

Tema 4: Medidas signadas

Problemas resueltos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1	Medidas signadas y la descomposición de Hahn	1
2	La descomposición de Jordan	4
3	El teorema de Radon-Nikodým	6
4	Algunas aplicaciones del teorema de Radon-Nikodým	8



1 Medidas signadas y la descomposición de Hahn

1. Sea $\nu(E) = \int_E x e^{-x^2} dx$. ¿Cuáles son los conjuntos positivos, negativos y nulos con respecto a ν ? Encontrar una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ respecto de ν .

Resolución. Sea $f(x) = x e^{-x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). Como $f^+(x) = x e^{-x^2} \chi_{[0, \infty)}$ y $f^-(x) = -x e^{-x^2} \chi_{(-\infty, 0)}$ ($x \in \mathbb{R}$), con

$$\begin{aligned} \int f^+ dx &= \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{2} < \infty, \\ \int f^- dx &= - \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx = \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} < \infty, \end{aligned}$$

resulta que ν es una medida signada en el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ (Ejemplo 1.2), y los conjuntos $\{x : f(x) \geq 0\} = [0, \infty)$, $\{x : f(x) < 0\} = (-\infty, 0)$ constituyen una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ en un conjunto ν -positivo y otro ν -negativo, respectivamente (Ejemplo 2.5). Ahora, A es ν -positivo si, y sólo si, $A \in \mathcal{M}$ y $m(A \cap (-\infty, 0)) = 0$; B es ν -negativo si, y sólo si, $B \in \mathcal{M}$ y $m(B \cap (0, \infty)) = 0$; C es ν -nulo si, y sólo si, $C \in \mathcal{M}$ y $m(C) = 0$. En efecto, caractericemos los conjuntos positivos.

($\Rightarrow$) Si A es ν -positivo entonces $A \in \mathcal{M}$ y, por definición y en particular, $\nu(A \cap (-\infty, 0)) \geq 0$. Como $(-\infty, 0)$ es ν -negativo, también por definición, $\nu(A \cap (-\infty, 0)) \leq 0$. Luego, $\nu(A \cap (-\infty, 0)) = 0$, esto es,

$$\int_{A \cap (-\infty, 0)} f dx = \int f \chi_{A \cap (-\infty, 0)} dx = 0.$$

Como el integrando $f \chi_{A \cap (-\infty, 0)}$ tiene signo constante (negativo), el Ejemplo 1.13 del Tema 2 implica que $f \chi_{A \cap (-\infty, 0)} = 0$ c.t.p. $[m]$, es decir, que el conjunto $\{x \in A \cap (-\infty, 0) : f(x) \neq 0\} = A \cap (-\infty, 0)$ tiene m -medida nula.

($\Leftarrow$) Sabemos que A es medible. Si $m(A \cap (-\infty, 0)) = 0$ y $E \subset A$ es medible entonces, por monotonía, $m(E \cap (-\infty, 0)) = 0$, lo que obliga a que $\nu(E \cap (-\infty, 0)) = 0$, de modo que $\nu(E) = \nu(E \cap [0, \infty)) \geq 0$.

La caracterización de los conjuntos ν -negativos se establece análogamente, y la de los conjuntos ν -nulos es consecuencia inmediata de las dos anteriores. $\square$

2. Demostrar que si en el Teorema 1.10 se supone $\nu(E) < \infty$, se obtiene $0 < \nu(A) < \infty$.

Resolución. Si el proceso de obtención de la sucesión $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ se detiene en algún n_m , tomamos $E_k = \emptyset$ para $k \geq n_m + 1$. Por la ecuación (1) se tiene entonces que

$$\nu(E) = \nu(A) + \nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right),$$

y argumentando como en la demostración del teorema, que

$$-\infty < \nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) < 0.$$

Luego, $\nu(A) = \infty$ implicaría $\nu(E) = \infty$. $\square$

3. Dar un ejemplo que muestre que la descomposición de Hahn no es única.

Resolución. Tomamos $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{M}$, $\nu(E) = \int_E f dx$, donde $f(x) = x e^{-x}$ ($|x| > 1$), $f(x) = 0$ ($|x| \leq 1$). Entonces, $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$ es una descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ respecto de ν , cualquiera que sea a tal que $|a| \leq 1$. $\square$

4. Dada cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y cualquier conjunto $E \subset \mathbb{N}$, sea $\nu(E)$ la suma, si existe, de los términos correspondientes de $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. ¿Qué sucesiones se asocian con medidas signadas sobre $\mathbb{N}$? Probar que si $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ es una de estas sucesiones y $|a_n| > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, la descomposición de Hahn de $\mathbb{N}$ con respecto a ν es única.

Resolución. Trabajamos en el espacio medible $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$; simbólicamente,

$$\nu(E) = \sum_{n \in E} a_n \quad (E \subset \mathbb{N}),$$

siempre que la suma exista. Nótese que esta construcción de ν se corresponde con la discretización del Ejemplo 1.2: si se considera sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la medida cardinal μ_c y se define la función a sobre $\mathbb{N}$ por $a(n) = a_n$ ($n \in \mathbb{N}$), entonces la condición de que $\int a d\mu_c$ exista equivale a que

$$\int a^+ d\mu_c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ < \infty \quad \text{ó} \quad \int a^- d\mu_c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- < \infty,$$

donde

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

En tal caso,

$$\nu(E) = \int_E a d\mu_c = \sum_{n \in E} a_n \quad (E \subset \mathbb{N})$$

está bien definida, y

$$\nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E a^+ d\mu_c - \int_E a^- d\mu_c = \sum_{n \in E} a_n^+ - \sum_{n \in E} a_n^- \quad (E \subset \mathbb{N})$$

es la descomposición de Jordan de ν (cf. Ejemplo 2.5).

Para un conjunto ν -positivo $A \subset \mathbb{N}$ se tiene, en particular, $\nu(\{n\}) = a_n \geq 0$ cualquiera que sea $n \in A$. Similarmente, para un conjunto ν -negativo $B \subset \mathbb{N}$ se tiene $a_n \leq 0$ cualquiera que sea $n \in B$. Esto quiere decir que para un conjunto ν -nulo $C \subset \mathbb{N}$, se tiene $a_n = 0$ cualquiera que sea $n \in C$. Por tanto, si $|a_n| > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y si P_1, N_1 y P_2, N_2 son dos descomposiciones de Hahn de $\mathbb{N}$ respecto de ν , con P_i ν -positivo y N_i ν -negativo ($i = 1, 2$), que $P_1 \triangle P_2$ sea ν -nulo (Teorema 1.11) implica $P_1 \triangle P_2 = \emptyset$, así que $P_1 = P_2$ (y, consecuentemente, $N_1 = N_2$). $\square$

5. Sea ν una medida signada y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, tales que $|\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)| < \infty$. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ es absolutamente convergente.

Resolución. Análogamente al Ejercicio 4, usando la condición de finitud que se proporciona, obtenemos que la suma de los términos positivos en $\{\nu(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es finita y que la de los términos negativos también es finita, como se requiere. En efecto,

$$-\infty < \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^- < \infty$$

implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^+ < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^- < \infty,$$

así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)^- < \infty.$$

Nótese que la expresión precedente no coincide con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^+(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^-(E_n).$$

Es decir, dado $E \in \mathcal{S}$ es, en general, falso que $\nu(E)^+ = \nu^+(E)$. Por ejemplo, para la medida signada ν definida por

$\nu(E) = \int_E f \, dx$ ($E \in \mathcal{M}$), donde $f(x) = xe^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$), y el conjunto medible Lebesgue $E = (-1, 1)$, se tiene

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ \, dx = \int_{-1}^1 f \chi_{[0, \infty)} \, dx = \int_0^1 f \, dx = -e^{-x}(x+1) \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e};$$

pero $\nu(E)^+ = \max\{\nu(E), 0\} = 0$, porque

$$\nu(E) = \int_E f \, dx = \int_{-1}^1 f \, dx = -e^{-x}(x+1) \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{e}.$$

Similarmente,

$$\nu^-(E) = \nu^+(E) - \nu(E) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + \frac{2}{e} = 1,$$

mientras que $\nu(E)^- = \max\{-\nu(E), 0\} = 2/e$. Sin embargo, se verifica, como cabía esperar, que $|\nu(E)| \leq |\nu| (E)$, por cuanto

$$\begin{aligned} |\nu(E)| &= \nu(E)^+ + \nu(E)^- = \frac{2}{e}, \\ |\nu| (E) &= \nu^+(E) + \nu^-(E) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1 = 2 - \frac{2}{e}, \end{aligned}$$

con $2/e < 2 - 2/e$, o, equivalentemente, $2 < e$. □

6. Probar que si ν es una medida signada y F, E conjuntos medibles tales que $F \subset E$, entonces $|\nu(E)| < \infty$ implica $|\nu(F)| < \infty$.

Resolución. La condición (i) de la Definición 1.1 impide que alguno de los términos del segundo miembro de la igualdad $\nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F)$ sea infinito. □

7. Demostrar que si ν es una medida signada y $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ son medibles, entonces $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu(E_i)$.

Resolución. Puesto que la unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (E_i \setminus E_{i-1})$ está compuesta por conjuntos disjuntos dos a dos, se tiene

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \nu(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \nu(E_i \setminus E_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\nu(E_1) + \sum_{i=2}^n \nu(E_i \setminus E_{i-1}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n), \end{aligned}$$

y este límite existe, aunque puede ser infinito. □

8. Probar que si ν es una medida signada y $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ son medibles, con $|\nu(E_1)| < \infty$, entonces

$$\nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu(E_i).$$

Resolución. El conjunto E_1 puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos medibles:

$$E_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_i);$$

en efecto:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \left(E_1 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \left[E_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right)^c \right]$$

$$= \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \cup \left(E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right) = E_1.$$

Por otra parte, el Ejercicio 6 garantiza que $v(E_1 \setminus E_i) = v(E_1) - v(E_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Aplicando ahora el Ejercicio 7 encontramos que

$$v(E_1) = v\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \lim_{i \rightarrow \infty} v(E_1 \setminus E_i) = v\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) + v(E_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} v(E_i).$$

Puesto que $|v(E_1)| < \infty$, se obtiene el resultado. $\square$

2 La descomposición de Jordan

9. Demostrar que si v_1, v_2 y μ son medidas y $v_1 \perp \mu, v_2 \perp \mu$, entonces $v_1 + v_2 \perp \mu$.

Resolución. Existen conjuntos A, B tales que $\mu(A) = v_1(A^c) = \mu(B) = v_2(B^c) = 0$. Luego,

$$\mu(A \cup B) = (v_1 + v_2)((A \cup B)^c) = 0.$$

En efecto: por un lado, la unión finita de conjuntos de medida nula tiene medida nula; y, por otro,

$$0 \leq (v_1 + v_2)((A \cup B)^c) = v_1(A^c \cap B^c) + v_2(A^c \cap B^c) \leq v_1(A^c) + v_2(B^c) = 0. \quad \square$$

10. Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $E \in \mathcal{S}$. Si $v(E) = \int_E f d\mu$, donde $\int f d\mu$ existe, ¿quién es $|v|(E)$?

Resolución. Por el Ejemplo 2.5,

$$v^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad v^-(E) = \int_E f^- d\mu,$$

y por la Definición 2.6,

$$|v|(E) = v^+(E) + v^-(E) = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu. \quad \square$$

11. Probar que si la medida signada v sólo toma valores finitos, entonces

$$v^+ = \frac{1}{2}(|v| + v), \quad v^- = \frac{1}{2}(|v| - v).$$

Resolución. Es obvio a partir de la descomposición de Jordan (Teorema 2.3): $v = v^+ - v^-$, y la Definición 2.6: $|v| = v^+ + v^-$. Nótese que si v toma valores finitos, la medida $|v|$ también es finita (Ejemplo 2.8), y no hay riesgo de indeterminación al sumarlas o restarlas. $\square$

12. Sea v una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$. Verificar que

$$v^+(E) = \max\{v(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\}, \quad v^-(E) = -\min\{v(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\} \quad (E \in \mathcal{S}).$$

En particular, v^+ y v^- son independientes de la descomposición de Hahn que se use para definirlos.

Resolución. Sea A, B una descomposición de Hahn de X respecto de v . Sean $E, U \in \mathcal{S}$, con $U \subset E$. Se tiene que

$$v(U) = v^+(U) - v^-(U) \leq v^+(U) \leq v^+(E);$$

por tanto,

$$\sup\{v(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\} \leq v^+(E).$$

Como (demostración del Teorema 2.3) $v^+(E) = v(E \cap A)$, basta particularizar $U = E \cap A$ para obtener el resultado relativo a la variación positiva. La prueba del correspondiente a la variación negativa es similar:

$$v(U) = v^+(U) - v^-(U) \geq -v^-(U) \geq -v^-(E),$$

o bien $-v(U) \leq v^-(E)$, con $v^-(E) = -v(E \cap B)$. De aquí resulta

$$v^-(E) = \max\{-v(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\},$$

expresión equivalente a la que se buscaba. □

13. Demostrar que $|v|(E) = \sup \sum_{i=1}^n |v(E_i)|$, donde el supremo se toma sobre todas las familias finitas $\{E_i\}_{i=1}^n$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, tales que $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Este resultado justifica la denominación «variación total» en la Definición 2.6.

Resolución. Sea A, B una descomposición de Hahn con respecto a v . Entonces

$$|v|(E) = v^+(E) + v^-(E) = v(E \cap A) - v(E \cap B) = |v(E \cap A)| + |v(E \cap B)| \leq \sup \sum_{i=1}^n |v(E_i)|,$$

por cuanto $\{E \cap A, E \cap B\}$ constituye una partición de E . Inversamente, puesto que $|v|$ es una medida,

$$\sup \sum_{i=1}^n |v(E_i)| \leq \sup \sum_{i=1}^n |v|(E_i) = \sup |v|\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = |v|(E). \quad \square$$

14. Probar que la descomposición de Jordan es minimal en el sentido siguiente: si v es una medida signada y $v = v_1 - v_2$, donde v_1 y v_2 son medidas, entonces $|v| \leq v_1 + v_2$, con igualdad si, y sólo si, $v_1 = v^+$ y $v_2 = v^-$.

Resolución. Supongamos que $v = v^+ - v^-$ es la descomposición de Jordan de v , y que A, B es una descomposición de Hahn asociada. Dado $E \in \mathcal{S}$, escribamos $E_1 = E \cap A, E_2 = E \cap B$. Entonces $v^-(E_1) = 0$, y por lo tanto

$$v_2(E_1) \geq v^-(E_1);$$

como $v_1 - v^+ = v_2 - v^-$, sigue que

$$v_1(E_1) \geq v^+(E_1).$$

Similarmente, $v^+(E_2) = 0$ implica

$$v_1(E_2) \geq v^+(E_2),$$

lo que, junto con la igualdad $v_1 - v^+ = v_2 - v^-$, proporciona

$$v_2(E_2) \geq v^-(E_2).$$

Luego,

$$v^+(E) = v^+(E_1) + v^+(E_2) \leq v_1(E_1) + v_1(E_2) = v_1(E),$$

y también

$$v^-(E) = v^-(E_1) + v^-(E_2) \leq v_2(E_1) + v_2(E_2) = v_2(E).$$

De la arbitrariedad de $E \in \mathcal{S}$ se concluye que $|v| = v^+ + v^- \leq v_1 + v_2$.

Para la igualdad necesitamos que $v^+(E) + v^-(E) = v_1(E) + v_2(E)$ cualquiera que sea $E \in \mathcal{S}$. Puesto que $v^+ \leq v_1$ y

$v^- \leq v_2$, se debe tener $v_1 = v^+$ y $v_2 = v^-$:

$$0 \leq v_2(E) - v^-(E) = v^+(E) - v_1(E) \leq 0 \quad (E \in \mathcal{S}).$$

La suficiencia de esta condición es evidente. □

3 El teorema de Radon-Nikodým

15. Sean μ, ν medidas sobre la misma σ -álgebra tales que $\mu \ll \nu$. Demostrar que si una propiedad P se verifica c.t.p. $[\nu]$, entonces P también se verifica c.t.p. $[\mu]$. Además, si la medida μ es completa, también lo es ν .

Resolución. Obvio: respecto al primer enunciado, basta tener en cuenta que ν -medida nula implica μ -medida nula; respecto al segundo, como todo conjunto de ν -medida nula tiene μ -medida nula, es medible. □

16. Dar un ejemplo que muestre que en la Definición 3.2, las condiciones $|\mu|(E) = 0$ y $\mu(E) = 0$ no son equivalentes.

Resolución. Como $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$, es cierto que $|\mu|(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$. Veamos que el recíproco puede ser falso.

Sea $X = [0, 1]$ y sea μ dada por $\mu(E) = \int_E f dx$ para cualquier conjunto medible Lebesgue $E \subset [0, 1]$, donde $f = 1$ sobre $[0, 1/2)$ y $f = -1$ sobre $[1/2, 1]$, esto es, $f = \chi_{[0, 1/2)} - \chi_{[1/2, 1]}$. Entonces $|\mu| = m$, de modo que $|\mu|(E) = 0$ implica $m(E) = 0$:

$$\begin{aligned} |\mu|(E) &= \int_E f^+ dx + \int_E f^- dx = \int_{E \cap [0, 1/2)} dx + \int_{E \cap [1/2, 1]} dx \\ &= m(E \cap [0, 1/2)) + m(E \cap [1/2, 1]) \\ &= m(E) \quad (E \in \mathcal{S}); \end{aligned}$$

pero $\mu(E) = 0$ no implica $m(E) = 0$ si $E = (1/2 - \alpha, 1/2 + \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1/2$:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx = m((1/2 - \alpha, 1/2)) - m([1/2, 1/2 + \alpha)) = \alpha - \alpha = 0, \\ m(E) &= 2\alpha > 0. \end{aligned} \quad \square$$

17. Encontrar dos medidas μ y ν , sobre el mismo espacio medible, para las que no se verifiquen ninguna de las relaciones $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$, $\mu \perp \nu$.

Resolución. Tómesese, por ejemplo, $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{M}$,

$$\mu(E) = \int_{[0, \infty) \cap E} e^{-x^2} dx, \quad \nu(E) = \int_{(-\infty, 1) \cap E} e^{-x^2} dx \quad (E \in \mathcal{M}).$$

No se verifica $\mu \ll \nu$:

$$\nu([1, \infty)) = \int_{(-\infty, 1) \cap [1, \infty)} e^{-x^2} dx = 0, \quad \mu([1, \infty)) = \int_{[0, \infty) \cap [1, \infty)} e^{-x^2} dx = \int_1^\infty e^{-x^2} dx > 0.$$

No se verifica $\nu \ll \mu$:

$$\mu((-\infty, 0)) = \int_{[0, \infty) \cap (-\infty, 0)} e^{-x^2} dx = 0, \quad \nu((-\infty, 0)) = \int_{(-\infty, 1) \cap (-\infty, 0)} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx > 0.$$

No se verifica $\mu \perp \nu$: supongamos existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $\nu(A) = \mu(A^c) = 0$; entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{(0,1) \cap A} e^{-x^2} dx \leq \int_{(-\infty,1) \cap A} e^{-x^2} dx = 0, \\ 0 &\leq \int_{(0,1) \cap A^c} e^{-x^2} dx \leq \int_{[0,\infty) \cap A^c} e^{-x^2} dx = 0 \end{aligned}$$

implica

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_{(0,1) \cap A} e^{-x^2} dx + \int_{(0,1) \cap A^c} e^{-x^2} dx = 0,$$

una contradicción. □

18. Sea $x_0 \in [0, 1]$, y para cada conjunto medible Lebesgue $E \subset [0, 1]$, defínase $\nu(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que ν es una medida que no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Resolución. Se comprueba directamente que ν es una medida:

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) &= \chi_{\emptyset}(x_0) = 0, \\ \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i), \end{aligned}$$

donde $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de subconjuntos medibles Lebesgue de $[0, 1]$, disjuntos dos a dos. Puesto que $\nu(\{x_0\}) = 1$ y $\mu(\{x_0\}) = 0$, encontramos que $\nu \not\ll \mu$. □

19. Demostrar que si μ y ν son medidas sobre la misma σ -álgebra $\mathcal{S}$ tales que $\nu \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$, entonces ν es idénticamente nula.

Resolución. Sigue inmediatamente de las Definiciones 2.1 y 3.1. En efecto: si $\nu \perp \mu$, existe $A \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$; como $\nu \ll \mu$, se tiene que $\nu(A) = \nu(A^c) = 0$. Consecuentemente, $\nu(X) = 0$ y, por monotonía, $\nu \equiv 0$. □

20. Probar que si $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cada $E \in \mathcal{S}$, donde f es no negativa y medible, y $f = \infty$ en un conjunto de μ -medida positiva, entonces ν no es σ -finita.

Resolución. Supongamos que X se puede escribir como unión de una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos de ν -medida finita. Sea F el conjunto donde f es infinita, de modo que $\mu(F) > 0$. Entonces $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap X_n)$, con $\nu(F \cap X_n) < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) y $\mu(F \cap X_m) > 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como todo conjunto medible $E \subset F$ tiene ν -medida 0 ó ∞ , según que $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E) > 0$, necesariamente $\nu(F \cap X_m) = \infty$, lo que proporciona la contradicción esperada. □

21. Demostrar que la condición de que ν sea σ -finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.

Resolución. Supongamos que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ ($E \in \mathcal{S}$), donde f es medible no negativa y finita, y que μ es σ -finita. Entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, con $\mu(X_n) < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$), y también $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$, donde $Y_m = \{x : f(x) \leq m\}$ ($m \in \mathbb{N}$). Así, $X = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} (X_n \cap Y_m)$, y puesto que

$$\nu(X_n \cap Y_m) \leq m\mu(X_n) < \infty \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

resulta que ν es σ -finita. Por tanto, la tesis del teorema para ν obliga a que ν sea σ -finita. Nótese que el Ejercicio 20 muestra que ν puede no ser σ -finita aunque $\nu \ll \mu$ y μ sea σ -finita. □

22. Probar que la condición de que μ sea σ -finita es necesaria en el teorema de Radon-Nikodým.

Resolución. Sea X tal que $\#X > \aleph_0$, y sea $\mathcal{S} = \{E : \#E \leq \aleph_0 \text{ ó } \#E^c \leq \aleph_0\}$. Nótese que las dos condiciones definitorias de los elementos de $\mathcal{S}$ son mutuamente excluyentes, porque X es incontable. El par $(X, \mathcal{S})$ es un espacio medible; en efecto:

- (i) Claramente, $X \in \mathcal{S}$.
- (ii) Si $E \in \mathcal{S}$, entonces $\#E^c \leq \aleph_0$ ó $\#(E^c)^c \leq \aleph_0$, así que $E^c \in \mathcal{S}$.
- (iii) Si $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{S}$ entonces, o bien $\#E_n \leq \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien $\#E_m^c \leq \aleph_0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. En el primer caso, $\#\bigcup_{n=1}^\infty E_n \leq \aleph_0$. En el segundo, $\#\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)^c = \#\bigcap_{n=1}^\infty E_n^c \leq \#E_m^c \leq \aleph_0$. En ambos, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{S}$.

La medida cardinal $\mu = \mu_c$ no es σ -finita en este espacio, porque X no es contable. Definamos sobre $\mathcal{S}$ la medida ν por

$$\nu(E) = \begin{cases} 0, & \#E \leq \aleph_0 \\ 1, & \#E^c \leq \aleph_0 \end{cases} \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Se comprueba sin dificultad que ν es, en efecto, una medida (denominada *medida co-contable*). En primer lugar, $\#\emptyset = 0 \leq \aleph_0$ implica $\nu(\emptyset) = 0$. En segundo lugar, sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ cualquier sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos. Si $\#E_n \leq \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, necesariamente $\#\bigcup_{n=1}^\infty E_n \leq \aleph_0$, así que

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).$$

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\#E_m^c \leq \aleph_0$, entonces $\#\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)^c = \#\bigcap_{n=1}^\infty E_n^c \leq \#E_m^c \leq \aleph_0$, así que $\nu(E_m) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 1$. Además, cuando $n \neq m$ la inclusión $E_n \subset E_m^c$ implica $\#E_n \leq \aleph_0$, y $\nu(E_n) = 0$. Se concluye que

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 1 = \nu(E_m) = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).$$

La medida ν es σ -finita, porque es finita. Además, dado que el único elemento de $\mathcal{S}$ con μ -medida nula es el conjunto vacío, resulta que $\nu \ll \mu$. Supongamos que existe f tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cada $E \in \mathcal{S}$; entonces

$$0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = f(x) \quad (x \in X),$$

esto es, $f \equiv 0$, así que $\nu \equiv 0$. Pero $\nu(X) = 1$. □

4 Algunas aplicaciones del teorema de Radon-Nikodým

23. En el caso particular de que μ sea σ -finita, aplicar el Teorema 3.5 para demostrar el Teorema 4.1.

Resolución. Como en la prueba del Teorema 4.1, apelando a los Ejemplos 3.3 y 2.8 podemos suponer que μ y ν son medidas (positivas). Entonces, por el Teorema 3.5, se tiene

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{S}),$$

donde $f \geq 0$ es medible. Aplicamos el Teorema 2.8 del Tema 2. □

24. Sean $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones de números positivos tales que $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n > 0$, y sean μ, ν las medidas definidas sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ por $\mu(\{n\}) = a_n$, $\nu(\{n\}) = b_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Probar que $\nu \ll \mu$, pero que no se verifica la tesis del Teorema 4.1.

Resolución. Hay que encontrar $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $\mu(E) < \delta$ y $\nu(E) \geq \varepsilon$. Elíjase una subsucesión $\{a_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = 0$. Entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(\{n_i\}) = 0$, es decir, dado $\delta > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$i \geq m$ implica $\mu(\{n_i\}) < \delta$, pero $\nu(\{n_i\}) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \varepsilon > 0$ ($i \in \mathbb{N}$); así pues, la tesis del Teorema 4.1 no se verifica, por ejemplo, para $E = \{n_m\}$. Sin embargo, $\nu \ll \mu$: como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se compone de números positivos, el único conjunto de μ -medida nula es el vacío.

La razón por la que no se cumple la tesis del Teorema 4.1 es que ν no es finita: la condición $\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n > 0$ impide que el término general de la serie $\nu(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienda a cero. $\square$

25. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(\mu)$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta$ implica

$$\int_E |f_n| d\mu < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Resolución. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int |f_n - f_m| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n, m \geq n_0).$$

El Teorema 2.8 del Tema 2 asegura que, para este n_0 , existe $\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta$ implica

$$\int_E |f_n| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (n = 1, \dots, n_0).$$

Luego, si $\mu(E) < \delta$ y $n > n_0$, también tenemos

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| d\mu &\leq \int_E |f_{n_0}| d\mu + \int_E |f_n - f_{n_0}| d\mu \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int |f_n - f_{n_0}| d\mu \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

26. Probar que si μ y ν son medidas signadas σ -finitas y $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$, se cumple que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^{-1} \quad [\mu].$$

Resolución. Descomponiendo X en cuatro conjuntos como en el Teorema 4.8 y combinando los resultados, podemos suponer que μ y ν son medidas. Sea f tal que

$$\mu(E) = \int_E f d\nu \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Puesto que $\nu \ll \mu$, resulta que $\{x : f(x) = 0\}$ tiene medida nula con respecto a μ y ν , así que $1/f = (d\mu/d\nu)^{-1}$ está definida c.t.p.. El Teorema 4.7 asegura que $f(d\nu/d\mu) = d\mu/d\mu = 1$ $[\mu]$ y, consecuentemente, $d\nu/d\mu = (d\mu/d\nu)^{-1}$ $[\mu]$. $\square$

27. Sean $\mathcal{M}$ y m , respectivamente, la σ -álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\nu(E) = \int_E f dx \quad (E \in \mathcal{M}),$$

donde $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Verificar que

$$\frac{dm}{d\nu} = 1 + x^2 \quad [\nu].$$

Resolución. Este resultado puede ser deducido inmediatamente del Ejercicio 26, una vez se pruebe que m , ν son σ -finitas, con $m \ll \nu$ y $\nu \ll m$. Pero, en efecto, la medida m es σ -finita porque $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$, donde cada intervalo tiene medida

finita $2n$ ($n \in \mathbb{N}$). Por otra parte, la medida ν es positiva y finita (luego, σ -finita). Es claro que $\nu \ll m$. También se tiene que $m \ll \nu$ ya que, al ser $f > 0$, si $E \in \mathcal{M}$ y $\nu(E) = 0$, necesariamente $m(E) = 0$.

No obstante lo anterior, daremos una segunda resolución. En las condiciones precedentes, el teorema de Radon-Nikodým proporciona una función medible, no negativa y finita $g = dm/d\nu$, tal que

$$m(E) = \int_E g d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Supongamos que $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, con $a_i > 0$ y $A_i \in \mathcal{M}$ ($i = 1, \dots, n$). Entonces,

$$\begin{aligned} \int_E \psi dx &= \int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \right) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_{E \cap A_i} dx = \sum_{i=1}^n a_i m(E \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{E \cap A_i} g d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int_E \chi_{A_i} g d\nu = \int_E \psi g d\nu \quad (E \in \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (1)$$

El teorema de aproximación de Lebesgue permite escribir la función medible no negativa f como límite puntual de una sucesión no decreciente de funciones simples medibles $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$. Entonces fg es el límite puntual de la sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas $\{\psi_k g\}_{k=1}^\infty$. Aplicamos a ambas sucesiones el teorema de la convergencia monótona y (1), para obtener:

$$\nu(E) = \int_E f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \psi_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \psi_k g d\nu = \int_E f g d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Tenemos ahora

$$\nu(E) = \int_E f g d\nu = \int_E d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

La afirmación de unicidad del teorema de Radon-Nikodým obliga a que $fg = 1$ $[\nu]$, así que $g(x) = 1 + x^2$ $[\nu]$ (o, equivalentemente, $[m]$). $\square$

28. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

sean ν, μ las medidas definidas sobre $\mathcal{M}$ por

$$\nu(E) = \int_E f dx, \quad \mu(E) = \int_E g dx \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Encontrar la descomposición de Lebesgue de ν con respecto a μ .

Resolución. Antes que nada, observemos que todas las medidas que se consideran a continuación son σ -finitas.

La descomposición que se pide va a ser $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap (-\infty, 0]), \quad \nu_1(E) = \nu(E \cap (0, \infty)) \quad (E \in \mathcal{M}).$$

En efecto, siguiendo la demostración del teorema de descomposición de Lebesgue (Teorema 4.10), tratamos de hallar $d\mu/d\lambda$, donde $\lambda = \nu + \mu$. Puesto que ν y μ son absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue m , el Teorema 4.4 implica

$$\frac{d\lambda}{dm} = \frac{d\nu}{dm} + \frac{d\mu}{dm} = f + g = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ x^2 + \sqrt{1-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases} \quad [m].$$

Además, $m \ll \lambda$, porque

$$\lambda(E) = \int_E (f+g) dx = 0,$$

con $f+g > 0$, obliga a que $m(E) = 0$. Como $\mu \ll m \ll \lambda$ y, obviamente, $\lambda \ll m$, podemos aplicar el Teorema 4.7 y el Ejercicio 26 para escribir

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{dm} \frac{dm}{d\lambda} = \frac{d\mu}{dm} \left(\frac{d\lambda}{dm} \right)^{-1} = g \left(\frac{d\lambda}{dm} \right)^{-1} [\lambda].$$

En la notación de la prueba del Teorema 4.10, es claro ahora que

$$A = \{x : g(x) > 0\} = (0, \infty), \quad B = \{x : g(x) = 0\} = (-\infty, 0].$$

Finalmente, de acuerdo con dicha prueba, definimos $v_0(E) = v(E \cap B)$, $v_1(E) = v(E \cap A)$ ($E \in \mathcal{S}$), de modo que $v = v_0 + v_1$ es la descomposición buscada. $\square$

29. Demostrar que el conjunto D que comparece en el Ejemplo 4.11 es contable.

Resolución. Puesto que v_0 es σ -finita, $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, con $v_0(D_i) < \infty$ ($i \in \mathbb{N}$). Ahora bien, fijado $i \in \mathbb{N}$,

$$D_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in D_i : v_0(\{x\}) > n^{-1}\},$$

y cada conjunto de esta unión es finito; pues si, para algún $m \in \mathbb{N}$, $\{x \in D_i : v_0(\{x\}) > m^{-1}\}$ contuviese una sucesión infinita $S = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, resultaría la contradicción

$$v_0(D_i) \geq v_0(S) = \sum_{j=1}^{\infty} v_0(\{x_j\}) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

Se concluye que D es contable. $\square$

30. Probar el teorema de descomposición de Lebesgue (Teorema 4.10) directamente, sin recurrir al teorema de Radon-Nikodým (Teorema 3.5), usando, como en el teorema de descomposición de Hahn (Teorema 1.11), una sucesión de conjuntos que maximice v para obtener el conjunto B que interviene en la demostración.

Resolución. Un argumento estándar permite reducir la demostración al caso en que v es finita: suponiendo probado este caso, si v es σ -finita, escribimos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ como unión de conjuntos medibles, de v -medida finita, disjuntos dos a dos, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\lambda_n(E) = v(E \cap X_n)$ ($E \in \mathcal{S}$). Como λ_n es finita, podemos descomponer $\lambda_n = \lambda'_n + \lambda''_n$, con $\lambda'_n \perp \mu$ y $\lambda''_n \ll \mu$. Definiendo

$$v_0(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda'_n(E), \quad v_1(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda''_n(E) \quad (E \in \mathcal{S})$$

encontramos que $v_0 \perp \mu$, $v_1 \ll \mu$, y $v = v_0 + v_1$.

Abordemos, pues, el caso finito. Sean

$$\mathcal{V} = \{E \in \mathcal{S} : \mu(E) = 0\}, \quad \alpha = \sup_{E \in \mathcal{V}} v(E) \leq v(X) < \infty,$$

y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{V}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v(E_n) = \alpha$. Si $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $B \in \mathcal{V}$ y $v(B) = \alpha$, por cuanto

$$\alpha \geq v(B) \geq v(E_n) \rightarrow \alpha \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Dado $E \in \mathcal{V}$ se tiene que $E \cup B \in \mathcal{V}$, así que $\alpha = \nu(B) \leq \nu(E \cup B) \leq \alpha$ implica

$$\alpha = \nu(E \cup B) = \nu(E \setminus B) + \nu(B) = \nu(E \setminus B) + \alpha,$$

obligando, puesto que α es finito, a que $\nu(E \setminus B) = 0$. Escribimos

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap B), \quad \nu_1(E) = \nu(E \setminus B) \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Entonces, $\nu = \nu_0 + \nu_1$; además, $\nu_0 \perp \mu$, por cuanto $\mu(B) = \nu_0(B^c) = 0$; finalmente, $\nu_1 \ll \mu$: si $\mu(E) = 0$ se tiene que $E \in \mathcal{V}$ y, por lo que acabamos de probar, $\nu_1(E) = \nu(E \setminus B) = 0$.

La unicidad sigue como en la demostración del Teorema 4.10, o también aplicando el Ejercicio 19. Exploremos esta última posibilidad. Sean $\nu = \nu_0 + \nu_1 = \nu'_0 + \nu'_1$ sendas descomposiciones de Lebesgue de ν como suma de dos medidas positivas tales que $\nu_0 \perp \mu$, $\nu'_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$, $\nu'_1 \ll \mu$. Puesto que ν se supone finita, todas estas medidas lo son, como lo es, asimismo, la medida signada $\lambda = \nu_0 - \nu'_0 = \nu'_1 - \nu_1$. Además, trivialmente, $\lambda = \nu'_1 - \nu_1$ es absolutamente continua respecto de la medida positiva μ , de modo que, por el Ejemplo 3.3, $\lambda^+ \ll \mu$ y $\lambda^- \ll \mu$. Dado que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu'_0 \perp \mu$, existen conjuntos medibles A, B tales que $\nu_0(A) = \nu'_0(B) = \mu(A^c) = \mu(B^c) = 0$. De una parte, $\mu((A \cap B)^c) = \mu(A^c \cup B^c) = 0$; de otra, si P, N es una descomposición de Hahn de X respecto de λ , entonces, por monotonía, $\lambda^+(A \cap B) = \nu_0(A \cap B \cap P) - \nu'_0(A \cap B \cap P) = 0$, y similarmente $\lambda^-(A \cap B) = -(\nu_0 - \nu'_0)(A \cap B \cap N) = 0$; en definitiva, $\lambda^+ \perp \mu$ y $\lambda^- \perp \mu$. Encontramos así que $\lambda^+ \ll \mu$ y $\lambda^+ \perp \mu$, y también que $\lambda^- \ll \mu$ y $\lambda^- \perp \mu$. El Ejercicio 19 implica ahora que $\lambda^+ = \lambda^- = 0$, probando que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^- = 0$, como se pretendía. $\square$