Tema 4: Medidas signadas
Problemas resueltos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Medidas signadas y la descomposición de Hahn

1. Sea $\nu(E) = \int_E xe^{-x^2}\,dx$. ¿Cuáles son los conjuntos positivos, negativos y nulos con respecto a ν? Encontrar una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ respecto de ν.

   Resolución. Sea $f(x) = xe^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Se tiene que ν es una medida signada en el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ (Ejemplo 1.2), y que los conjuntos $\{x : f(x) \geq 0\} = [0,\infty)$, $\{x : f(x) < 0\} = (-\infty, 0)$ constituyen una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ en un conjunto ν-positivo y otro ν-negativo, respectivamente (Ejemplo 2.5). Ahora, A es ν-positivo si, y sólo si, $m(A \cap (-\infty, 0)) = 0$; B es ν-negativo si, y sólo si, $m(B \cap (0,\infty)) = 0$; C es ν-nulo si, y sólo si, $m(C) = 0$. En efecto, caractericemos los conjuntos positivos.

   $(\Rightarrow)$ Si A es ν-positivo entonces, por definición y en particular, $\nu(A \cap (-\infty, 0)) \geq 0$. Como $(-\infty, 0)$ es ν-negativo, también por definición, $\nu(A \cap (-\infty, 0)) \leq 0$. Luego, $\nu(A \cap (-\infty, 0)) = 0$, esto es,

   $$\int_{A\cap(-\infty,0)} f\,dx = \int f\chi_{A\cap(-\infty,0)}\,dx = 0.$$

   Como el integrando $f\chi_{A\cap(-\infty,0)}$ tiene signo constante (negativo), el Ejemplo 1.13 del Tema 2 implica que $f\chi_{A\cap(-\infty,0)} = 0$ c.t.p. $[m]$, es decir, que el conjunto $\{x \in A \cap (-\infty, 0) : f(x) \neq 0\} = A \cap (-\infty, 0)$ tiene m-medida nula.

   $(\Leftarrow)$ Si $m(A \cap (-\infty, 0)) = 0$ y $E \subset A$ es medible entonces, por monotonía, $m(E \cap (-\infty, 0)) = 0$, lo que obliga a que $\nu(E \cap (-\infty, 0)) = 0$, de modo que $\nu(E) = \nu(E \cap [0,\infty)) \geq 0$.

   La caracterización de los conjuntos ν-negativos se establece análogamente, y la de los conjuntos ν-nulos es consecuencia inmediata de las dos anteriores. □

2. Demostrar que si en el Teorema 1.10 se supone $\nu(E) < \infty$, se obtiene $0 < \nu(A) < \infty$.

   Resolución. Si el proceso de obtención de la sucesión $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ se detiene en algún n_m, tomamos $E_k = \emptyset$ para $k \geq n_m + 1$. Por la ecuación (1) se tiene entonces que

   $$\nu(E) = \nu(A) + \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right),$$

   y argumentando como en la demostración del teorema, que

   $$-\infty < \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < 0.$$

   Luego, $\nu(A) = \infty$ implicaría $\nu(E) = \infty$. □

3. Dar un ejemplo que muestre que la descomposición de Hahn no es única.

   Resolución. Tomamos $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{S} = \mathscr{M}$, $\nu(E) = \int_E f\,dx$, donde $f(x) = xe^{-x}$ $(|x| > 1)$, $f(x) = 0$ $(|x| \leq 1)$. Entonces $(-\infty, a)$, $[a,\infty)$ es una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ respecto de ν, cualquiera que sea a tal que $|a| \leq 1$. □

4. Dada cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y cualquier conjunto $E \subset \mathbb{N}$, sea $\nu(E)$ la suma, si existe, de los términos correspondientes de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Qué sucesiones se asocian con medidas signadas sobre $\mathbb{N}$? Probar que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una de estas sucesiones y $|a_n| > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, la descomposición de Hahn de $\mathbb{N}$ con respecto a ν es única.

   Resolución. Trabajamos en el espacio medible $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$; simbólicamente,

   $$\nu(E) = \sum_{n\in E} a_n \quad (E \subset \mathbb{N}),$$

   siempre que la suma exista. Nótese que esta construcción de ν se corresponde con la discretización del Ejemplo 1.2: si se considera sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ la medida cardinal μ_c y se define la función a sobre $\mathbb{N}$ por $a(n) = a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces la condición de que $\int a\,d\mu_c$ exista equivale a que

$$\int a^+ d\mu_c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ < \infty \quad \text{ó} \quad \int a^- d\mu_c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- < \infty,$$

donde

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

En tal caso,

$$\nu(E) = \int_E a\,d\mu_c = \sum_{n\in E} a_n \quad (E \subset \mathbb{N})$$

está bien definida, y

$$\nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E a^+\,d\mu_c - \int_E a^-\,d\mu_c = \sum_{n\in E} a_n^+ - \sum_{n\in E} a_n^- \quad (E \subset \mathbb{N})$$

es la descomposición de Jordan de ν (cf. Ejemplo 2.5).

Para un conjunto ν-positivo $A \subset \mathbb{N}$ se tiene, en particular, $\nu(\{n\}) = a_n \geq 0$ cualquiera que sea $n \in A$. Similarmente, para un conjunto ν-negativo $B \subset \mathbb{N}$ se tiene $a_n \leq 0$ cualquiera que sea $n \in B$. Esto quiere decir que para un conjunto ν-nulo $C \subset \mathbb{N}$, se tiene $a_n = 0$ cualquiera que sea $n \in C$. Por tanto, si $|a_n| > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y si P_1, N_1 y P_2, N_2 son dos descomposiciones de Hahn de $\mathbb{N}$ respecto de ν, con P_i ν-positivo y N_i ν-negativo $(i = 1, 2)$, que $P_1 \triangle P_2$ sea ν-nulo (Teorema 1.11) implica $P_1 \triangle P_2 = \emptyset$, así que $P_1 = P_2$ (y, consecuentemente, $N_1 = N_2$). □

5. Sea ν una medida signada y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, tales que $|\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)| < \infty$. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ es absolutamente convergente.

Resolución. Análogamente al Ejercicio 4, usando la condición de finitud que se proporciona, obtenemos que la suma de los términos positivos en $\{\nu(E_i)\}_{i=1}^{n}$ es finita y que la de los términos negativos también es finita, como se requiere:

$$-\infty < \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^- < \infty$$

implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^+ < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^- < \infty,$$

así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^- < \infty.$$

Nótese que la expresión precedente no coincide con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^+(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^-(E_n).$$

Es decir, dado $E \in \mathscr{S}$ es, en general, falso que $\nu(E)^+ = \nu^+(E)$. Por ejemplo, para la medida signada ν definida por $\nu(E) = \int_E f\,dx$ $(E \in \mathscr{M})$, donde $f(x) = xe^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$, y el conjunto medible Lebesgue $E = (-1, 1)$, se tiene

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ dx = \int_{-1}^{1} f\chi_{[0,\infty)}\,dx = \int_0^1 f\,dx = -e^{-x}(1+x)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e};$$

pero $\nu(E)^+ = \max\{\nu(E), 0\} = 0$, porque

$$\nu(E) = \int_E f\,dx = \int_{-1}^{1} f\,dx = -e^{-x}(1+x)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{e}.$$

Similarmente,

$$\nu^-(E) = \nu^+(E) - \nu(E) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + \frac{2}{e} = 1,$$

mientras que $\nu(E)^- = \max\{-\nu(E), 0\} = 2/e$. Sin embargo, se verifica, como cabía esperar, que $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$, por cuanto

$$\begin{aligned} |\nu(E)| &= \nu(E)^+ + \nu(E)^- = \frac{2}{e}, \\ |\nu|(E) &= \nu^+(E) + \nu^-(E) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1 = 2 - \frac{2}{e}, \end{aligned}$$

con $2/e < 2 - 2/e$, o, equivalentemente, $2 < e$. □

6. Probar que si ν es una medida signada y F, E conjuntos medibles tales que $F \subset E$, entonces $|\nu(E)| < \infty$ implica $|\nu(F)| < \infty$.

   Resolución. La condición (i) de la Definición 1.1 impide que alguno de los términos del segundo miembro de la igualdad $\nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F)$ sea infinito. □

7. Demostrar que si ν es una medida signada y $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ son medibles, entonces $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_i)$.

   Resolución. Puesto que la unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (E_i \setminus E_{i-1})$ está compuesta por conjuntos disjuntos dos a dos, se tiene

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \nu(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \nu(E_i \setminus E_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \left[\nu(E_1) + \sum_{i=2}^{n} \nu(E_i \setminus E_{i-1})\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n), \end{aligned}$$

   y este límite existe, aunque puede ser infinito. □

8. Probar que si ν es una medida signada y $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ son medibles, con $|\nu(E_1)| < \infty$, entonces

$$\nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_i).$$

   Resolución. El conjunto E_1 puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos medibles:

$$E_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_i);$$

   en efecto:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_i) &= \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \left(E_1 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \left[E_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right] \\ &= \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \left(E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = E_1. \end{aligned}$$

   Por otra parte, el Ejercicio 6 garantiza que $\nu(E_1 \setminus E_i) = \nu(E_1) - \nu(E_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Aplicando ahora el Ejercicio 7 encontramos que

$$\nu(E_1) = \nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \lim_{i\to\infty} \nu(E_1 \setminus E_i) = \nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \nu(E_1) - \lim_{i\to\infty} \nu(E_i).$$

   Puesto que $|\nu(E_1)| < \infty$, se obtiene el resultado. □

2 La descomposición de Jordan

9. Demostrar que si ν_1, ν_2 y μ son medidas y $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \perp \mu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

Resolución. Existen conjuntos A, B tales que $\mu(A) = \nu_1(A^c) = \mu(B) = \nu_2(B^c) = 0$. Luego,

$$\mu(A \cup B) = (\nu_1 + \nu_2)\left((A \cup B)^c\right) = 0.$$

En efecto: por un lado, la unión finita de conjuntos de medida nula tiene medida nula; y, por otro,

$$0 \leq (\nu_1 + \nu_2)\left((A \cup B)^c\right) = \nu_1\left(A^c \cap B^c\right) + \nu_2\left(A^c \cap B^c\right) \leq \nu_1\left(A^c\right) + \nu_2\left(B^c\right) = 0. \qquad \square$$

10. Sean $(X, \mathscr{S})$ un espacio medible y $E \in \mathscr{S}$. Si $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$, donde $\int f\, d\mu$ existe, ¿quién es $|\nu|(E)$?

Resolución. Por el Ejemplo 2.5,

$$\nu^+(E) = \int_E f^+\, d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^-\, d\mu,$$

y por la Definición 2.6,

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \int_E f^+\, d\mu + \int_E f^-\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu. \qquad \square$$

11. Probar que si la medida signada ν sólo toma valores finitos, entonces

$$\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu), \quad \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu).$$

Resolución. Es obvio a partir de la descomposición de Jordan (Teorema 2.3): $\nu = \nu^+ - \nu^-$, y la Definición 2.6: $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. Nótese que si ν toma valores finitos, la medida $|\nu|$ también es finita (Ejemplo 2.8), y no hay riesgo de indeterminación al sumarlas o restarlas. $\square$

12. Sea ν una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathscr{S})$. Verificar que

$$\nu^+(E) = \max\{\nu(U) : U \in \mathscr{S},\, U \subset E\}, \quad \nu^-(E) = -\min\{\nu(U) : U \in \mathscr{S},\, U \subset E\} \qquad (E \in \mathscr{S}).$$

En particular, ν^+ y ν^- son independientes de la descomposición de Hahn que se use para definirlas.

Resolución. Sea A, B una descomposición de Hahn de X respecto de ν. Sean $E, U \in \mathscr{S}$, con $U \subset E$. Se tiene que

$$\nu(U) = \nu^+(U) - \nu^-(U) \leq \nu^+(U) \leq \nu^+(E);$$

por tanto,

$$\sup\{\nu(U) : U \in \mathscr{S},\, U \subset E\} \leq \nu^+(E).$$

Como (demostración del Teorema 2.3) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A)$, basta particularizar $U = E \cap A$ para obtener el resultado relativo a la variación positiva. La prueba del correspondiente a la variación negativa es similar:

$$\nu(U) = \nu^+(U) - \nu^-(U) \geq -\nu^-(U) \geq -\nu^-(E),$$

o bien $-\nu(U) \leq \nu^-(E)$, con $\nu^-(E) = -\nu(E \cap B)$. De aquí resulta

$$\nu^-(E) = \max\{-\nu(U) : U \in \mathscr{S},\, U \subset E\},$$

expresión equivalente a la que se buscaba. $\square$

13. Demostrar que $|\nu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)|$, donde el supremo se toma sobre todas las familias finitas $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, tales que $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Este resultado justifica la denominación «variación total» en la Definición 2.6.

    Resolución. Sea A, B una descomposición de Hahn con respecto a ν. Entonces

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \nu(E \cap A) - \nu(E \cap B) = |\nu(E \cap A)| + |\nu(E \cap B)| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)|,$$

por cuanto $\{E \cap A, E \cap B\}$ constituye una partición de E. Inversamente, puesto que $|\nu|$ es una medida,

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| \leq \sup \sum_{i=1}^{n} |\nu|(E_i) = |\nu|\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = |\nu|(E).$$ □

14. Probar que la descomposición de Jordan es minimal en el sentido siguiente: si ν es una medida signada y $\nu = \nu_1 - \nu_2$, donde ν_1 y ν_2 son medidas, entonces $|\nu| \leq \nu_1 + \nu_2$, con igualdad si, y sólo si, $\nu_1 = \nu^+$ y $\nu_2 = \nu^-$.

    Resolución. Supongamos que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es la descomposición de Jordan de ν, y que A, B es la descomposición de Hahn asociada. Dado $E \in \mathscr{S}$, escribamos $E_1 = E \cap A$, $E_2 = E \cap B$. Entonces $\nu^-(E_1) = 0$, y por lo tanto

$$\nu_2(E_1) \geq \nu^-(E_1);$$

como $\nu_1 - \nu^+ = \nu_2 - \nu^-$, sigue que

$$\nu_1(E_1) \geq \nu^+(E_1).$$

Similarmente, $\nu^+(E_2) = 0$ implica

$$\nu_1(E_2) \geq \nu^+(E_2),$$

lo que, junto con la igualdad $\nu_1 - \nu^+ = \nu_2 - \nu^-$, proporciona

$$\nu_2(E_2) \geq \nu^-(E_2).$$

Luego,

$$\nu^+(E) = \nu^+(E_1) + \nu^+(E_2) \leq \nu_1(E_1) + \nu_1(E_2) = \nu_1(E),$$

y también

$$\nu^-(E) = \nu^-(E_1) + \nu^-(E_2) \leq \nu_2(E_1) + \nu_2(E_2) = \nu_2(E).$$

De la arbitrariedad de $E \in \mathscr{S}$ se concluye que $|\nu| = \nu^+ + \nu^- \leq \nu_1 + \nu_2$.

Para la igualdad necesitamos que $\nu^+(E) + \nu^-(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E)$ cualquiera que sea $E \in \mathscr{S}$. Puesto que $\nu^+ \leq \nu_1$ y $\nu^- \leq \nu_2$, se debe tener $\nu_1 = \nu^+$ y $\nu_2 = \nu^-$:

$$0 \leq \nu_2(E) - \nu^-(E) = \nu^+(E) - \nu_1(E) \leq 0 \quad (E \in \mathscr{S}).$$

La suficiencia de esta condición es evidente. □

3 El teorema de Radon-Nikodým

15. Sean μ, ν medidas sobre la misma σ-álgebra tales que $\mu \ll \nu$. Demostrar que si una proposición P se verifica c.t.p. $[\nu]$, entonces P también se verifica c.t.p. $[\mu]$. Además, si la medida μ es completa, también lo es ν.

Resolución. Obvio: respecto al primer enunciado, basta tener en cuenta que ν-medida nula implica μ-medida nula; respecto al segundo, como todo conjunto de ν-medida nula tiene μ-medida nula, es medible. $\square$

16. Dar un ejemplo que muestre que en la Definición 3.2, las condiciones $|\mu|(E)=0$ y $\mu(E)=0$ no son equivalentes.

Resolución. Como $|\mu(E)|\le|\mu|(E)$, es cierto que $|\mu|(E)=0$ implica $\mu(E)=0$. Veamos que el recíproco puede ser falso. Sea $X=[0,1]$ y sea μ dada por $\mu(E)=\int_E f\,dx$ para cualquier conjunto medible Lebesgue $E\subset[0,1]$, donde $f=1$ sobre $[0,1/2)$ y $f=-1$ sobre $[1/2,1]$, esto es, $f=\chi_{[0,1/2)}-\chi_{[1/2,1]}$. Entonces $|\mu|=m$, de modo que $|\mu|(E)=0$ implica $m(E)=0$:

$$\begin{aligned}|\mu|(E)&=\int_E f^+\,dx+\int_E f^-\,dx=\int_{E\cap[0,1/2)}dx+\int_{E\cap[1/2,1)}dx\\&=m(E\cap[0,1/2))+m(E\cap[1/2,1))\\&=m(E)\quad(E\in\mathscr{S});\end{aligned}$$

pero $\mu(E)=0$ no implica $m(E)=0$ si $E=(1/2-\alpha,1/2+\alpha)$, $0<\alpha\le 1/2$:

$$\begin{aligned}&\mu(E)=\int_E f^+\,dx-\int_E f^-\,dx=m((1/2-\alpha,1/2))-m([1/2,1/2+\alpha))=\alpha-\alpha=0,\\&m(E)=2\alpha>0.\end{aligned}$$

$\square$

17. Encontrar dos medidas μ y ν, sobre el mismo espacio medible, para las que no se verifiquen ninguna de las relaciones $\mu\ll\nu$, $\nu\ll\mu$, $\mu\perp\nu$.

Resolución. Tómese, por ejemplo, $X=\mathbb{R}$, $\mathscr{S}=\mathscr{M}$,

$$\mu(E)=\int_{[0,\infty)\cap E}e^{-x^2}\,dx,\qquad \nu(E)=\int_{(-\infty,1)\cap E}e^{-x^2}\,dx\qquad(E\in\mathscr{M}).$$

No se verifica $\mu\ll\nu$:

$$\nu([1,\infty))=\int_{(-\infty,1)\cap[1,\infty)}e^{-x^2}\,dx=0,\qquad \mu([1,\infty))=\int_{[0,\infty)\cap[1,\infty)}e^{-x^2}\,dx=\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx>0.$$

No se verifica $\nu\ll\mu$:

$$\mu((-\infty,0))=\int_{[0,\infty)\cap(-\infty,0)}e^{-x^2}\,dx=0,\qquad \nu((-\infty,0))=\int_{(-\infty,1)\cap(-\infty,0)}e^{-x^2}\,dx=\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx>0.$$

No se verifica $\mu\perp\nu$: supongamos existe $A\in\mathscr{M}$ tal que $\nu(A)=\mu(A^c)=0$; entonces

$$\begin{aligned}0&\le\int_{(0,1)\cap A}e^{-x^2}\,dx\le\int_{(-\infty,1)\cap A}e^{-x^2}\,dx=0,\\0&\le\int_{(0,1)\cap A^c}e^{-x^2}\,dx\le\int_{[0,\infty)\cap A^c}e^{-x^2}\,dx=0\end{aligned}$$

implica

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx=\int_{(0,1)\cap A}e^{-x^2}\,dx+\int_{(0,1)\cap A^c}e^{-x^2}\,dx=0,$$

una contradicción. $\square$

18. Sea $x_0\in(0,1)$, y para cada conjunto medible Lebesgue $E\subset[0,1]$, defínase $\nu(E)=\chi_E(x_0)$. Probar que ν es una medida que no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

Resolución. Se comprueba directamente que ν es una medida:

$$\nu(\emptyset) = \chi_\emptyset(x_0) = 0,$$
$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i),$$

donde $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de subconjuntos medibles Lebesgue de $[0,1]$, disjuntos dos a dos. Puesto que $\nu(\{x_0\}) = 1$ y $m(\{x_0\}) = 0$, encontramos que $\nu \not\ll m$. □

19. Demostrar que si μ y ν son medidas sobre la misma σ-álgebra $\mathscr{S}$ tales que $\nu \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$, entonces ν es idénticamente nula.

    Resolución. Sigue inmediatamente de las Definiciones 2.1 y 3.1. En efecto: si $\nu \perp \mu$, existe $A \in \mathscr{S}$ tal que $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$; como $\nu \ll \mu$, se tiene que $\nu(A) = \nu(A^c) = 0$. Consecuentemente, $\nu(X) = 0$ y, por monotonía, $\nu \equiv 0$. □

20. Probar que si $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ para cada $E \in \mathscr{S}$, donde f es no negativa y medible, y $f = \infty$ en un conjunto de μ-medida positiva, entonces ν no es σ-finita.

    Resolución. Supongamos que X se puede escribir como unión de una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos de ν-medida finita. Sea F el conjunto donde f es infinita, de modo que $\mu(F) > 0$. Entonces $F = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F \cap X_n)$, con $\nu(F \cap X_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\mu(F \cap X_m) > 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como todo conjunto medible $E \subset F$ tiene ν-medida 0 ó ∞, según que $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E) > 0$, necesariamente $\nu(F \cap X_m) = \infty$, lo que proporciona la contradicción esperada. □

21. Demostrar que la condición de que ν sea σ-finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.

    Resolución. Supongamos que $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ $(E \in \mathscr{S})$, donde f es medible no negativa y finita, y que μ es σ-finita. Entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, con $\mu(X_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$, y también $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$, donde $Y_m = \{x : f(x) \leq m\}$ $(m \in \mathbb{N})$. Así, $X = \bigcup_{m,n=1}^{\infty}(X_n \cap Y_m)$, y puesto que

    $$\nu(X_n \cap Y_m) \leq m\,\mu(X_n) < \infty \quad (n,m \in \mathbb{N}),$$

    resulta que ν es σ-finita. Por tanto, la tesis del teorema para ν obliga a que ν sea σ-finita. Nótese que el Ejercicio 20 muestra que ν puede no ser σ-finita aunque $\nu \ll \mu$ y μ sea σ-finita. □

22. Probar que la condición de que μ sea σ-finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.

    Resolución. Sea X tal que $\#X > \aleph_0$, y sea $\mathscr{S} = \{E : \#E \leq \aleph_0 \text{ ó } \#E^c \leq \aleph_0\}$. Nótese que las dos condiciones que definen los conjuntos medibles son mutuamente excluyentes, porque X es incontable. El par $(X,\mathscr{S})$ es un espacio medible; en efecto:

    (i) Claramente, $X \in \mathscr{S}$.

    (ii) Si $E \in \mathscr{S}$, entonces $\#E^c \leq \aleph_0$ ó $\#(E^c)^c \leq \aleph_0$, así que $E^c \in \mathscr{S}$.

    (iii) Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{S}$ entonces, o bien $\#E_n \leq \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien $\#E_m^c \leq \aleph_0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. En el primer caso, $\#\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \leq \aleph_0$. En el segundo, $\#\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c = \#\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c \leq \#E_m^c \leq \aleph_0$. En ambos, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}$.

    La medida cardinal $\mu = \mu_c$ no es σ-finita en este espacio, porque X no es contable. Definamos sobre $\mathscr{S}$ la medida ν por

    $$\nu(E) = \begin{cases} 0, & \#E \leq \aleph_0 \\ 1, & \#E^c \leq \aleph_0 \end{cases} \qquad (E \in \mathscr{S}).$$

Se comprueba sin dificultad que ν es, en efecto, una medida (denominada *medida co-contable*). En primer lugar, $\#\emptyset = 0 \le \aleph_0$ implica $\nu(\emptyset) = 0$. En segundo lugar, sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ cualquier sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos. Si $\#E_n \le \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, necesariamente $\#\bigcup_{n=1}^\infty E_n \le \aleph_0$, así que

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).$$

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\#E_m^c \le \aleph_0$, entonces $\#\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)^c = \#\bigcap_{n=1}^\infty E_n^c \le \#E_m^c \le \aleph_0$, así que $\nu(E_m) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 1$. Además, cuando $n \ne m$ la inclusión $E_n \subset E_m^c$ implica $\#E_n \le \aleph_0$, y $\nu(E_n) = 0$. Se concluye que

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 1 = \nu(E_m) = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).$$

La medida ν es σ-finita, porque es finita. Además, dado que el único elemento de $\mathscr{S}$ con μ-medida nula es el conjunto vacío, resulta que $\nu \ll \mu$. Supongamos que existe f tal que $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ para cada $E \in \mathscr{S}$; entonces

$$0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f\,d\mu = f(x) \quad (x \in X),$$

esto es, $f \equiv 0$, así que $\nu \equiv 0$. Pero $\nu(X) = 1$. □

4 Algunas aplicaciones del teorema de Radon-Nikodým

23. En el caso particular de que μ sea σ-finita, aplicar el Teorema 3.5 para demostrar el Teorema 4.1.

    Resolución. Como en la prueba del Teorema 4.1, apelando a los Ejemplos 3.3 y 2.8 podemos suponer que μ y ν son medidas (positivas). Entonces, por el Teorema 3.5, se tiene

    $$\nu(E) = \int_E f\,d\mu \quad (E \in \mathscr{S}),$$

    donde $f \ge 0$ es medible. Aplicamos el Teorema 2.8 del Tema 2. □

24. Sean $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones de números positivos tales que $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n > 0$, y sean μ, ν las medidas definidas sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ por $\mu(\{n\}) = a_n$, $\nu(\{n\}) = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Probar que $\nu \ll \mu$, pero que no se verifica la tesis del Teorema 4.1.

    Resolución. Hay que encontrar $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $E \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ con $\mu(E) < \delta$ y $\nu(E) \ge \varepsilon$. Elíjase una subsucesión $\{a_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ tal que $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = 0$. Entonces $\lim_{i\to\infty} \mu(\{n_i\}) = 0$, es decir, dado $\delta > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $i \ge m$ implica $\mu(\{n_i\}) < \delta$, pero $\nu(\{n_i\}) \ge \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \varepsilon > 0$ $(i \in \mathbb{N})$; así pues, la tesis del Teorema 4.1 no se verifica, por ejemplo, para $E = \{n_m\}$. Sin embargo, $\nu \ll \mu$: como $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ se compone de números positivos, el único conjunto de μ-medida nula es el vacío.

    La razón por la que no se cumple la tesis del Teorema 4.1 es que ν no es finita: la condición $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n > 0$ impide que el término general de la serie $\nu(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^\infty b_n$ tienda a cero. □

25. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^1(\mu)$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta$ implica

    $$\int_E |f_n|\,d\mu < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Resolución. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int |f_n - f_m| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n, m \geq n_0).$$

El Teorema 2.8 del Tema 2 asegura que, para este n_0, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta$ implica

$$\int_E |f_n| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (n = 1, \ldots, n_0).$$

Luego, si $\mu(E) < \delta$ y $n > n_0$, también tenemos

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| \, d\mu &\leq \int_E |f_{n_0}| \, d\mu + \int_E |f_n - f_{n_0}| \, d\mu \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int |f_n - f_{n_0}| \, d\mu \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

26. Probar que si μ y ν son medidas signadas σ-finitas y $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$, se cumple que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1} \quad [|\mu|].$$

Resolución. Descomponiendo X en cuatro conjuntos como en el Teorema 4.8 y combinando los resultados, podemos suponer que μ y ν son medidas. Sea f tal que

$$\mu(E) = \int_E f \, d\nu \quad (E \in \mathscr{S}).$$

Puesto que $\nu \ll \mu$, resulta que $\{x : f(x) = 0\}$ tiene medida nula con respecto a μ y ν, así que $1/f = (d\mu/d\nu)^{-1}$ está definida c.t.p.. El Teorema 4.7 asegura que $f(d\nu/d\mu) = d\mu/d\mu = 1$ $[\mu]$, y, consecuentemente, $d\nu/d\mu = (d\mu/d\nu)^{-1}$ $[\mu]$. □

27. Sean $\mathscr{M}$ y m, respectivamente, la σ-álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\nu(E) = \int_E f \, dx \quad (E \in \mathscr{M}),$$

donde $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Verificar que

$$\frac{dm}{d\nu} = 1 + x^2 \quad [\nu].$$

Resolución. Este resultado puede ser deducido inmediatamente del Ejercicio 26, una vez se pruebe que m, ν son σ-finitas, con $m \ll \nu$ y $\nu \ll m$. Pero, en efecto, la medida m es σ-finita porque $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$, donde cada intervalo tiene medida finita $2n$ $(n \in \mathbb{N})$. Por otra parte, la medida ν es positiva y finita (luego, σ-finita). Es claro que $\nu \ll m$. También se tiene que $m \ll \nu$ ya que, al ser $f > 0$, si $E \in \mathscr{M}$ y $\nu(E) = 0$, necesariamente $m(E) = 0$.

No obstante lo anterior, daremos una segunda resolución. En las condiciones anteriores, el teorema de Radon-Nikodým proporciona una función medible, no negativa y finita $g = dm/d\nu$, tal que

$$m(E) = \int_E g \, d\mu \quad (E \in \mathscr{M}).$$

Supongamos que $\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, con $a_i > 0$ y $A_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_E \psi\, dx &= \int_E \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \right) dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{E\cap A_i} dx = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{E\cap A_i} g\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_E \chi_{A_i} g\, d\nu = \int_E \psi g\, d\nu \quad (E \in \mathscr{M}). \end{aligned} \tag{1}$$

El teorema de aproximación de Lebesgue permite escribir la función medible no negativa f como límite puntual de una sucesión no decreciente de funciones simples medibles $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces fg es el límite puntual de la sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas $\{\psi_n g\}_{n=1}^{\infty}$. Aplicamos a ambas sucesiones el teorema de la convergencia monótona y (1), para obtener:

$$\nu(E) = \int_E f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n\, g\, d\nu = \int_E f\, g\, d\nu \quad (E \in \mathscr{M}).$$

Tenemos ahora

$$\nu(E) = \int_E fg\, d\nu = \int_E d\nu \quad (E \in \mathscr{M}).$$

La afirmación de unicidad del teorema de Radon-Nikodým obliga a que $fg = 1$ $[\nu]$, así que $g(x) = 1 + x^2$ $[\nu]$ (o, equivalentemente, $[m]$). □

28. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 1 \\ 0, & x > 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

sean ν, μ las medidas definidas sobre $\mathscr{M}$ por

$$\nu(E) = \int_E f\, dx, \qquad \mu(E) = \int_E g\, dx \qquad (E \in \mathscr{M}).$$

Encontrar la descomposición de Lebesgue de ν con respecto a μ.

Resolución. Antes que nada, observemos que todas las medidas que se consideran a continuación son σ-finitas.

La descomposición que se pide va a ser $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap (-\infty, 0]), \quad \nu_1(E) = \nu(E \cap (0, \infty)) \qquad (E \in \mathscr{M}).$$

En efecto, siguiendo la demostración del teorema de descomposición de Lebesgue (Teorema 4.10), tratamos de hallar $d\mu/d\lambda$, donde $\lambda = \nu + \mu$. Puesto que ν y μ son absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue m, el Teorema 4.4 implica

$$\frac{d\lambda}{dm} = \frac{d\nu}{dm} + \frac{d\mu}{dm} = f + g = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ x^2 + \sqrt{1-x}, & 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases} \quad [m].$$

Además, $m \ll \lambda$, porque

$$\lambda(E) = \int_E (f+g)\, dx = 0,$$

con $f + g > 0$, obliga a que $m(E) = 0$. Como $\mu \ll m \ll \lambda$ y, obviamente, $\lambda \ll m$, podemos aplicar el Teorema 4.7 y el Ejercicio 26 para escribir

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{dm}\frac{dm}{d\lambda} = \frac{d\mu}{dm}\left(\frac{d\lambda}{dm}\right)^{-1} = g\left(\frac{d\lambda}{dm}\right)^{-1} \quad [\lambda].$$

En la notación de la prueba del Teorema 4.10, es claro ahora que

$$A = \{x : g(x) > 0\} = (0, \infty), \qquad B = \{x : g(x) = 0\} = (-\infty, 0].$$

Finalmente, de acuerdo con dicha prueba, definimos $\nu_0(E) = \nu(E \cap B)$, $\nu_1(E) = \nu(E \cap A)$ $(E \in \mathscr{S})$, de modo que $\nu = \nu_0 + \nu_1$ es la descomposición buscada. □

29. Demostrar que el conjunto D que comparece en el Ejemplo 4.11 es contable.

Resolución. Puesto que ν_0 es σ-finita, $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, con $\nu_0(D_i) < \infty$ $(i \in \mathbb{N})$. Ahora bien, fijado $i \in \mathbb{N}$,

$$D_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in D_i : \nu_0(\{x\}) > n^{-1}\right\},$$

y cada conjunto de esta unión es finito; pues si, para algún $m \in \mathbb{N}$, $\left\{x \in D_i : \nu_0(\{x\}) > m^{-1}\right\}$ contuviese una sucesión infinita $S = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, resultaría la contradicción

$$\nu_0(D_i) \geq \nu_0(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_0(\{x_j\}) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

Se concluye que D es contable. □

30. Probar el teorema de descomposición de Lebesgue (Teorema 4.10) directamente, sin recurrir al teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5), usando, como en el teorema de descomposición de Hahn (Teorema 1.11), una sucesión de conjuntos que maximice ν para obtener el conjunto B que interviene en la demostración.

Resolución. Un argumento estándar permite reducir la demostración al caso en que ν es finita: suponiendo probado este caso, si ν es σ-finita, escribimos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ como unión de conjuntos medibles, de ν-medida finita, disjuntos dos a dos, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\lambda_n(E) = \nu(E \cap X_n)$ $(E \in \mathscr{S})$. Como λ_n es finita, podemos descomponer $\lambda_n = \lambda_n' + \lambda_n''$, con $\lambda_n' \perp \mu$ y $\lambda_n'' \ll \mu$. Definiendo

$$\nu_0(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n'(E), \quad \nu_1(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n''(E) \qquad (E \in \mathscr{S})$$

encontramos que $\nu_0 \perp \mu$, $\nu_1 \ll \mu$, y $\nu = \nu_0 + \nu_1$.

Abordemos, pues, el caso finito. Sean

$$\mathscr{V} = \{E \in \mathscr{S} : \mu(E) = 0\}, \quad \alpha = \sup_{E \in \mathscr{V}} \nu(E) \leq \nu(X) < \infty,$$

y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{V}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = \alpha$. Si $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $B \in \mathscr{V}$ y $\nu(B) = \alpha$, por cuanto

$$\alpha \geq \nu(B) \geq \nu(E_n) \longrightarrow \alpha \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Dado $E \in \mathscr{V}$ se tiene que $E \cup B \in \mathscr{V}$, así que $\alpha = \nu(B) \leq \nu(E \cup B) \leq \alpha$ implica

$$\alpha = \nu(E \cup B) = \nu(E \setminus B) + \nu(B) = \nu(E \setminus B) + \alpha,$$

obligando, puesto que α es finito, a que $\nu(E \setminus B) = 0$. Escribimos

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap B), \quad \nu_1(E) = \nu(E \setminus B) \qquad (E \in \mathscr{S}).$$

Entonces, $\nu = \nu_0 + \nu_1$; además, $\nu_0 \perp \mu$, por cuanto $\mu(B) = \nu_0(B^c) = 0$; finalmente, $\nu_1 \ll \mu$: si $\mu(E) = 0$ se tiene que $E \in \mathscr{V}$ y, por lo que acabamos de probar, $\nu_1(E) = \nu(E \setminus B) = 0$.

La unicidad sigue como en la demostración del Teorema 4.10, o también aplicando el Ejercicio 19. Exploremos esta última posibilidad. Sean $\nu = \nu_0 + \nu_1 = \nu_0' + \nu_1'$ sendas descomposiciones de Lebesgue de ν como suma de dos medidas positivas tales que $\nu_0 \perp \mu$, $\nu_0' \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_1' \ll \mu$. Puesto que ν se supone finita, todas estas medidas lo son, como lo es, asimismo, la medida signada $\lambda = \nu_0 - \nu_0' = \nu_1' - \nu_1$. Además, trivialmente, $\lambda = \nu_1' - \nu_1$ es absolutamente continua respecto de la medida positiva μ, de modo que, por el Ejemplo 3.3, $\lambda^+ \ll \mu$ y $\lambda^- \ll \mu$. Dado que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_0' \perp \mu$, existen conjuntos medibles A, B tales que $\nu_0(A) = \nu_0'(B) = \mu(A^c) = \mu(B^c) = 0$. De una parte, $\mu\left((A \cap B)^c\right) = \mu\left(A^c \cup B^c\right) = 0$; de otra, si P, N es una descomposición de Hahn de X respecto de λ, entonces, por monotonía, $\lambda^+(A \cap B) = \nu_0(A \cap B \cap P) - \nu_0'(A \cap B \cap P) = 0$, y similarmente $\lambda^-(A \cap B) = -(\nu_0 - \nu_0')(A \cap B \cap N) = 0$; en definitiva, $\lambda^+ \perp \mu$ y $\lambda^- \perp \mu$. Encontramos así que $\lambda^+ \ll \mu$ y $\lambda^+ \perp \mu$, y también que $\lambda^- \ll \mu$ y $\lambda^- \perp \mu$. El Ejercicio 19 implica ahora que $\lambda^+ = \lambda^- = 0$, probando que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^- = 0$, como se pretendía. $\square$