Tema 5: Integración en espacios producto
Problemas resueltos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Medibilidad en espacios producto

1. La representación de un rectángulo en la forma $A \times B$ no tiene por qué ser única. Determinar cuándo lo es.

   Resolución. Que la representación no es única se puede ver con el siguiente contraejemplo: $\emptyset = X \times \emptyset = \emptyset \times Y = \emptyset \times \emptyset$. Sin embargo, cuando el rectángulo $A \times B$ es no vacío, la representación es única.

   Ciertamente: si $P \times Q = R \times S$ es no vacío, entonces P, Q, R, S son no vacíos. Dados $x \in P$ e $y \in Q$, se tiene

   $$(x,y) \in P \times Q = R \times S;$$

   luego, $x \in R$ e $y \in S$, así que $P \subset R$ y $Q \subset S$. Por simetría, $R \subset P$ y $S \subset Q$. Se concluye que $P = R$ y $Q = S$, con lo que la representación es única. □

2. Sea A un subconjunto no medible de X. ¿Es $A \times \emptyset$ un rectángulo medible?

   Resolución. Sí, por cuanto $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times \emptyset$ satisface la Definición 1.2. □

3. Demostrar que un rectángulo $A \times B$ es no medible si, y sólo si, o bien A es no medible y $B \neq \emptyset$, o bien B es no medible y $A \neq \emptyset$.

   Resolución. Si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$. Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $A \times B \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ si, y sólo si, tanto A como B son medibles (Teorema 1.13).

   Más precisamente, el enunciado pide probar que equivalen:

   a) $A \times B \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$; y
   b) $A \in \mathscr{S}$ ó $B = \emptyset$, y $A = \emptyset$ ó $B \in \mathscr{T}$; lo que, a su vez, equivale a:
   c) $A \in \mathscr{S}$ y $B \in \mathscr{T}$, ó $A = \emptyset$, ó $B = \emptyset$.

   Por tanto, debemos demostrar que *a)* equivale a *c)*.

   a) $\Rightarrow$ *c)* Supongamos que $A \times B \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$. Si A ó B son vacíos, no hay nada que probar. Si A y B no son vacíos, elegimos $x \in A$ e $y \in B$ para obtener, por el Teorema 1.13, que

   $$(A \times B)_x = B \in \mathscr{T}, \quad (A \times B)^y = A \in \mathscr{S}.$$

   c) $\Rightarrow$ *a)* Esto es evidente, porque los rectángulos medibles son $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medibles. □

4. Probar que si $V \subset X \times Y$, entonces $(\chi_V)_x = \chi_{V_x}$ y $(\chi_V)^y = \chi_{V^y}$.

   Resolución. Se tiene que $(\chi_V)_x(y) = \chi_V(x,y) = 1$ si, y sólo si $(x,y) \in V$, lo que ocurre si y sólo si, $y \in V_x$, o, equivalentemente, $\chi_{V_x}(y) = 1$. La demostración para $(\chi_V)^y$ es similar. □

5. Demostrar que si f es $\mathscr{S}$-medible y g es $\mathscr{T}$-medible, entonces fg definida por $(fg)(x,y) = f(x)g(y)$ $((x,y) \in X \times Y)$ es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible.

   Resolución. Para $x \in X$ e $y \in Y$, la función $f^*(x,y) = f(x)$ es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible, como lo es $g^*(x,y) = g(y)$. Luego, $fg = f^*g^*$ es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible.

   Para ver que $f^*(x,y) = f(x)$ es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ escribimos:

   $$\{(x,y) : f^*(x,y) > \alpha\} = \{(x,y) : f(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\} \times Y \in \mathscr{R} \subset \mathscr{S} \times \mathscr{T}.$$

   Que $g^*(x,y) = g(y)$ es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible se prueba de modo similar. □

2 Medidas producto y el teorema de Fubini

6. Sean μ, ν medidas completas. Probar que $\mu \times \nu$ puede no ser completa.

   Resolución. Pongamos $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathscr{S} = \mathscr{T} = \mathscr{M}$, $\mu = \nu = m$. Sean A un subconjunto no medible de X, y $B \neq \emptyset$ un subconjunto medible de Y, de ν-medida nula. Entonces $A \times B \subset \mathbb{R} \times B$, con $(\mu \times \nu)(\mathbb{R} \times B) = \mu(\mathbb{R})\nu(B) = 0$. Pero, por el Ejercicio 3, $A \times B \notin \mathscr{S} \times \mathscr{T}$. □

7. Sea f una función medible definida en $\mathbb{R}$, con $0 < f < \infty$. Sean también $O_f = \{(x,y) : 0 \leq y < f(x)\}$ el conjunto de ordenadas de f, y $G = \{(x,y) : y = f(x)\}$ el grafo de f. Finalmente, sean $\mathscr{M}$ y m la σ-álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Demostrar los siguientes asertos:

   a) O_f es $(\mathscr{M} \times \mathscr{M})$-medible.
   b) $(m \times m)\left(O_f\right) = \int f\,dx$.
   c) G es $(\mathscr{M} \times \mathscr{M})$-medible.
   d) $(m \times m)(G) = 0$.

   Resolución.

   a) Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones simples medibles, con límite f. Entonces O_{φ_n} es medible para cada $n \in \mathbb{N}$, y $O_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$. En efecto, si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$ es simple medible (en su forma canónica), se tiene

   $$O_\varphi = \bigcup_{n=1}^{N} \{(x,y) : x \in A_i,\ 0 \leq y < a_i\} = \bigcup_{n=1}^{N} A_i \times [0, a_i) \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{1}$$

   y cada conjunto de esta unión es un rectángulo medible, por lo que O_φ también es medible. Además,

   $$O_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$$

   ya que, si $(x,y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x,y) \in O_{\varphi_n}$, esto es, $0 \leq y < \varphi_n(x) \leq f(x)$, así que $(x,y) \in O_f$; y recíprocamente, si $(x,y) \in O_f$ entonces, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $y < \varphi_n(x) \leq f(x)$, así que $(x,y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$.

   b) Si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$ es simple medible, se verifica (1), con unión disjunta, de modo que

   $$(m \times m)(O_\varphi) = \sum_{i=1}^{N} a_i m(A_i) = \int \varphi\,dx.$$

   Por otra parte, si $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones simples medibles con límite f entonces $\{O_{\varphi_n}\}_{n=1}^{\infty}$ también es creciente con límite $\bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n} = O_f$, y podemos escribir:

   $$(m \times m)\left(O_f\right) = \lim_{n\to\infty} (m \times m)\left(O_{\varphi_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\,dx = \int f\,dx.$$

   c) Pongamos $G_n = \{(x,y) : y = f(x) \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, basta probar que cada G_n $(n \in \mathbb{N})$ es medible. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = \{x : (x,y) \in G_n\}$, de modo que $X_n = \{x : f(x) \leq n\}$ es medible. Existen sucesiones $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples en X_n, tales que $\varphi_k \leq f$, $\psi_k \geq f$ $(k \in \mathbb{N})$ y $\varphi_k \nearrow f$, $\psi_k \searrow f$ cuando $k \to \infty$; para obtener $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, elegimos una sucesión $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles creciente a $n - f$ y tomamos $\psi_k = n - \phi_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Como los conjuntos O_{φ_k} y $O^*_{\psi_k} = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \psi_k(x)\}$ son medibles para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(O^*_{\psi_k} \setminus O_{\varphi_k}\right)$ también lo es.

d) En vista de *c*), podemos aplicar a G el Teorema 2.1. Al igual que en dicho teorema, sea $\varphi(x) = m(G_x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Entonces $\varphi(x) = 0$ para cada x, de manera que, por la definición de medida producto (Definición 2.3),

$$(m \times m)(G) = \int \varphi \, dx = 0.$$

Se tiene que $\varphi(x) = 0$ para cada x porque, fijado x, $\chi_{G_x}(y) = 1$ si, y sólo si, $y = f(x)$, lo que implica

$$m(G_x) = \int \chi_{G_x}(y) \, dy = \int \chi_{\{f(x)\}}(y) \, dy = m(\{f(x)\}) = 0. \qquad \square$$

8. Sea f una función continua en $R = [a,b] \times [c,d]$, y sean $\mathscr{S} = \mathscr{T} = \mathscr{M}$. Probar que

$$\int_R f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) \, dx.$$

Resolución. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.8 (Fubini), ya que, al ser acotada sobre un conjunto de medida finita, f es integrable en él. Más precisamente,

$$\int_R |f(x,y)| \, dx \, dy \leq M \, (m \times m)(R) = M \, (b-a)(d-c) < \infty,$$

donde M es una cota de la función continua f sobre el compacto R. $\square$

9. Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$, entonces $fg \in L^1(\mu \times \nu)$.

Resolución. Por el Ejercicio 5, fg es $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-medible. Ahora, en virtud del Teorema 2.7 (Tonelli-Hobson),

$$\int_{X \times Y} |fg| \, d(\mu \times \nu) = \int_X |f| \, d\mu \int_Y |g| \, d\nu < \infty. \qquad \square$$

10. Dada $f \in L^1(0,a)$, se define

$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, dt \quad (0 < x \leq a).$$

Probar que $g \in L^1(0,a)$, con

$$\int_0^a g \, dx = \int_0^a f \, dt. \tag{2}$$

Resolución. Se quiere probar que

$$\int_0^a dx \left| \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, dt \right| < \infty,$$

para lo cual bastaría ver que

$$\int_0^a dx \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} \, dt < \infty.$$

Invirtiendo el orden de integración, esta integral se transforma en

$$\int_0^a dt \int_0^t \frac{|f(t)|}{t} \, dx = \int_0^a |f(t)| \, dt < \infty.$$

Sigue del Corolario 2.9 que $g \in L^1(0,a)$ y que las integrales iteradas coinciden. Integramos cambiando el orden igual que antes (sin el valor absoluto) para obtener (2), como se pretendía. $\square$

11. Integrando $e^{-y} \operatorname{sen} 2xy$ respecto de x e y, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \operatorname{sen}^2 y}{y} \, dy = \frac{1}{4} \ln 5.$$

Resolución. Para $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-y} \operatorname{sen} 2xy \, dx = e^{-y} \int_0^1 \operatorname{sen} 2xy \, dx &= \frac{e^{-y}}{2y} \cos 2xy \Big|_1^0 \\ &= \frac{e^{-y}}{2y} (1 - \cos 2y) = \frac{e^{-y}}{2y} \left(1 - \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y\right) = \frac{e^{-y} \operatorname{sen}^2 y}{y}.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty \left| e^{-y} \operatorname{sen} 2xy \right| \, dy \leq \int_0^1 dx \int_0^\infty e^{-y} \, dy = 1 < \infty.$$

El Corolario 2.9 asegura entonces que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \operatorname{sen}^2 y}{y} \, dy = \int_0^\infty dy \int_0^1 e^{-y} \operatorname{sen} 2xy \, dx = \int_0^1 dx \int_0^\infty e^{-y} \operatorname{sen} 2xy \, dy.$$

Calculamos la integral cíclica del segundo miembro integrando por partes dos veces, para obtener

$$\int_0^\infty e^{-y} \operatorname{sen} 2xy \, dy = \frac{2x}{4x^2 + 1}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-y} \operatorname{sen} 2xy \, dy &= -\frac{\cos 2xy}{2x} e^{-y} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\cos 2xy}{2x} e^{-y} \, dy \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} \left[\frac{\operatorname{sen} 2xy}{2x} e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2xy}{2x} e^{-y} \, dy \right] \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} \int_0^\infty e^{-y} \operatorname{sen} 2xy \, dy,\end{aligned}$$

de donde se despeja fácilmente la integral buscada. Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-y} \operatorname{sen}^2 y}{y} \, dy &= \int_0^1 \frac{2x}{4x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{8x}{4x^2 + 1} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln 5.\end{aligned}$$

□

12. Integrando $e^{-xy} \operatorname{sen} 2y$ respecto de x e y, probar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \operatorname{sen} 2y}{y} \, dy = \operatorname{arctg} 2.$$

Resolución. Fijado $N > 0$, se tiene que

$$\int_0^1 \left| e^{-xy} \operatorname{sen} 2y \right| dx = \frac{|\operatorname{sen} 2y|}{y} \left(1 - e^{-y}\right) \in L^1(0, N).$$

Por tanto (Corolario 2.9),

$$\int_0^N dy \int_0^1 e^{-xy} \operatorname{sen} 2y \, dx = \int_0^1 dx \int_0^N e^{-xy} \operatorname{sen} 2y \, dy. \tag{3}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\int_0^N e^{-xy} \operatorname{sen} 2y \, dy &= -\frac{e^{-xy} \cos 2y}{2} \Big|_0^N - \frac{x}{2} \int_0^N e^{-xy} \cos 2y \, dy \\ &= -\frac{e^{-xy} \cos 2y}{2} \Big|_0^N - \frac{x e^{-xy} \operatorname{sen} 2y}{4} \Big|_0^N - \frac{x^2}{4} \int_0^N e^{-xy} \operatorname{sen} 2y \, dy\end{aligned}$$

implica

$$\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\int_0^N e^{-xy}\operatorname{sen}2y\,dy = \frac{1-e^{-xN}\cos 2N}{2} - \frac{xe^{-xN}\operatorname{sen}2N}{4},$$

de donde, finalmente,

$$\int_0^N e^{-xy}\operatorname{sen}2y\,dy = \frac{2}{x^2+4} - \frac{x}{x^2+4}e^{-xN}\operatorname{sen}2N - \frac{2}{x^2+4}e^{-xN}\cos 2N.$$

Por convergencia dominada, la integral del segundo miembro de (3) es entonces igual a

$$\int_0^1 dx\int_0^N e^{-xy}\operatorname{sen}2y\,dy = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + o(1) \quad \text{cuando } N\to\infty.$$

Integrando el primer miembro de (3) y combinando el resultado con el que acabamos de obtener encontramos que

$$\int_0^N \left(\frac{\operatorname{sen}2y}{y} - \frac{e^{-y}\operatorname{sen}2y}{y}\right)dy = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + o(1) \quad \text{cuando } N\to\infty.$$

Pero

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{\operatorname{sen}2y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$$

por una integral de contorno estándar, y se concluye que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}\operatorname{sen}2y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}2.$$

Al objeto de calcular la integral de contorno, consideramos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}),$$

y, para $N>0$ grande y $\varepsilon>0$ pequeño, definimos

$$C = [-N,-\varepsilon] - \gamma_\varepsilon + [\varepsilon,N] + \gamma_N,$$

donde

$$\gamma_r = \left\{re^{it} : 0\le t\le\pi\right\}$$

denota la semicircunferencia superior de centro en el origen y radio $r>0$, positivamente orientada. Como f es analítica dentro y sobre C, el teorema de Cauchy garantiza que su integral a lo largo de C es nula:

$$0 = \oint_C f(z)\,dz = \int_{-N}^{-\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^N f(x)\,dx + \int_{\gamma_N} f(z)\,dz.$$

Además,

$$\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = e^0 = 1$$

implica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i\operatorname{Res}(f;0) = \pi i.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\int_{-N}^N \frac{\cos x + i\operatorname{sen}x}{x}\,dx &= \int_{-N}^N \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-N}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_\varepsilon^N f(x)\,dx\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz - \int_{\gamma_N} f(z)\,dz = \pi i - \int_{\gamma_N} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Por otra parte, la simetría $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$ y el lema de Jordan ($\operatorname{sen} t \geq 2t/\pi$ para $0 \leq t \leq \pi/2$) permiten escribir:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_N} f(z)\,dz\right| &\leq \int_0^\pi e^{-N\operatorname{sen} t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-N\operatorname{sen} t}\,dt \\ &\leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Nt/\pi}\,dt = \frac{\pi}{N}(1-e^{-N}) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} \frac{\cos x + i\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi i.$$

Sigue que

$$2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi,$$

y concluimos:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, verifiquemos que

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 2. \tag{4}$$

Aplicando la fórmula para la diferencia de arcotangentes,

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy},$$

con $y = 1/2$, resulta:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\frac{x-1/2}{1+x/2} = \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x+2}.$$

Cuando $x \to \infty$, el primer sumando del primer miembro de esta igualdad tiende a $\pi/2$ y el segundo miembro tiende a $\operatorname{arctg} 2$, lo que proporciona (4). $\square$

13. Dados $f \in L^1(0,\infty)$, $\alpha > 0$, pongamos

$$g_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \quad (x > 0).$$

Demostrar que

$$\alpha\int_0^y g_\alpha(x)\,dx = g_{\alpha+1}(y) \quad (y > 0).$$

Resolución. Fijemos $y > 0$. Para obtener

$$\int_0^y g_\alpha(x)\,dx = \int_0^y dx \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,$$

consideramos la integral iterada del módulo, en el orden opuesto:

$$\begin{aligned}\int_0^y |f(t)|\,dt \int_t^y (x-t)^{\alpha-1}\,dx &= \int_0^y |f(t)| \left.\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\right|_t^y dt \\ &= \int_0^y |f(t)| \frac{(y-t)^\alpha}{\alpha}\,dt \leq \frac{y^\alpha}{\alpha}\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty.\end{aligned}$$

Luego (Corolario 2.9), es lícito calcular la integral que se pide cambiando el orden de integración, con lo que resulta:

$$\begin{aligned}\int_0^y g_\alpha(x)\,dx &= \int_0^y f(t)\,dt \int_t^y (x-t)^{\alpha-1}\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^y (y-t)^\alpha f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha} g_{\alpha+1}(y).\end{aligned}$$ $\square$

14. Sean $a > 0$, $f \in L^1(0,a)$, $f \geq 0$, y
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad (x > 0).$$
Probar la igualdad
$$\int_0^a f(x)\ln\frac{1}{x}\,dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x}\,dx + F(a)\ln\frac{1}{a}.$$
Resolución. Se cumple que
$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{F(x)}{x}\,dx &= \int_0^a \frac{1}{x}\,dx \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt \int_t^a \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_0^a (\ln a - \ln t) f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\ln\frac{1}{x}\,dx - F(a)\ln\frac{1}{a},\end{aligned}$$
donde el cambio en el orden de integración está justificado porque los integrandos son no negativos (Corolario 2.9). □

15. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1]\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Demostrar que las integrales iteradas de f sobre el cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ son iguales, aunque f no es integrable.

Resolución. Para $y \neq 0$ es
$$\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx = \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx = y\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx = 0,$$
ya que el integrando es impar en x y el intervalo de integración, simétrico respecto al origen; y es claro que esta integral también se anula para $y = 0$. Análogamente,
$$\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy = 0 \quad (x \in [-1,1]).$$
Si f fuera integrable en $[-1,1]\times[-1,1]$ entonces lo sería en $[0,1]\times[0,1]$, y el Teorema 2.8 (Fubini) obligaría a que
$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx < \infty.$$
Sin embargo,
$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = -\frac{y}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\Big|_0^1 = -\frac{y}{2}\left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1}\right),$$
con
$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1}\right)dy = \frac{1}{2}\ln y\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\ln(y^2+1)\Big|_0^1 = \infty - \frac{1}{4}\ln 2 = \infty.$$ □

16. Probar que si
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)),$$
entonces
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx.$$
¿Contradice este resultado el Teorema 2.8 (Fubini)?

Resolución. Se advierte por inspección (derivada de un cociente) que
$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{y}{x^2+y^2} + C. \tag{5}$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{1}{x^2+1},$$

así que la primera integral iterada vale

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Intercambiando las variables x e y encontramos el valor de la segunda:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

No se contradice el Teorema 2.8 porque f no es integrable en $[0,1]\times[0,1]$. Para verlo, basta probar que f^+ no es integrable en $[0,1]\times[0,1]$, lo cual se justifica mediante el Teorema 2.5 (Tonelli-Hobson):

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2x}\,dx = \infty. \qquad \square$$

17. Se define f sobre $[0,1]\times[0,1]$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n}, & 2^{-n} \le x < 2^{-n+1},\ 2^{-n} \le y < 2^{-n+1} \\ -2^{2n+1}, & 2^{-n-1} \le x < 2^{-n},\ 2^{-n} \le y < 2^{-n+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy. \tag{6}$$

¿Es f integrable en su dominio?

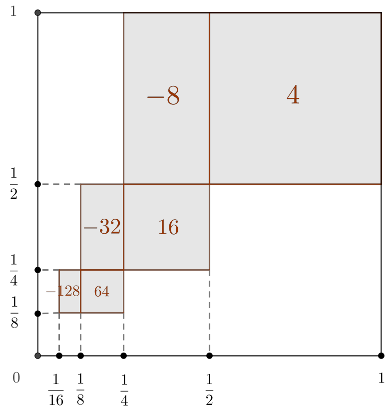
Resolución. Trazando un diagrama para los primeros valores de n se pone de manifiesto que

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = 0 \quad (0 < y < 1), \tag{7}$$

mientras que

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases} \tag{8}$$

	x	y	$f(x,y)$
$n=1$	$[1/2,\ 1)$	$[1/2,\ 1)$	4
	$[1/4,\ 1/2)$		-8
$n=2$	$[1/4,\ 1/2)$	$[1/4,\ 1/2)$	16
	$[1/8,\ 1/4)$		-32
$n=3$	$[1/8,\ 1/4)$	$[1/8,\ 1/4)$	64
	$[1/16,\ 1/8)$		-128



Comprobémoslo analíticamente. Dado $0 < y < 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$, en cuyo caso

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dx &= 2^{2n}\left(2^{-n+1} - 2^{-n}\right) - 2^{2n+1}\left(2^{-n} - 2^{-n-1}\right)\\ &= 2^{2n}\cdot 2^{-n} - 2^{2n}\left(2^{-n+1} - 2^{-n}\right)\\ &= 2^n - 2^n = 0,\end{aligned}$$

y vale (7).

Similarmente, fijemos $0 < x < 1$.

- Si $1/2 \leq x < 1$ $(n = 1)$, entonces
$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = 4\,\frac{1}{2} = 2.$$
- Si $0 < x < 1/2$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tal que $2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}$ y, o bien $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$ (en cuyo caso, $f(x,y) = 2^{2n}$), o bien y varía entre $2^{-(n-1)}$ y $2^{-(n-1)+1}$, es decir, $2^{-n+1} \leq y < 2^{-n+2}$ (en cuyo caso, $f(x,y) = -2^{2(n-1)+1} = -2^{2n-1}$); así pues,
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dy &= 2^{2n}\left(2^{-n+1} - 2^{-n}\right) - 2^{2n-1}\left(2^{-n+2} - 2^{-n+1}\right)\\ &= 2^{2n}\left(2^{-n+1} - 2^{-n}\right) - 2^{2n}\left(2^{-n+1} - 2^{-n}\right) = 0 \quad (2^{-n} \leq x < 2^{-n+1},\ n \geq 2),\end{aligned}$$
y vale (8).

Luego, se cumple (6):

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = 0,\\ &\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = 0\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

Puesto que las integrales iteradas son distintas, el Teorema 2.8 (Fubini) impide que f sea integrable en $[0,1]\times[0,1]$. $\square$

18. Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x = y\\ -2 + 2^{-x}, & x = y + 1\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Probar que las integrales iteradas de f son distintas. ¿Es f integrable en su dominio?

Resolución. Fijado y, se tiene

$$\int f(x,y)\,d\mu(x) = -2^{-y-1},$$

de modo que

$$\int d\nu(y) \int f(x,y)\,d\mu(x) = -\frac{1}{2};$$

pero

$$\int d\mu(x) \int f(x,y)\,d\nu(y) = \frac{3}{2}.$$

Para mayor claridad, escribimos los valores $f(i,j)$ en forma matricial:

$$(f(i,j))_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} 2-2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2+2^{-2} & 2-2^{-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2+2^{-3} & 2-2^{-3} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2+2^{-4} & 2-2^{-4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2+2^{-5} & 2-2^{-5} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2+2^{-6} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

En esta matriz:

- la fila $i=1$ suma $2-2^{-1}$;
- la fila $i\geq 2$ suma 0;
- la columna j suma $-2^{-j}+2^{-j-1}=-2^{-j-1}$.

Por tanto,

$$\int f(x,y)\,d\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i,j) = -\frac{1}{2^{j+1}} \quad (j\in\mathbb{N})$$

implica

$$\int d\nu(y)\int f(x,y)\,d\mu(x) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}} = -\frac{1}{2},$$

mientras que

$$\int d\mu(x)\int f(x,y)\,d\nu(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(i,j) = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Como antes, el Teorema 2.8 (Fubini) impide que f sea integrable en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. □