

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Autoevaluación 1

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)
6. Pregunta [6](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la medida de Lebesgue es falsa?
- La medida de Lebesgue de un conjunto no contable es siempre positiva.
 - La medida de Lebesgue de un punto es nula.
 - La medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ es infinita.
 - La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.
- b) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la σ -álgebra de Lebesgue es cierta?
- Contiene todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
 - Es la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.
 - Contiene estrictamente a la σ -álgebra de Borel.
 - Está estrictamente contenida en la σ -álgebra de Borel.
- c) ¿Cuál de las siguientes condiciones no equivale a que $E \in \mathcal{M}$?
- E es unión de un F_σ y un conjunto de medida nula.
 - Existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $G \supset E$ y $m(G) = m(E)$.
 - $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.
 - $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.
- d) ¿Cuál de las siguientes funciones es integrable Lebesgue en $[0, \infty)$?
- $f(x) = x^{-1/2}$.
 - $f(x) = x^{-1}$.
 - $f(x) = e^{-x}$.
 - $f(x) = x^{-1} \sin x$.
- e) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto de Vitali es falsa?
- No es medible Lebesgue.
 - Es no numerable.
 - No es compacto.
 - Tiene medida de Lebesgue finita.
- f) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto de Vitali es cierta?
- Tiene medida exterior nula.
 - Tiene medida exterior estrictamente positiva.
 - Es unión de un boreliano y un conjunto de medida nula.
 - Es medible Borel, pero no medible Lebesgue.
- g) Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles no negativas en $\mathbb{R}$ que converge c.t.p. a una función f . Supongamos que $f_n \leq f_{n+1}$ c.t.p. ($n \in \mathbb{N}$). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = \int f dx$.
 - f es medible.
 - $\int f dx < \infty$.
 - $f_n \leq f$ c.t.p. ($n \in \mathbb{N}$).
- h) Supongamos que f es medible no negativa. ¿Cuál de los siguientes procedimientos no es, en general, válido para calcular su integral?
- Aproximar f por una sucesión creciente de funciones simples medibles y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - Aproximar f por una sucesión de funciones medibles no negativas y aplicar el lema de Fatou.
 - Aproximar f por la sucesión $f_n = \min\{f, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - Expresar $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ como una serie de funciones integrables tales que $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| dx < \infty$.
- i) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ es cierta?
- Es integrable Riemann, pero no integrable Lebesgue.
 - Es integrable Lebesgue, pero no integrable Riemann.
 - Es integrable Riemann y, por tanto, integrable Lebesgue.
 - Es integrable Lebesgue y, por tanto, integrable Riemann.
- j) ¿Cuál de las siguientes medidas no es completa?
- La medida de Lebesgue restringida a la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.
 - La medida de Lebesgue sobre la σ -álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
 - La medida cardinal sobre la σ -álgebra de las partes de $\mathbb{N}$.
 - La medida definida por $\varphi(E) = \int_E f dx$ ($E \in \mathcal{M}$), donde f es una función medible no negativa.

2. [3 puntos]

- a) Demostrar que todo conjunto de medida finita es casi acotado, en el sentido siguiente: si $E \in \mathcal{M}$, con $m(E) < \infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m(E \setminus [-N, N]) < \varepsilon$. [Sugerencia: Aplicar la propiedad de continuidad de la medida de Lebesgue para sucesiones decrecientes.]

b) Sea $A \subset [0, 1]$ un conjunto no medible tal que $0 \in A$, y considérese la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \in A^c = [0, 1] \setminus A. \end{cases}$$

Justificar que existe un tal A y probar que f no es medible, aunque $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Sea f una función medible sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Entendiendo por función simple cualquier combinación lineal finita de funciones características, demostrar que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles puntualmente convergente a f , tal que

$$|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| \leq |f(x)| \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}).$$

[Sugerencia: Descomponer f en términos de $f^{\pm}$ y aplicar el teorema de aproximación de Lebesgue.]

3. **[1.5 puntos]** Probar las dos afirmaciones siguientes y responder razonadamente a las cuestiones que se plantean a continuación:

a) Para cualquier conjunto $E \in \mathcal{M}$, se verifican las igualdades:

$$m(E) = \sup\{m(F) : F \text{ cerrado}, F \subset E\}; \quad m(E) = \sup\{m(C) : C \text{ compacto}, C \subset E\}.$$

b) (Teorema de Lusin) Sea $E \in \mathcal{M}$, con $m(E) < \infty$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $C \subset E$, tal que $m(E \setminus C) < \varepsilon$ y que la restricción $f|_C$ de f a C es continua.

c) ¿Sigue siendo válida esta versión del teorema de Lusin si se omite la hipótesis de que $m(E) < \infty$?

d) Bajo las mismas hipótesis de b), ¿se podría conseguir que C fuera abierto (relativo) en vez de compacto?

4. **[1.5 puntos]** Se considera la composición $h = f \circ g$ de dos funciones f y g , reales y de variable real.

a) ¿Cuál(es) de las siguientes condiciones sobre f y g garantiza(n) que h es medible? i) f es continua y g es medible; ii) f es medible y g es continua; iii) f, g son ambas medibles.

b) ¿Qué se puede afirmar sobre h si en el apartado anterior se reemplaza «medible» por «medible Borel»?

Justificar la respuesta en cada caso, dando la demostración o un contraejemplo.

5. **[1.5 puntos]** Se define la función f sobre el intervalo $(0, 1)$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1 + \lfloor x^{-1} \rfloor}{\lfloor x^{-1} \rfloor}, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde, como habitualmente, $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x .

a) Enunciar el teorema de Beppo Levi.

b) Aplicarlo para probar que

$$\int_0^1 f \, dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. **[1.5 puntos]**

a) Enunciar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

b) Aplicarlo para demostrar que, si $a > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} \, dx = 0.$$