

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto

Autoevaluación 1

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$). ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ admite una subsucesión convergente c.t.p..
 - Existe $f \in L^p(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.
 - Si $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para algún q , con $1 \leq q \leq \infty$, entonces existe $f \in L^q(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_q = 0$.
 - Todos los anteriores.
- b) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. ¿Qué condición es necesaria y suficiente para que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$ con $p < q$?
- X tiene medida finita.
 - El ínfimo de las medidas de los conjuntos de medida positiva es positivo.
 - El supremo de las medidas de los conjuntos de medida finita es finito.
 - Ninguna de las anteriores.
- c) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. ¿Qué condición es necesaria y suficiente para que $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$ con $p < q$?
- X tiene medida finita.
 - El ínfimo de las medidas de los conjuntos de medida positiva es positivo.
 - El supremo de las medidas de los conjuntos de medida finita es finito.
 - Ninguna de las anteriores.
- d) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. ¿Qué condición es necesaria y suficiente para que $L^p(\mu) \supset L^\infty(\mu)$ cualquiera que sea $p \in [1, \infty)$?
- X tiene medida finita.
 - El ínfimo de las medidas de los conjuntos de medida positiva es positivo.
 - El supremo de las medidas de los conjuntos de medida finita es finito.
 - Ninguna de las anteriores.
- e) Se supone que μ es una medida y ν es una medida signada sobre una σ -álgebra $\mathcal{S}$. ¿Cuál de los siguientes asertos es falso?
- Si $\nu(A) = \infty$ para algún $A \in \mathcal{S}$, no existe $B \in \mathcal{S}$ tal que $\nu(B) = -\infty$.
 - Las condiciones « $\nu(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$ » y « $|\nu|(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$ » son equivalentes.
 - Si μ es una medida, existe $\int f d\mu$, y $\nu(E) = \int_E f d\mu$, entonces $\nu \ll \mu$.
 - Para todo $E \in \mathcal{S}$ se tiene que $\nu^+(E) = \max\{\nu(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\}$ y $\nu^-(E) = -\min\{\nu(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\}$.
- f) ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?
- La descomposición de Jordan de una medida signada es única.
 - Si P_i, N_i son dos particiones de X en un conjunto ν -positivo P_i y otro ν -negativo N_i ($i = 1, 2$), entonces el conjunto $P_1 \triangle P_2 = N_1 \triangle N_2$ es ν -nulo.
 - La descomposición de Hahn de una medida signada es única.
 - Si μ, ν son medidas signadas sobre $(X, \mathcal{S})$, con ν finita, entonces $\nu \ll \mu$ si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $E \in \mathcal{S}$ y $|\mu|(E) < \delta$ implica $|\nu|(E) < \varepsilon$.
- g) Sobre la σ -álgebra $\mathcal{L}$ de los conjuntos medibles Lebesgue en $[-1, 1]$, se considera la medida signada $\nu(E) = \int_E x dx$ ($E \in \mathcal{L}$). El conjunto $[-1/2, 1/2]$:
- Es ν -nulo.
 - Es ν -positivo.
 - Es ν -negativo.
 - Tiene ν -medida nula.
- h) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- La σ -álgebra producto de dos σ -álgebras $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ es $\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \{A \times B : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}$.
 - La σ -álgebra generada por un álgebra $\mathcal{A}$ es la menor clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$.
 - Si $(X, \mathcal{S}), (Y, \mathcal{T})$ son espacios medibles y $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, entonces $E_x \in \mathcal{T}$ y $E^y \in \mathcal{S}$ para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$.
 - La medida producto es la única medida definida sobre una σ -álgebra producto que asigna a un rectángulo medible el producto de las medidas de los conjuntos factores.
- i) En general, la σ -álgebra producto no coincide con:
- La menor clase monótona que contiene a los conjuntos elementales.
 - La clase de todos los rectángulos medibles.
 - La menor σ -álgebra que contiene a todos los rectángulos medibles.
 - La menor σ -álgebra que contiene a los conjuntos elementales.
- j) Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y + 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad ((x, y) \in X \times Y).$$

¿Cuál de los siguientes resultados es correcto?

- i. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$ iii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 1, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$
 ii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 1.$ iv. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 1, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 1.$

2. [3 puntos] Sea $\mathcal{S}$ la σ -álgebra de los subconjuntos de $X = (0, 1)$ que son contables o tienen complementario contable. La medida co-contable μ sobre $\mathcal{S}$ es la que asigna medida 0 a los conjuntos contables y medida 1 a los conjuntos cuyo complementario es contable. Sea también λ la medida cardinal restringida a $\mathcal{S}$.

- a) Verificar que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida, y justificar que λ está bien definida sobre $\mathcal{S}$.
 b) Demostrar que $\mu \ll \lambda$ y que, sin embargo, no existe ninguna función medible, no negativa y finita f satisfaciendo

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{S}).$$

- c) Probar que no es posible descomponer λ como suma de dos medidas λ_0, λ_1 tales que $\lambda_0 \perp \mu$ y $\lambda_1 \ll \mu$.
 d) Enunciar el teorema de Radon-Nikodým y el teorema de descomposición de Lebesgue. ¿Por qué los apartados b) y c), respectivamente, no los no contradicen?

3. [3 puntos] Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ intervalos disjuntos dos a dos, y $a_1, \dots, a_n > 0$. Para cada $j = 1, \dots, n$ y cada boreliano A , se define la medida μ_j por $\mu_j(A) = m(A \cap I_j)$. Sea $\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j$.

- a) Demostrar que μ_j ($j = 1, \dots, n$) y μ son medidas sobre la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.
 b) Verificar que m y μ son σ -finitas.
 c) Probar que $\mu \ll m$, y hallar la correspondiente derivada de Radon-Nikodým.
 d) ¿Es $\mu \perp m$? Justificar la respuesta.

4. [1.5 puntos]

- a) Enunciar la desigualdad de Hölder.
 b) Aplicarla para demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2} dx \leq \sqrt[3]{6}.$$

[Sugerencia: No todas las factorizaciones del integrando son apropiadas.]

5. [1.5 puntos] Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , con $f' \in L^1(0, \infty)$, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

- a) Enunciar el teorema de Tonelli-Hobson-Fubini.
 b) Integrando $-f'(xy)$ en el dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, a \leq y \leq b\}$ ($a, b > 0$), demostrar la fórmula de Frullani:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

- c) Aplicar b) para comprobar que

$$\int_0^\infty \frac{\arctg \pi x - \arctg x}{x} dx = \frac{\pi \ln \pi}{2}.$$