)$. La serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$$

converge a un número real si, y sólo si, la integral impropia

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

es finita. En particular, si la integral diverge, entonces la serie diverge también.

Cuando la integral impropia es finita, la demostración del criterio proporciona las cotas

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)\,dx.$$

Nótese que si la función f es creciente entonces su opuesta $-f$ es decreciente, y cabe aplicar el criterio a $-f$.

por comparación con la armónica, diverge:

$$n\left(1-\frac{1}{2^{1/n}}\right):\frac{1}{n}=\frac{1-2^{-1/n}}{n^{-2}}\sim\frac{2^{1/n}-1}{1/n^2}\sim\frac{2^{1/n}\ln 2\,(-1/n^2)}{-2/n^3}=\frac{n\,2^{1/n}\ln 2}{2}\longrightarrow\infty\quad\text{cuando } n\to\infty. \qquad\square$$

54. Sea

$$F_n(x)=\frac{n}{\pi}\int\frac{f(t)\,dt}{1+n^2(t-x)^2}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

Suponiendo que las integrales involucradas existen, probar que si f es continua en x entonces $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=f(x)$.

Resolución. Puesto que f es continua en x, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|t-x|<\delta$ implica $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$. Por otra parte, el cambio de variable $u=n(t-x)$, $du=n\,dt$ permite obtener

$$\frac{n}{\pi}\int\frac{dt}{1+n^2(t-x)^2}=\frac{1}{\pi}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}u\Big|_{-\infty}^{\infty}=1\quad(n\in\mathbb{N}).\tag{12}$$

Ahora, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|F_n(x)-f(x)|&=\left|\frac{n}{\pi}\int\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt\right|\\&=\left|\frac{n}{\pi}\left\{\int_{|t-x|<\delta}+\int_{|t-x|\geq\delta}\right\}\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt\right|\\&\leq\varepsilon+\frac{n}{\pi}\int_{|t-x|\geq\delta}\frac{|f(t)-f(x)|}{1+n^2(t-x)^2}\,dt.\end{aligned}$$

El integrando de la última integral decrece monótonamente a cero a medida que n aumenta, y es integrable para $n=1$. Una vez comprobados estos extremos, el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38) proporcionará el resultado. En efecto, derivando respecto de n:

$$\frac{n}{1+n^2(t-x)^2}=\frac{1+n^2(t-x)^2-2n^2(t-x)^2}{[1+n^2(t-x)^2]^2}=\frac{1-n^2(t-x)^2}{[1+n^2(t-x)^2]^2}<0$$

si, y sólo si, $1-n^2(t-x)^2<0$, o bien $|t-x|>1/n$, lo que ocurre para n suficientemente grande ($1/n<\delta$). La convergencia a cero es evidente. Para la integrabilidad del primer término basta advertir que, en virtud de la hipótesis y (12), se tiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t-x|\geq\delta}\frac{|f(t)-f(x)|}{1+(t-x)^2}\,dt\leq\frac{1}{\pi}\int\frac{|f(t)|}{1+(t-x)^2}\,dt+|f(x)|<\infty. \qquad\square$$

55. *(Derivación de integrales paramétricas: regla de Leibniz)* Para cada t, sea $f(x,t)$ una función integrable de x. Supongamos que $\partial f/\partial t$ existe para cada x y satisface $|(\partial f/\partial t)(x,t)|\leq\varphi(x)$, donde la función φ es integrable. Demostrar que

$$\frac{d}{dt}\int f(x,t)\,dx=\int\frac{\partial f}{\partial t}\,dx.$$

Resolución. Escribamos $g_h(x,t)=h^{-1}[f(x,t+h)-f(x,t)]$. Entonces, $\lim_{h\to0}g_h(x,t)=(\partial f/\partial t)(x,t)$. Pero $|g_h(x,t)|\leq\varphi(x)$, así que aplicando el Ejemplo 1.40 (convergencia dominada para parámetros continuos) a $\int g_h\,dx$, se obtiene el resultado. A continuación desarrollaremos esta idea con más detalle.

Supondremos que I es un intervalo abierto y $f:\mathbb{R}\times I\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(\cdot,t)$ es integrable para cada $t\in I$. Ello permite definir $F(t)=\int f(x,t)\,dx$.

Teorema. *Sea t_0 un punto de acumulación de I. Si existe $\lim_{t\to t_0}f(x,t)$ para c.t. $x\in\mathbb{R}$, y existe una función integrable g*

tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$ *para todo* $t \in I$, $t \neq t_0$, *y para c.t.* $x \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \int \lim_{t\to t_0} f(x,t)\, dx.$$

En particular, si, además, $t_0 \in I$ *y* $f(x,\cdot)$ *es continua en* t_0 *para c.t.* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* F *es continua en* t_0.

Demostración. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ una sucesión convergente a t_0, con $t_n \neq t_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n(x) = f(x,t_n)$, por hipótesis existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{t\to t_0} f(x,t)$ en c.t. $x \in \mathbb{R}$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.38),

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, dx = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) dx = \int \left[\lim_{t\to t_0} f(x,t)\right] dx.$$

En caso de que $f(x,\cdot)$ sea continua en $t_0 \in I$ para c.t. $x \in \mathbb{R}$, sigue de lo anterior que

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \int f(x,t_0)\, dx = F(t_0),$$

y F es continua en t_0. $\square$

Teorema (Fórmula de Leibniz). *Si existe* $(\partial f/\partial t)(x,t)$ *para todo* $t \in I$ *y c.t.* $x \in \mathbb{R}$, *y existe* g, *integrable en* $\mathbb{R}$, *tal que* $|(\partial f/\partial t)(x,t)| \leq g(x)$ *para todo* $t \in I$ *y c.t.* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* F *es derivable en* I, *y*

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

Demostración. Por hipótesis, existen:

$$E_1 \subset \mathbb{R}, \text{ con } m(E_1) = 0, \text{ tal que, para todo } x \notin E_1, \lim_{t\to t_0} \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0);$$

$$E_2 \subset \mathbb{R}, \text{ con } m(E_2) = 0, \text{ tal que, para todo } x \notin E_2, \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\right| \leq g(x)\ (s \in I).$$

Luego, para todo $x \notin E_1 \cup E_2$, el teorema del valor medio proporciona algún s comprendido entre t_0 y t, tal que

$$\left|\frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\right| \leq g(x).$$

Por el teorema precedente,

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \int \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}\, dx \\ &= \int \left(\lim_{t\to t_0} \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}\right) dx = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, dx. \end{aligned}$$ $\square$

Ejemplo. *Probar que la función* $F(t) = \int \cos tx e^{-x^2/2}\, dx$ *es derivable y* $F'(t) = -tF(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. *Deducir de lo anterior que* $F(t) = Ce^{-t^2/2}$, *con* $C = \int e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Resolución. Sea $f(x,t) = \cos tx e^{-x^2/2}$ $((x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$; para todo x y todo t, existe $(\partial f/\partial t)(x,t) = -x \operatorname{sen} tx e^{-x^2/2}$ y $|(\partial f/\partial t)(t,x)| \leq |x| e^{-x^2/2}$. Como la función $g(x) = |x| e^{-x^2/2}$ es integrable en $\mathbb{R}$, deducimos de la fórmula de Leibniz que

$$F'(t) = \int (-x \operatorname{sen} tx e^{-x^2/2})\, dx.$$

Integrando por partes ($u = \operatorname{sen} tx$, $dv = -xe^{-x^2/2}\, dx$) se llega a que $F'(t) = -tF(t)$, ecuación diferencial cuya solución es la indicada en el enunciado ($C = F(0)$). □

56. Supongamos que $x^\gamma f(x)$ es integrable sobre $(0,\infty)$ si $\gamma = \alpha$ y $\gamma = \beta$, con $\alpha < \beta$. Probar que para cada $\gamma \in (\alpha,\beta)$, la integral $\int_0^\infty x^\gamma f(x)\, dx$ existe y define una función continua de γ.

Resolución. Considerando por separado los casos $x \le 1$ y $x > 1$, obtenemos $|x^\gamma f(x)| \le \big(x^\alpha + x^\beta\big)|f(x)|$, donde la función mayorante es integrable en $(0,\infty)$; por tanto, la integral existe. En cuanto a la continuidad, basta usar el hecho de que, para h pequeño, $\gamma + h \in (\alpha,\beta)$, así que

$$\big|\big(x^{\gamma+h} - x^\gamma\big) f(x)\big| \le 2\big(x^\alpha + x^\beta\big)|f(x)| \quad (0 < x < \infty),$$

y aplicar la versión del teorema de la convergencia dominada para parámetros continuos (Ejemplo 1.40). □

57. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \le g$ $(n \in \mathbb{N})$, donde la función g es integrable. Demostrar que

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\, dx \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, dx \le \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, dx \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n\, dx.$$

Dar un ejemplo donde todas las desigualdades sean estrictas.

Resolución. Aplicamos el Lema de Fatou (Teorema 1.15) a las sucesiones de funciones medibles no negativas $\{g + f_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{g - f_n\}_{n=1}^\infty$. En el primer caso, obtenemos:

$$\int g\, dx + \int \liminf_{n\to\infty} f_n\, dx = \int \liminf_{n\to\infty} (g + f_n)\, dx \le \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n)\, dx = \int g\, dx + \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, dx,$$

de donde, puesto que g es integrable,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\, dx \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, dx;$$

y en el segundo:

$$\int g\, dx - \int \limsup_{n\to\infty} f_n\, dx = \int \liminf_{n\to\infty} (g - f_n)\, dx \le \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)\, dx = \int g\, dx - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, dx,$$

de donde

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, dx \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n\, dx.$$

Resultan así la primera y tercera de las desigualdades que se buscan; la segunda es trivial.

Para el contraejemplo, definimos sobre $[0,1]$ la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ por $f_1 = \chi_{(1/2,1]}$, $f_2 = \chi_{(1/4,1]}$, $f_3 = \chi_{[0,3/4]}$, $f_4 = 1 - f_1 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_5 = f_1$, $f_6 = f_2, \ldots$. La siguiente tabla resume los valores que toman las funciones de esta sucesión y sus integrales:

n	$[0,1/4]$	$(1/4,1/2]$	$(1/2,3/4]$	$(3/4,1]$	$\int f_n\, dx$
1	0	0	1	1	1/2
2	0	1	1	1	3/4
3	1	1	1	0	3/4
4	1	1	0	0	1/2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ proporciona la cadena de desigualdades estrictas $0 < 1/2 < 3/4 < 1$. □

2 Integración con respecto a una medida abstracta

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contra, trabajaremos con un espacio de medida arbitrario $(X, \mathscr{S}, \mu)$.

58. Sean $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos medibles y sea F_k $(k = 1, \ldots, n)$ el conjunto de los puntos que pertenecen a exactamente k de los conjuntos E_i $(i = 1, \ldots, n)$. Probar que
$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(F_k).$$

Resolución. La función $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}$ es simple medible, y toma los valores $\{0, 1, \ldots, n\}$. Los conjuntos medibles $F_k = \{x : \varphi(x) = k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ permiten representarla canónicamente como
$$\varphi = \sum_{k=0}^{n} k\chi_{F_k} = \sum_{k=1}^{n} k\chi_{F_k}.$$

Por tanto:
$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \int \varphi\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} k\mu(F_k).$$ □

59. Sea g una función medible tal que $g \geq h$, con h integrable. Demostrar que $\int g\, d\mu$ existe en el sentido de la Definición 2.10.

Resolución. Basta advertir que $g \geq h$ implica $g^- \leq h^-$, así que $\int g^-\, d\mu < \infty$. □

60. Sean f una función integrable y g una función medible tales que $|g| \leq k|f|$ c.t.p., donde k es una constante. Probar que g es integrable.

Resolución. Se tiene que
$$\int |g|\, d\mu \leq k \int |f|\, d\mu < \infty.$$ □

61. Sean E, F conjuntos medibles, f integrable sobre E, y $\mu(E \triangle F) = 0$. Demostrar que f es integrable sobre F, con
$$\int_E f\, d\mu = \int_F f\, d\mu.$$

Resolución. Por hipótesis, $f\chi_E$ es integrable. Como $\{x : \chi_E(x) \neq \chi_F(x)\} = E \triangle F$ y $\mu(E \triangle F) = 0$, resulta que $\chi_E = \chi_F$ c.t.p.. Se sigue que $f\chi_F = f\chi_E$ c.t.p., f es integrable sobre F, y $\int_F f\, d\mu = \int_E f\, d\mu$. □

62. *(Desigualdad de Chebyshev)* Sean f una función medible, $A = \{x : f(x) \geq 0\}$, y $c > 0$. Probar que
$$\mu\{x : f(x) > c\} \leq \frac{1}{c} \int_A f\, d\mu.$$

Resolución. Puesto que A es medible y $f\chi_A \geq 0$, la integral de esta función está definida. Sea $C = \{x : f(x) > c\} \subset A$; la integral de $f\chi_C \geq 0$ también está definida, y se verifica que
$$\int_A f\, d\mu \geq \int_C f\, d\mu \geq c\mu(C),$$
como se requería. □

63. Sea f una función integrable. Demostrar que el conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ-finita.

Resolución. Escribimos

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \{x : |f(x)| \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

donde $G_n = \left\{x : |f(x)| > n^{-1}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{1}{n}\mu(G_n) \leq \int_{G_n} |f|\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu < \infty,$$

así que $\mu(G_n) < \infty$. □

64. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables, $g = \limsup_{n\to\infty} f_n$, y $h = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Probar que los conjuntos $G = \{x : g(x) \neq 0\}$ y $H = \{x : h(x) \neq 0\}$ tienen medida σ-finita.

    Resolución. Escribimos $F_n = \{x : f_n(x) \neq 0\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Si $x \in G$, de modo que $g(x) \neq 0$, entonces $f_n(x) \neq 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Es decir, $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde esta unión tiene medida σ-finita (Ejercicio 63). Como los subconjuntos de conjuntos de medida σ-finita tienen medida σ-finita, queda demostrado el resultado para G; la demostración para H es completamente análoga. □

65. Sea $(X, \mathscr{P}(X), \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(\{x\}) = 1$ para cada $x \in X$. Demostrar que f es integrable si, y sólo si, $f = 0$ excepto en una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ con

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i), \tag{13}$$

    donde la serie del segundo miembro es absolutamente convergente y el valor de la integral del primer miembro es independiente de la ordenación de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

    Resolución. $(\Rightarrow)$ Por el Ejercicio 63, el conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ-finita, es decir, puede ser escrito como unión contable de conjuntos de medida finita. La hipótesis de que $\mu(\{x\}) = 1$ para cada $x \in X$ obliga a que los conjuntos de medida finita sean, precisamente, los conjuntos finitos; luego, $\{x : |f(x)| \neq 0\} = \{x : f(x) \neq 0\} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es contable y, por el teorema de Beppo Levi (Teorema 2.7),

$$\int |f|\, d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f\chi_{\{x_i\}}|\right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int |f\chi_{\{x_i\}}|\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|\,\mu(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty, \tag{14}$$

    puesto que f es integrable. Tan pronto se pruebe (13), la convergencia absoluta de la serie del segundo miembro, que acabamos de establecer, garantizará que el valor de la integral del primer miembro es independiente de cualquier reordenación de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ahora bien, la igualdad (13) se sigue del Teorema 2.14: como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int |f\chi_{\{x_i\}}|\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty,$$

    podemos escribir:

$$\int f\, d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f\chi_{\{x_i\}}\right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f\chi_{\{x_i\}}\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\,\mu(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i).$$

    $(\Leftarrow)$ Si $\{x : |f(x)| \neq 0\} = \{x : f(x) \neq 0\} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y se asume que la serie del segundo miembro de (13) es absolutamente convergente entonces se verifica (14), y f es integrable. □

66. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Resolución. Si $\int f\,d\mu < \infty$, basta aplicar convergencia dominada (Teorema 2.13). Si $\int f\,d\mu = \infty$, el lema de Fatou (Teorema 2.4) asegura que

$$\infty = \int f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

así que $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \infty$. □

67. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p.. Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables tales que $|f_n| \leq g_n$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ c.t.p., con g integrable. Demostrar que si

$$\int g\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu,$$

entonces f es integrable y

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu. \tag{15}$$

Resolución. Cada f_n $(n \in \mathbb{N})$ es, claramente, integrable, y como $|f| \leq g$ c.t.p., f también es integrable. Teniendo en mente el Ejercicio 1, construiremos sendas sucesiones de funciones medibles no negativas a las que aplicaremos el lema de Fatou (Teorema 2.4).

A partir de la sucesión $\{g_n - f_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtenemos

$$\int g\,d\mu - \int f\,d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} (g_n - f_n)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n)\,d\mu = \int g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

de donde, puesto que g es integrable,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu. \tag{16}$$

Repitiendo el procedimiento con la sucesión $\{g_n + f_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta

$$\int g\,d\mu + \int f\,d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} (g_n + f_n)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n + f_n)\,d\mu = \int g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

de donde

$$\int f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu. \tag{17}$$

La combinación de (16) y (17) proporciona (15). □

68. Usar el lema de Fatou (Teorema 2.4) para obtener otra resolución del Ejercicio 61 *a*) del Tema 1: si los conjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ son medibles, entonces

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Resolución. Sea $\underline{E} = \liminf_{n\to\infty} E_n$. Se prueba en el Ejercicio 60 del mismo tema que $\chi_{\underline{E}} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{E_n}$. Luego,

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) = \mu(\underline{E}) = \int \chi_{\underline{E}}\,d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} \chi_{E_n}\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int \chi_{E_n}\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

como se requería. □

69. *(Lema de Borel-Cantelli)* Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Probar que casi todo $x \in X$ pertenece, a lo sumo, a un número finito de conjuntos de la sucesión.

Resolución. El conjunto de los puntos de X que pertenecen a una infinidad de E_n no es otro que $E = \limsup_{n\to\infty} E_n$; por tanto, debemos establecer que $\mu(E) = 0$. A tal fin, definimos

$$A_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Claramente,

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset A_k \quad (k \in \mathbb{N}),$$

y, por la subaditividad de μ,

$$\mu(E) \leq \mu(A_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) = 0,$$

probando que $\mu(E) = 0$. □

70. Sean f una función integrable, $\lambda > 0$, y $E_n = \{x : f(x) \geq n\lambda\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Demostrar:

a) $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,d\mu = 0$;

b) $\mu(E_n) = o(n^{-1})$.

Resolución. Pongamos

$$\varphi(E) = \int_E f^+\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}),$$

de modo que φ es una medida finita sobre $\mathscr{S}$ (Teorema 2.8). Se verifica que $E_{n+1} \subset E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\varphi(E_1) < \infty$. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x : f(x) = \infty\}$ tiene μ-medida, y por lo tanto φ-medida, nulas, sigue del Teorema 3.9 del Tema 1 que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Pero

$$\int_{E_n} f\,d\mu = \int_{E_n} f^+\,d\mu = \varphi(E_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

de donde sigue *a*). La desigualdad

$$n\lambda\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f\,d\mu = \varphi(E_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

proporciona *b*). □

71. Sea $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ una función integrable respecto de la medida de Lebesgue, y pongamos $F_n = \{x : f(x/n) \geq n\}$. Probar que para cada x fuera de un conjunto de medida nula, existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{n_i}^c$.

Resolución. El conjunto de los puntos x para los que existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{n_i}^c$, es $\limsup_{n\to\infty} F_n^c$; queremos ver que su complementario $\liminf_{n\to\infty} F_n$ tiene medida nula. A tal fin, por el Ejercicio 68, basta ver que $\liminf_{n\to\infty} m(F_n) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, pongamos $E_n = \{x : f(x) \geq n\}$; se tiene que $F_n = nE_n$, así que, por el Ejercicio 6 del Tema 1, $m(F_n) = n\,m(E_n)$. Pero, en virtud del Ejercicio 70 anterior,

$$\liminf_{n\to\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty} n\,m(E_n) = 0,$$

como se pretendía. □

72. Usar el Teorema 2.8 para demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^y f\,dx = 0$ para todo y con $a \le y \le b$, entonces $f = 0$ c.t.p. en (a,b).

Resolución. La función de conjunto finita

$$\varphi(E) = \int_E f\,dx \quad (E \in \mathscr{M})$$

se anula en los intervalos y, por tanto, en los abiertos. Además, si F es cualquier cerrado en $\mathbb{R}$ contenido en (a,b) entonces $O = (a,b) \setminus F$ es abierto en (a,b), de donde se sigue fácilmente que $\varphi(F) = 0$. Como

$$\varphi(E) = \int_E f^+\,dx - \int_E f^-\,dx \quad (E \in \mathscr{M}),$$

el Teorema 2.8 asegura que φ es contablemente aditiva, probando que esta función también se anula sobre los conjuntos F_σ.

Ahora, dado $E = \{x : f(x) > 0\} \in \mathscr{M}$ existe $P \in \mathscr{F}_\sigma$ tal que $P \subset E$ y $m(E \setminus P) = 0$, de modo que, por el Ejemplo 1.13, $\varphi(E) = \varphi(P) = 0$ implica $m(E) = 0$; es decir, $f \le 0$ c.t.p.. Se establece análogamente que $f \ge 0$ c.t.p.. □

73. Probar que si f es medible y $\mu(X) < \infty$, entonces f es integrable si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x)| \ge n\})$ converge. Enunciar el resultado correspondiente cuando $\mu(X) = \infty$ y cuando la serie se inicia en $n = 0$.

Resolución. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $f \ge 0$. Sean $E_n = \{x : f(x) \ge n\}$, $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea $F_0 = \{x : 0 \le f(x) < 1\}$. Entonces, para cada $1 \le k \le n$, $E_k = \bigcup_{i=k}^n (E_i \setminus E_{i+1}) \cup E_{n+1}$, con unión disjunta, así que

$$\mu(E_k) = \mu(E_{n+1}) + \sum_{i=k}^{n} \mu(F_i).$$

Sumando en k,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = n\,\mu(E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} i\,\mu(F_i). \tag{18}$$

Si f es integrable entonces, por el Ejercicio 70 y la igualdad precedente (nótese que $n\,\mu(E_{n+1}) \le (n+1)\mu(E_{n+1}) \to 0$ cuando $n \to \infty$), se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\mu(F_i).$$

Pero $f \ge n$ sobre F_n y los conjuntos F_n son disjuntos, así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(F_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} f\,d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} f\,d\mu < \infty.$$

Recíprocamente, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Se cumple:

$$\int f\,d\mu = \int_{F_0} f\,d\mu + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{F_i} f\,d\mu \le \mu(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,\mu(F_n) = \mu(X) + \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(F_n).$$

La igualdad (18) implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(F_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

y se concluye que $\int f\,d\mu < \infty$.

Si $\mu(X) = \infty$ y, e.g., $f = 1/2$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$, pero f no es integrable. Si lo es, todavía tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, como antes.

Finalmente, si comenzamos el sumatorio en $n=0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

de modo que el primer miembro converge si, y sólo si, f es integrable y $\mu(X) < \infty$. □

74. Supongamos que $\mu(X) < \infty$ y que f es una función medible. Demostrar que si el límite $\lim_{n\to\infty} \int f^n \, d\mu$ existe y es finito, entonces es igual a $\mu(\{x : f(x) = 1\})$.

Resolución. Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} &E_1 = \{x : f(x) = 1\}, \quad E_2 = \{x : f(x) > 1\}, \quad E_3 = \{x : f(x) = -1\}, \\ &E_4 = \{x : f(x) < -1\}, \quad E_5 = \{x : |f(x)| < 1\}; \end{aligned}$$

se cumple que

$$\int f^n \, d\mu = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{5} \int_{E_i} f^n \, d\mu. \tag{19}$$

Si $\mu(E_2) > 0$, la sucesión definida por las integrales $\int_{E_2} f^n \, d\mu$ $(n \in \mathbb{N})$ tiene límite ∞. En efecto, $E_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > 1 + k^{-1}\}$, así que $\mu(E_2) > 0$ sólo si alguno de los conjuntos $\{x : f(x) > 1 + k^{-1}\}$ tiene medida positiva; escribiendo $\delta = k^{-1}$ y $F = \{x : f(x) > 1 + \delta\} \subset E_2$, encontramos que $\mu(F) > 0$ implica

$$\int_{E_2} f^n \, d\mu \geq (1+\delta)^n \mu(F) \to \infty$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, asumiendo que el límite del primer miembro de (19) existe y es finito, necesariamente debemos tener $\mu(E_2) = 0$.

Si $\mu(E_3) > 0$ y $\mu(E_4) > 0$, entonces $\int_{E_3} f^n \, d\mu = (-1)^n \mu(E_3)$ oscila entre $\pm\mu(E_3)$, mientras que

$$\int_{E_4} f^n \, d\mu = (-1)^n \int_{E_4} |f|^n \, d\mu,$$

con $|f| > 1$ sobre E_4, oscila entre $\pm\infty$, como se prueba aplicando el mismo argumento anterior a $|f|$ y E_4 en vez de f y E_2. De nuevo, para que el límite del sumatorio del segundo miembro de (19) exista y sea finito, debemos tener $\mu(E_3) = \mu(E_4) = 0$.

Puesto que, por convergencia dominada (Teorema 2.13), es $\lim_{n\to\infty} \int_{E_5} f^n \, d\mu = 0$, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \int f^n \, d\mu = \mu(E_1) = \mu(\{x : f(x) = 1\}).$$ □

75. Sea E un conjunto medible, y sea $f > 0$, integrable sobre E. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^{1/n} \, d\mu = \mu(E).$$

Resolución. Se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^{1/n} = 1$. Pongamos $E_1 = \{x : f(x) \geq 1\}$, $E_2 = \{x : 0 < f(x) < 1\}$. Aplicando convergencia dominada (Teorema 2.13: $f \leq f^n$, $n \in \mathbb{N}$) a la integral sobre $E \cap E_1$ obtenemos como límite $\mu(E \cap E_1)$, mientras que aplicando convergencia monótona (Teorema 2.5: $f^{n+1} \leq f^n$, $n \in \mathbb{N}$) a la integral sobre $E \cap E_2$, se obtiene el límite $\mu(E \cap E_2)$. □