

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Solucionario de la Autoevaluación 1

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)
6. Pregunta [6](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la medida de Lebesgue es falsa?
- La medida de Lebesgue de un conjunto no contable es siempre positiva.
 - La medida de Lebesgue de un punto es nula.
 - La medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ es infinita.
 - La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.
- b) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la σ -álgebra de Lebesgue es cierta?
- Contiene todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
 - Es la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.
 - Contiene estrictamente a la σ -álgebra de Borel.
 - Está estrictamente contenida en la σ -álgebra de Borel.
- c) ¿Cuál de las siguientes condiciones no equivale a que $E \in \mathcal{M}$?
- E es unión de un F_σ y un conjunto de medida nula.
 - Existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $G \supset E$ y $m(G) = m(E)$.
 - $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.
 - $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.
- d) ¿Cuál de las siguientes funciones es integrable Lebesgue en $[0, \infty)$?
- $f(x) = x^{-1/2}$.
 - $f(x) = x^{-1}$.
 - $f(x) = e^{-x}$.
 - $f(x) = x^{-1} \sin x$.
- e) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto de Vitali es falsa?
- No es medible Lebesgue.
 - Es no numerable.
 - No es compacto.
 - Tiene medida de Lebesgue finita.
- f) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto de Vitali es cierta?
- Tiene medida exterior nula.
 - Tiene medida exterior estrictamente positiva.
 - Es unión de un boreliano y un conjunto de medida nula.
 - Es medible Borel, pero no medible Lebesgue.
- g) Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles no negativas en $\mathbb{R}$ que converge c.t.p. a una función f . Supongamos que $f_n \leq f_{n+1}$ c.t.p. ($n \in \mathbb{N}$). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = \int f dx$.
 - f es medible.
 - $\int f dx < \infty$.
 - $f_n \leq f$ c.t.p. ($n \in \mathbb{N}$).
- h) Supongamos que f es medible no negativa. ¿Cuál de los siguientes procedimientos no es, en general, válido para calcular su integral?
- Aproximar f por una sucesión creciente de funciones simples medibles y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - Aproximar f por una sucesión de funciones medibles no negativas y aplicar el lema de Fatou.
 - Aproximar f por la sucesión $f_n = \min\{f, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - Expresar $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ como una serie de funciones integrables tales que $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| dx < \infty$.
- i) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ es cierta?
- Es integrable Riemann, pero no integrable Lebesgue.
 - Es integrable Lebesgue, pero no integrable Riemann.
 - Es integrable Riemann y, por tanto, integrable Lebesgue.
 - Es integrable Lebesgue y, por tanto, integrable Riemann.
- j) ¿Cuál de las siguientes medidas no es completa?
- La medida de Lebesgue restringida a la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.
 - La medida de Lebesgue sobre la σ -álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
 - La medida cardinal sobre la σ -álgebra de las partes de $\mathbb{N}$.
 - La medida definida por $\varphi(E) = \int_E f dx$ ($E \in \mathcal{M}$), donde f es una función medible no negativa.

Resolución.

- | | | | | |
|---------|---------|--------|---------|--|
| a) i. | c) iv. | e) iv. | g) iii. | i) ii. |
| b) iii. | d) iii. | f) ii. | h) ii. | j) i. □ |

2. [3 puntos]

- a) Demostrar que todo conjunto de medida finita es casi acotado, en el sentido siguiente: si $E \in \mathcal{M}$, con $m(E) < \infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m(E \setminus [-N, N]) < \varepsilon$. [Sugerencia: Aplicar la propiedad de continuidad de la medida de Lebesgue para sucesiones decrecientes.]
- b) Sea $A \subset [0, 1]$ un conjunto no medible tal que $0 \in A$, y considérese la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \in A^c = [0, 1] \setminus A. \end{cases}$$

Justificar que existe un tal A y probar que f no es medible, aunque $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- c) Sea f una función medible sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Entendiendo por función simple cualquier combinación lineal finita de funciones características, demostrar que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles puntualmente convergente a f , tal que

$$|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| \leq |f(x)| \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}).$$

[Sugerencia: Descomponer f en términos de $f^{\pm}$ y aplicar el teorema de aproximación de Lebesgue.]

Resolución.

- a) Sea $E \in \mathcal{M}$, con $m(E) < \infty$, y consideremos la sucesión de conjuntos dada por $E \setminus [-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$); la monotonía de la medida hace que todos ellos tengan medida finita. Esta sucesión es decreciente:

$$E \setminus [-n, n] \supset E \setminus [-(n+1), n+1] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Además, la intersección de todos estos conjuntos es vacía:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus [-n, n]) = \emptyset,$$

ya que cualquier punto $x \in E$ estará en $[-n, n]$ para n suficientemente grande. La propiedad de continuidad de la medida de Lebesgue para sucesiones decrecientes asegura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E \setminus [-n, n]) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus [-n, n])\right) = m(\emptyset) = 0.$$

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(E \setminus [-N, N]) < \varepsilon.$$

- b) Sea $V \subset [0, 1]$ el conjunto de Vitali. Este conjunto no es medible, luego no puede ser vacío. Si $v \in V$, entonces $0 \in A = V - v$ y A no es medible, porque la medibilidad Lebesgue se preserva por traslaciones. Para demostrar que f no es medible, observamos que $A = f^{-1}([0, 1])$. Si la función f fuera medible, también lo sería el conjunto A , una contradicción. Sin embargo, dado cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x : f(x) = \alpha\} = \begin{cases} \{\alpha\}, & \alpha \in A \\ \{-\alpha\}, & -\alpha \in A^c \\ \emptyset, & \text{resto.} \end{cases}$$

En todos los casos, $\{x : f(x) = \alpha\}$ es un conjunto unitario o vacío y, por lo tanto, medible.

- c) Sea f una función medible sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Escribimos $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\}$. Ambas funciones, f^+ y f^- , son medibles no negativas. Por el teorema de aproximación de Lebesgue, para f^+ , existe una sucesión de funciones simples $\{\varphi_n^+\}_{n=1}^\infty$, tal que

$$0 \leq \varphi_n^+(x) \leq \varphi_{n+1}^+(x) \leq f^+(x) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N})$$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^+(x) = f^+(x)$ ($x \in X$). Análogamente, para f^- , existe una sucesión de funciones simples $\{\varphi_n^-\}_{n=1}^\infty$, tal que

$$0 \leq \varphi_n^-(x) \leq \varphi_{n+1}^-(x) \leq f^-(x) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N})$$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^-(x) = f^-(x)$ ($x \in X$). Definimos $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ ($n \in \mathbb{N}$). Cada una de estas nuevas funciones es simple medible, con

$$\varphi_n^+(x) + \varphi_n^-(x) \leq \varphi_{n+1}^+(x) + \varphi_{n+1}^-(x) \leq f^+(x) + f^-(x) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}),$$

es decir,

$$|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| \leq |f(x)| \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}),$$

y claramente $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ ($x \in X$). □

3. [1.5 puntos] Probar las dos afirmaciones siguientes y responder razonadamente a las cuestiones que se plantean a continuación:

- a) Para cualquier conjunto $E \in \mathcal{M}$, se verifican las igualdades:

$$m(E) = \sup\{m(F) : F \text{ cerrado}, F \subset E\}; \quad m(E) = \sup\{m(C) : C \text{ compacto}, C \subset E\}.$$

- b) (Teorema de Lusin) Sea $E \in \mathcal{M}$, con $m(E) < \infty$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $C \subset E$, tal que $m(E \setminus C) < \varepsilon$ y que la restricción $f|_C$ de f a C es continua.
- c) ¿Sigue siendo válida esta versión del teorema de Lusin si se omite la hipótesis de que $m(E) < \infty$?
- d) Bajo las mismas hipótesis de b), ¿se podría conseguir que C fuera abierto (relativo) en vez de compacto?

Resolución.

- a) i) Cuando $m(E) = 0$, la primera de las igualdades es clara. Supongamos que $m(E) > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, el Teorema 2.31 del Tema 1 proporciona un conjunto cerrado F tal que $F \subset E$ y $m(E \setminus F) \leq \varepsilon$. Como $m(E) = m(F) + m(E \setminus F)$, se cumple que $m(E) = \infty$ si, y sólo si, $m(F) = \infty$, y en tal caso

$$m(E) = \sup\{m(F) : F \text{ cerrado}, F \subset E\}. \quad (1)$$

Si $m(E) < \infty$, sigue que

$$m(F) = m(E) - m(E \setminus F) \geq m(E) - \varepsilon,$$

y la definición de supremo muestra que también se verifica (1).

- ii) Si E está acotado, (1) se convierte en

$$m(E) = \sup\{m(C) : C \text{ compacto}, C \subset E\}. \quad (2)$$

Si E no está acotado, escribimos $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, donde $E_n = E \cap [-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Como la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ es

creciente, sigue del Teorema 2.29 del Tema 1 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = m(E).$$

Cuando $m(E) = \infty$, dado $k \in \mathbb{N}$, algún $E_{n_k} \subset E$ es tal que $m(E_{n_k}) > k + 1$. Puesto que E_{n_k} está acotado, existe un compacto $C_{n_k} \subset E_{n_k} \subset E$, tal que

$$m(C_{n_k}) + 1 \geq m(E_{n_k}) > k + 1,$$

y se cumple (2). Cuando $m(E) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(E) \leq m(E_k) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya que E_k está acotado, se dispone de un compacto $C_k \subset E_k \subset E$, con

$$m(E_k) \leq m(C_k) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así pues,

$$m(E) \leq m(C_k) + \varepsilon,$$

completando la resolución de este apartado.

- b) Aplicamos la primera versión del teorema de Lusin (Teorema 2.62 del Tema 1): dados $E \in \mathcal{M}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $\varepsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset E$, tal que $m(E \setminus F) < \varepsilon/2$ y que la restricción $f|_F$ de f a F es continua. Atendiendo al apartado a), como $m(F) \leq m(E) < \infty$, existe un compacto $C \subset F$, tal que $m(F \setminus C) < \varepsilon/2$. Luego,

$$m(E \setminus C) \leq m(E \setminus F) + m(F \setminus C) < \varepsilon,$$

y $f|_C$ es continua porque $C \subset F$ y $f|_F$ lo es.

- c) No es posible remover tal restricción si se pretende que C sea compacto, ya que los compactos tienen medida finita, y la relación $E = C \cup (E \setminus C)$, con $m(E \setminus C) < \varepsilon$, obliga a que $m(E) < \infty$.
- d) Tampoco se puede conseguir que C sea abierto. Considérese la función de Dirichlet $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$. Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$ y, dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$U_n = \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right) \cap [0, 1].$$

La unión $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ de estos conjuntos contiene a $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, es abierto en $[0, 1]$, y tiene medida menor que ε . Su complementario $C = [0, 1] \setminus U$ es el compacto cuya existencia postula el teorema de Lusin: como $f|_C$ se anula idénticamente, resulta obvio que es continua. Sin embargo, no existe un abierto relativo donde f sea continua, porque esta función toma los valores 0 y 1 en cualquier entorno abierto de cualquier punto. $\square$

4. [1.5 puntos] Se considera la composición $h = f \circ g$ de dos funciones f y g , reales y de variable real.

- a) ¿Cuál(es) de las siguientes condiciones sobre f y g garantiza(n) que h es medible? i) f es continua y g es medible; ii) f es medible y g es continua; iii) f, g son ambas medibles.
- b) ¿Qué se puede afirmar sobre h si en el apartado anterior se reemplaza «medible» por «medible Borel»?

Justificar la respuesta en cada caso, dando la demostración o un contraejemplo.

- a) i) f continua y g medible implica h medible.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(f \circ g)^{-1}(\alpha, \infty) = g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha, \infty)$. Como f es continua, el conjunto $f^{-1}(\alpha, \infty)$ es abierto; en particular, un boreliano. Y puesto que g es medible, el Ejemplo 2.49 del Tema 1 garantiza que $g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha, \infty) = g^{-1}(f^{-1}(\alpha, \infty))$ es medible.

ii) f medible y g continua no implica h medible.

Algún conjunto tipo Cantor $C^{(\alpha)}$ de medida positiva ($0 < \alpha < 1$) contiene un conjunto no medible B . Existe un homeomorfismo F entre $C^{(\alpha)}$ y el conjunto de Cantor C . Por la completitud de la medida de Lebesgue, el conjunto $P = F(B) \subset C$ es medible. De este modo, $\chi_B = \chi_P \circ F$, donde F es continua, χ_P es medible, y χ_B no lo es, lo que proporciona el contraejemplo deseado. Véase el Ejercicio 50 del Tema 1.

iii) f, g medibles no implica h medible.

Como toda función continua es medible, vale la misma respuesta negativa y contraejemplo del apartado precedente.

b) i) f continua y g medible Borel implica h medible Borel.

Sirve la misma demostración anterior. El resultado crucial es que la clase $\mathcal{A}$ de los conjuntos cuya antiimagen es medible constituye una σ -álgebra (Ejercicio 18 del Tema 1). Si la función es medible, $\mathcal{A}$ contiene a los intervalos y, por lo tanto, también a los borelianos. Así pues, la antiimagen de un boreliano por una función medible es medible, bajo cualesquiera condiciones de medibilidad.

ii) f medible Borel y g continua implica h medible Borel.

Repitamos el argumento: si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(f \circ g)^{-1}(\alpha, \infty) = g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha, \infty)$. Como f es medible Borel, el conjunto $f^{-1}(\alpha, \infty)$ es un boreliano. Y puesto que g es continua, es medible Borel, así que $g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha, \infty) = g^{-1}(f^{-1}(\alpha, \infty))$ es medible Borel. Este argumento falla para la medibilidad Lebesgue porque se necesitaría que la antiimagen de un medible Lebesgue por una función continua fuese medible Lebesgue, propiedad que es falsa, en general. Como contraejemplo podemos tomar el homeomorfismo F entre conjuntos de Cantor considerado anteriormente: $B = F^{-1}(P)$, con F continua, P medible y B no medible.

iii) f, g medibles Borel implica h medible Borel.

Nuevamente: si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(f \circ g)^{-1}(\alpha, \infty) = g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha, \infty)$. Como f es medible Borel, el conjunto $f^{-1}(\alpha, \infty)$ es un boreliano. Y puesto que g es medible Borel, $g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha, \infty) = g^{-1}(f^{-1}(\alpha, \infty))$ es también un boreliano. Este argumento falla para la medibilidad Lebesgue porque se necesitaría que la antiimagen de un medible Lebesgue por una función medible Lebesgue también fuese medible Lebesgue, propiedad que, como acabamos de ver, es falsa.

5. [1.5 puntos] Se define la función f sobre el intervalo $(0, 1)$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1 + \lfloor x^{-1} \rfloor}{\lfloor x^{-1} \rfloor}, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde, como habitualmente, $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x .

a) Enunciar el teorema de Beppo Levi.

b) Aplicarlo para probar que

$$\int_0^1 f \, dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Resolución.

a) Teorema 1.22 del Tema 2 (Beppo Levi). Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces,

$$\int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \, dx.$$

b) Puesto que $\mathbb{Q}$ tiene medida nula, no se pierde generalidad asumiendo que

$$f(x) = \frac{1 + \lfloor x^{-1} \rfloor}{\lfloor x^{-1} \rfloor} \quad (0 < x < 1).$$

Ahora,

$$f(x) = \frac{1+n}{n} \quad ((n+1)^{-1} < x \leq n^{-1}, n \in \mathbb{N}),$$

o, en forma compacta,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n} \chi_{((n+1)^{-1}, n^{-1}]}. \quad \square$$

Sin más que aplicar el teorema de Beppo Levi, ya obtenemos:

$$\int_0^1 f \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n} \int_0^1 \chi_{((n+1)^{-1}, n^{-1}]} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

6. [1.5 puntos]

a) Enunciar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

b) Aplicarlo para demostrar que, si $a > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} \, dx = 0.$$

Resolución.

a) Teorema 1.38 del Tema 2 (convergencia dominada). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), con g integrable, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p.. Entonces f es integrable, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx = \int f \, dx.$$

b) Fijemos $a > 0$. Efectuando el cambio de variable $t = x\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), hemos de probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{-t^2} \chi_{(a\sqrt{n}, \infty)}(t) \, dt = 0.$$

Se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-t^2} \chi_{(a\sqrt{n}, \infty)}(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Como

$$e^{-t^2} \chi_{(a\sqrt{n}, \infty)}(t) \leq e^{-t^2} \chi_{(0, \infty)}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

y

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \infty,$$

es lícito aplicar el teorema de la convergencia dominada para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{-t^2} \chi_{(a\sqrt{n}, \infty)}(t) \, dt = \int \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-t^2} \chi_{(a\sqrt{n}, \infty)}(t) \, dt = 0,$$

como se pretendía. □