

Tema 5: Integración en espacios producto

Problemas resueltos

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

Índice

1	Medibilidad en espacios producto	1
2	Medidas producto y el teorema de Fubini	2



1 Medibilidad en espacios producto

1. La representación de un rectángulo en la forma $A \times B$ no tiene por qué ser única. Determinar cuándo lo es.

Resolución. Que la representación no es única se puede ver con el siguiente contraejemplo: $\emptyset = X \times \emptyset = \emptyset \times Y = \emptyset \times \emptyset$. Sin embargo, cuando el rectángulo $A \times B$ es no vacío, la representación es única.

Ciertamente: si $P \times Q = R \times S$ es no vacío, entonces P, Q, R, S son no vacíos. Dados $x \in P$ e $y \in Q$, se tiene

$$(x, y) \in P \times Q = R \times S;$$

luego, $x \in R$ e $y \in S$, así que $P \subset R$ y $Q \subset S$. Por simetría, $R \subset P$ y $S \subset Q$. Se concluye que $P = R$ y $Q = S$, con lo que la representación es única. $\square$

2. Sea A un subconjunto no medible de X . ¿Es $A \times \emptyset$ un rectángulo medible?

Resolución. Sí, por cuanto $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times \emptyset$ satisface la Definición 1.2. $\square$

3. Demostrar que un rectángulo $A \times B$ es no medible si, y sólo si, o bien A es no medible y $B \neq \emptyset$, o bien B es no medible y $A \neq \emptyset$.

Resolución. Si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $A \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ si, y sólo si, tanto A como B son medibles (Teorema 1.13).

Más precisamente, el enunciado pide probar que equivalen:

- a) $A \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$; y
- b) $A \in \mathcal{S}$ ó $B = \emptyset$, y $A = \emptyset$ ó $B \in \mathcal{T}$; lo que, a su vez, equivale a:
- c) $A \in \mathcal{S}$ y $B \in \mathcal{T}$, ó $A = \emptyset$, ó $B = \emptyset$.

Por tanto, debemos demostrar que a) equivale a c).

$a) \Rightarrow c)$ Supongamos que $A \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Si A ó B son vacíos, no hay nada que probar. Si A y B no son vacíos, elegimos $x \in A$ e $y \in B$ para obtener, por el Teorema 1.13, que

$$(A \times B)_x = B \in \mathcal{T}, \quad (A \times B)^y = A \in \mathcal{S}.$$

$c) \Rightarrow a)$ Esto es evidente, porque los rectángulos medibles son $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medibles. $\square$

4. Probar que si $V \subset X \times Y$, entonces $(\chi_V)_x = \chi_{V_x}$ y $(\chi_V)^y = \chi_{V^y}$.

Resolución. Se tiene que $(\chi_V)_x(y) = \chi_V(x, y) = 1$ si, y sólo si $(x, y) \in V$, lo que ocurre si y sólo si, $y \in V_x$, o, equivalentemente, $\chi_{V_x}(y) = 1$. La demostración para $(\chi_V)^y$ es similar. $\square$

5. Demostrar que si f es $\mathcal{S}$ -medible y g es $\mathcal{T}$ -medible, entonces fg definida por $(fg)(x, y) = f(x)g(y)$ ($(x, y) \in X \times Y$) es $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible.

Resolución. Para $x \in X$ e $y \in Y$, la función $f^*(x, y) = f(x)$ es $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible, como lo es $g^*(x, y) = g(y)$. Luego, $fg = f^*g^*$ es $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible.

Para ver que $f^*(x, y) = f(x)$ es $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ escribimos:

$$\{(x, y) : f^*(x, y) > \alpha\} = \{(x, y) : f(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\} \times Y \in \mathcal{R} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}.$$

Que $g^*(x, y) = g(y)$ es $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible se prueba de modo similar. $\square$

2 Medidas producto y el teorema de Fubini

6. Sean μ, ν medidas completas. Probar que $\mu \times \nu$ puede no ser completa.

Resolución. Pongamos $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathcal{M}$, $\mu = \nu = m$. Sean A un subconjunto no medible de X , y $B \neq \emptyset$ un subconjunto medible de Y , de ν -medida nula. Entonces $A \times B \subset \mathbb{R} \times B$, con $(\mu \times \nu)(\mathbb{R} \times B) = \mu(\mathbb{R})\nu(B) = 0$. Pero, por el Ejercicio 3, $A \times B \notin \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. $\square$

7. Sea f una función medible definida en $\mathbb{R}$, con $0 < f < \infty$. Sean también $O_f = \{(x, y) : 0 \leq y < f(x)\}$ el conjunto de ordenadas de f , y $G = \{(x, y) : y = f(x)\}$ el grafo de f . Finalmente, sean $\mathcal{M}$ y m la σ -álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Demostrar los siguientes asertos:

- a) O_f es $(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ -medible.
- b) $(m \times m)(O_f) = \int f \, dx$.
- c) G es $(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ -medible.
- d) $(m \times m)(G) = 0$.

Resolución.

- a) Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones simples medibles, con límite f . Entonces O_{φ_n} es medible para cada $n \in \mathbb{N}$, y $O_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$. En efecto, si $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$ es simple medible (en su forma canónica), se tiene

$$O_{\varphi} = \bigcup_{n=1}^N \{(x, y) : x \in A_i, 0 \leq y < a_i\} = \bigcup_{n=1}^N A_i \times [0, a_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1)$$

y cada conjunto de esta unión es un rectángulo medible, por lo que O_{φ} también es medible. Además,

$$O_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$$

ya que, si $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y) \in O_{\varphi_n}$, esto es, $0 \leq y < \varphi_n(x) \leq f(x)$, así que $(x, y) \in O_f$; y recíprocamente, si $(x, y) \in O_f$ entonces, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $y < \varphi_n(x) \leq f(x)$, así que $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n}$.

- b) Si $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$ es simple medible, se verifica (1), con unión disjunta, de modo que

$$(m \times m)(O_{\varphi}) = \sum_{i=1}^N a_i m(A_i) = \int \varphi \, dx.$$

Por otra parte, si $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones simples medibles con límite f entonces $\{O_{\varphi_n}\}_{n=1}^{\infty}$ también es creciente con límite $\bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\varphi_n} = O_f$, y podemos escribir:

$$(m \times m)(O_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (m \times m)(O_{\varphi_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n \, dx = \int f \, dx.$$

- c) Pongamos $G_n = \{(x, y) : y = f(x) \leq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, basta probar que cada G_n ($n \in \mathbb{N}$) es medible. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = \{x : (x, y) \in G_n\}$, de modo que $X_n = \{x : f(x) \leq n\}$ es medible. Existen sucesiones $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples en X_n , tales que $\varphi_k \leq f$, $\psi_k \geq f$ ($k \in \mathbb{N}$) y $\varphi_k \nearrow f$, $\psi_k \searrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$; para obtener $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, elegimos una sucesión $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles creciente a $n - f$ y tomamos $\psi_k = n - \phi_k$ ($k \in \mathbb{N}$). Como los conjuntos O_{φ_k} y $O_{\psi_k}^* = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \psi_k(x)\}$ son medibles para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} (O_{\psi_k}^* \setminus O_{\varphi_k})$ también lo es.

- d) En vista de c), podemos aplicar a G el Teorema 2.1. Al igual que en dicho teorema, sea $\varphi(x) = m(G_x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Entonces $\varphi(x) = 0$ para cada x , de manera que, por la definición de medida producto (Definición 2.3),

$$(m \times m)(G) = \int \varphi \, dx = 0.$$

Se tiene que $\varphi(x) = 0$ para cada x porque, fijado x , $\chi_{G_x}(y) = 1$ si, y sólo si, $y = f(x)$, lo que implica

$$m(G_x) = \int \chi_{G_x}(y) \, dy = \int \chi_{\{f(x)\}}(y) \, dy = m(\{f(x)\}) = 0.$$

□

8. Sea f una función continua en $R = [a, b] \times [c, d]$, y sean $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathcal{M}$. Probar que

$$\int_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Resolución. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.8 (Fubini), ya que, al ser acotada sobre un conjunto de medida finita, f es integrable en él. Más precisamente,

$$\int_R |f(x, y)| \, dx \, dy \leq M(m \times m)(R) = M(b-a)(d-c) < \infty,$$

donde M es una cota de la función continua f sobre el compacto R .

□

9. Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$, entonces $fg \in L^1(\mu \times \nu)$.

Resolución. Por el Ejercicio 5, fg es $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible. Ahora, en virtud del Teorema 2.7 (Tonelli-Hobson),

$$\int_{X \times Y} |fg| \, d(\mu \times \nu) = \int_X |f| \, d\mu \int_Y |g| \, d\nu < \infty.$$

□

10. Dada $f \in L^1(0, a)$, se define

$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, dt \quad (0 < x \leq a).$$

Probar que $g \in L^1(0, a)$, con

$$\int_0^a g \, dx = \int_0^a f \, dt. \quad (2)$$

Resolución. Se quiere probar que

$$\int_0^a dx \left| \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, dt \right| < \infty,$$

para lo cual bastaría ver que

$$\int_0^a dx \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} \, dt < \infty.$$

Invirtiendo el orden de integración, esta integral se transforma en

$$\int_0^a dt \int_0^t \frac{|f(t)|}{t} \, dx = \int_0^a |f(t)| \, dt < \infty.$$

Sigue del Corolario 2.9 que $g \in L^1(0, a)$ y que las integrales iteradas coinciden. Integramos cambiando el orden igual que antes (sin el valor absoluto) para obtener (2), como se pretendía.

□

11. Integrando $e^{-y} \sin 2xy$ respecto de x e y , demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin^2 y}{y} \, dy = \frac{1}{4} \ln 5.$$

Resolución. Para $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-y} \sin 2xy \, dx &= e^{-y} \int_0^1 \sin 2xy \, dx = \frac{e^{-y}}{2y} \cos 2xy \Big|_1^0 \\ &= \frac{e^{-y}}{2y} (1 - \cos 2y) = \frac{e^{-y}}{2y} (1 - \cos^2 y + \sin^2 y) = \frac{e^{-y} \sin^2 y}{y}.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty |e^{-y} \sin 2xy| \, dy \leq \int_0^1 dx \int_0^\infty e^{-y} \, dy = 1 < \infty.$$

El Corolario 2.9 asegura entonces que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin^2 y}{y} \, dy = \int_0^\infty dy \int_0^1 e^{-y} \sin 2xy \, dx = \int_0^1 dx \int_0^\infty e^{-y} \sin 2xy \, dy.$$

Calculamos la integral cíclica del segundo miembro integrando por partes dos veces, para obtener

$$\int_0^\infty e^{-y} \sin 2xy \, dy = \frac{2x}{4x^2 + 1}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-y} \sin 2xy \, dy &= -\frac{\cos 2xy}{2x} e^{-y} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\cos 2xy}{2x} e^{-y} \, dy \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} \left[\frac{\sin 2xy}{2x} e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin 2xy}{2x} e^{-y} \, dy \right] \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} \int_0^\infty e^{-y} \sin 2xy \, dy,\end{aligned}$$

de donde se despeja fácilmente la integral buscada. Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin^2 y}{y} \, dy &= \int_0^1 \frac{2x}{4x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{8x}{4x^2 + 1} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln 5.\end{aligned}$$

□

12. Integrando $e^{-xy} \sin 2y$ respecto de x e y , probar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin 2y}{y} \, dy = \arctg 2.$$

Resolución. Fijado $N > 0$, se tiene que

$$\int_0^1 |e^{-xy} \sin 2y| \, dx = \frac{|\sin 2y|}{y} (1 - e^{-y}) \in L^1(0, N).$$

Por tanto (Corolario 2.9),

$$\int_0^N dy \int_0^1 e^{-xy} \sin 2y \, dx = \int_0^1 dx \int_0^N e^{-xy} \sin 2y \, dy. \quad (3)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\int_0^N e^{-xy} \sin 2y \, dy &= -\frac{e^{-xy} \cos 2y}{2} \Big|_0^N - \frac{x}{2} \int_0^N e^{-xy} \cos 2y \, dy \\ &= -\frac{e^{-xy} \cos 2y}{2} \Big|_0^N - \frac{x e^{-xy} \sin 2y}{4} \Big|_0^N - \frac{x^2}{4} \int_0^N e^{-xy} \sin 2y \, dy\end{aligned}$$

implica

$$\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) \int_0^N e^{-xy} \sin 2y dy = \frac{1 - e^{-xN} \cos 2N}{2} - \frac{x e^{-xN} \sin 2N}{4},$$

de donde, finalmente,

$$\int_0^N e^{-xy} \sin 2y dy = \frac{2}{x^2 + 4} - \frac{x}{x^2 + 4} e^{-xN} \sin 2N - \frac{2}{x^2 + 4} e^{-xN} \cos 2N.$$

Por convergencia dominada, la integral del segundo miembro de (3) es entonces igual a

$$\int_0^1 dx \int_0^N e^{-xy} \sin 2y dy = \arctg \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Integrando el primer miembro de (3) y combinando el resultado con el que acabamos de obtener encontramos que

$$\int_0^N \left(\frac{\sin 2y}{y} - \frac{e^{-y} \sin 2y}{y} \right) dy = \arctg \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Pero

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{\sin 2y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$$

por una integral de contorno estándar, y se concluye que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin 2y}{y} dy = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2} = \arctg 2.$$

Al objeto de calcular la integral de contorno, consideramos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

y, para $N > 0$ grande y $\varepsilon > 0$ pequeño, definimos

$$C = [-N, -\varepsilon] - \gamma_\varepsilon + [\varepsilon, N] + \gamma_N,$$

donde

$$\gamma_r = \{re^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$$

denota la semicircunferencia superior de centro en el origen y radio $r > 0$, positivamente orientada. Como f es analítica dentro y sobre C , el teorema de Cauchy garantiza que su integral a lo largo de C es nula:

$$0 = \oint_C f(z) dz = \int_{-N}^{-\varepsilon} f(x) dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^N f(x) dx + \int_{\gamma_N} f(z) dz.$$

Además,

$$\text{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = e^0 = 1$$

implica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \pi i \text{Res}(f; 0) = \pi i.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx &= \int_{-N}^N \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-N}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^N f(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz - \int_{\gamma_N} f(z) dz = \pi i - \int_{\gamma_N} f(z) dz. \end{aligned}$$

Por otra parte, la simetría $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$ y el lema de Jordan ($\operatorname{sen} t \geq 2t/\pi$ para $0 \leq t \leq \pi/2$) permiten escribir:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_N} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi e^{-N \operatorname{sen} t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-N \operatorname{sen} t} dt \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2Nt/\pi} dt = \frac{\pi}{N} (1 - e^{-N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x} dx = \pi i.$$

Sigue que

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi,$$

y concluimos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, verifiquemos que

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 2. \quad (4)$$

Aplicando la fórmula para la diferencia de arcotangentes,

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy},$$

con $y = 1/2$, resulta:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} \frac{x - 1/2}{1 + x/2} = \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, el primer sumando del primer miembro de esta igualdad tiende a $\pi/2$ y el segundo miembro tiende a $\operatorname{arctg} 2$, lo que proporciona (4). $\square$

13. Dados $f \in L^1(0, \infty)$, $\alpha > 0$, pongamos

$$g_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (x > 0).$$

Demostrar que

$$\alpha \int_0^y g_\alpha(x) dx = g_{\alpha+1}(y) \quad (y > 0).$$

Resolución. Fijemos $y > 0$. Para obtener

$$\int_0^y g_\alpha(x) dx = \int_0^y dx \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

consideramos la integral iterada del módulo, en el orden opuesto:

$$\begin{aligned} \int_0^y |f(t)| dt \int_t^y (x-t)^{\alpha-1} dx &= \int_0^y |f(t)| \left. \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} \right|_t^y dt \\ &= \int_0^y |f(t)| \frac{(y-t)^\alpha}{\alpha} dt \leq \frac{y^\alpha}{\alpha} \int_0^\infty |f(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

Luego (Corolario 2.9), es lícito calcular la integral que se pide cambiando el orden de integración, con lo que resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^y g_\alpha(x) dx &= \int_0^y f(t) dt \int_t^y (x-t)^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^y (y-t)^\alpha f(t) dt = \frac{1}{\alpha} g_{\alpha+1}(y). \end{aligned} \quad \square$$

14. Sean $a > 0$, $f \in L^1(0, a)$, $f \geq 0$, y

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x > 0).$$

Probar la igualdad

$$\int_0^a f(x) \ln \frac{1}{x} dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x} dx + F(a) \ln \frac{1}{a}.$$

Resolución. Se cumple que

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{F(x)}{x} dx &= \int_0^a \frac{1}{x} dx \int_0^x f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \int_t^a \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^a (\ln a - \ln t) f(t) dt = \int_0^a f(x) \ln \frac{1}{x} dx - F(a) \ln \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

donde el cambio en el orden de integración está justificado porque los integrandos son no negativos (Corolario 2.9). $\square$

15. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas de f sobre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ son iguales, aunque f no es integrable.

Resolución. Para $y \neq 0$ es

$$\int_{-1}^1 f(x, y) dx = \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx = y \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx = 0,$$

ya que el integrando es impar en x y el intervalo de integración, simétrico respecto al origen; y es claro que esta integral también se anula para $y = 0$. Análogamente,

$$\int_{-1}^1 f(x, y) dy = 0 \quad (x \in [-1, 1]).$$

Si f fuera integrable en $[-1, 1] \times [-1, 1]$ entonces lo sería en $[0, 1] \times [0, 1]$, y el Teorema 2.8 (Fubini) obligaría a que

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx < \infty.$$

Sin embargo,

$$\int_0^1 f(x, y) dx = -\frac{y}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 = -\frac{y}{2} \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + 1} \right),$$

con

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + 1} \right) dy = \frac{1}{2} \ln y \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \ln(y^2 + 1) \Big|_0^1 = \infty - \frac{1}{4} \ln 2 = \infty. \quad \square$$

16. Probar que si

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)),$$

entonces

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$$

¿Contradice este resultado el Teorema 2.8 (Fubini)?

Resolución. Se advierte por inspección (derivada de un cociente) que

$$\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{y}{x^2 + y^2} + C. \quad (5)$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{1}{x^2 + 1},$$

así que la primera integral iterada vale

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Intercambiando las variables x e y encontramos el valor de la segunda:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{\pi}{4}.$$

No se contradice el Teorema 2.8 porque f no es integrable en $[0, 1] \times [0, 1]$. Para verlo, basta probar que f^+ no es integrable en $[0, 1] \times [0, 1]$, lo cual se justifica mediante el Teorema 2.5 (Tonelli-Hobson):

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{1}{2x} dx = \infty. \quad \square$$

17. Se define f sobre $[0, 1] \times [0, 1]$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n}, & 2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}, 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1} \\ -2^{2n+1}, & 2^{-n-1} \leq x < 2^{-n}, 2^{-n} \leq y < 2^{-n+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy. \quad (6)$$

¿Es f integrable en su dominio?

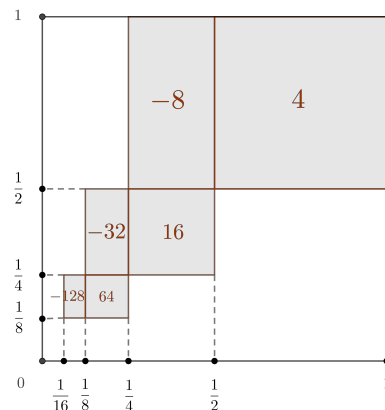
Resolución. Trazando un diagrama para los primeros valores de n se pone de manifiesto que

$$\int_0^1 f(x, y) dx = 0 \quad (0 < y < 1), \quad (7)$$

mientras que

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases} \quad (8)$$

	x	y	$f(x, y)$
$n = 1$	$[1/2, 1)$	$[1/2, 1)$	4
	$[1/4, 1/2)$		-8
$n = 2$	$[1/4, 1/2)$	$[1/4, 1/2)$	16
	$[1/8, 1/4)$		-32
$n = 3$	$[1/8, 1/4)$	$[1/8, 1/4)$	64
	$[1/16, 1/8)$		-128



Comprobémoslo analíticamente. Dado $0 < y < 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$, en cuyo caso

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x, y) dx &= 2^{2n} (2^{-n+1} - 2^{-n}) - 2^{2n+1} (2^{-n} - 2^{-n-1}) \\ &= 2^{2n} \cdot 2^{-n} - 2^{2n} (2^{-n+1} - 2^{-n}) \\ &= 2^n - 2^n = 0,\end{aligned}$$

y vale (7).

Similarmente, fijemos $0 < x < 1$.

- Si $1/2 \leq x < 1$ ($n = 1$), entonces

$$\int_0^1 f(x, y) dy = 4 \frac{1}{2} = 2.$$

- Si $0 < x < 1/2$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tal que $2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}$ y, o bien $2^{-n} \leq y < 2^{-n+1}$ (en cuyo caso, $f(x, y) = 2^{2n}$), o bien y varía entre $2^{-(n-1)}$ y $2^{-(n-1)+1}$, es decir, $2^{-n+1} \leq y < 2^{-n+2}$ (en cuyo caso, $f(x, y) = -2^{2(n-1)+1} = -2^{2n-1}$); así pues,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x, y) dy &= 2^{2n} (2^{-n+1} - 2^{-n}) - 2^{2n-1} (2^{-n+2} - 2^{-n+1}) \\ &= 2^{2n} (2^{-n+1} - 2^{-n}) - 2^{2n} (2^{-n+1} - 2^{-n}) = 0 \quad (2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}, n \geq 2),\end{aligned}$$

y vale (8).

Luego, se cumple (6):

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx &= 0, \\ \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy &= 0 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1.\end{aligned}$$

Puesto que las integrales iteradas son distintas, el Teorema 2.8 (Fubini) impide que f sea integrable en $[0, 1] \times [0, 1]$. $\square$

18. Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x = y \\ -2 + 2^{-x}, & x = y + 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probar que las integrales iteradas de f son distintas. ¿Es f integrable en su dominio?

Resolución. Fijado y , se tiene

$$\int f(x, y) d\mu(x) = -2^{-y-1},$$

de modo que

$$\int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = -\frac{1}{2};$$

pero

$$\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = \frac{3}{2}.$$

Para mayor claridad, escribimos los valores $f(i, j)$ en forma matricial:

$$(f(i, j))_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} 2-2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2+2^{-2} & 2-2^{-2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2+2^{-3} & 2-2^{-3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2+2^{-4} & 2-2^{-4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -2+2^{-5} & 2-2^{-5} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2+2^{-6} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

En esta matriz:

- la fila $i = 1$ suma $2 - 2^{-1}$;
- la fila $i \geq 2$ suma 0;
- la columna j suma $-2^{-j} + 2^{-j-1} = -2^{-j-1}$.

Por tanto,

$$\int f(x, y) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i, j) = -\frac{1}{2^{j+1}} \quad (j \in \mathbb{N})$$

implica

$$\int dv(y) \int f(x, y) d\mu(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = -\frac{1}{2},$$

mientras que

$$\int d\mu(x) \int f(x, y) dv(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(i, j) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Como antes, el Teorema 2.8 (Fubini) impide que f sea integrable en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

□