

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto
Solucionario de la Autoevaluación 1

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$). ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ admite una subsucesión convergente c.t.p..
 - Existe $f \in L^p(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.
 - Si $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para algún q , con $1 \leq q \leq \infty$, entonces existe $f \in L^q(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_q = 0$.
 - Todos los anteriores.
- b) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. ¿Qué condición es necesaria y suficiente para que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$ con $p < q$?
- X tiene medida finita.
 - El ínfimo de las medidas de los conjuntos de medida positiva es positivo.
 - El supremo de las medidas de los conjuntos de medida finita es finito.
 - Ninguna de las anteriores.
- c) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. ¿Qué condición es necesaria y suficiente para que $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$ con $p < q$?
- X tiene medida finita.
 - El ínfimo de las medidas de los conjuntos de medida positiva es positivo.
 - El supremo de las medidas de los conjuntos de medida finita es finito.
 - Ninguna de las anteriores.
- d) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. ¿Qué condición es necesaria y suficiente para que $L^p(\mu) \supset L^\infty(\mu)$ cualquiera que sea $p \in [1, \infty)$?
- X tiene medida finita.
 - El ínfimo de las medidas de los conjuntos de medida positiva es positivo.
 - El supremo de las medidas de los conjuntos de medida finita es finito.
 - Ninguna de las anteriores.
- e) Se supone que μ es una medida y ν es una medida signada sobre una σ -álgebra $\mathcal{S}$. ¿Cuál de los siguientes asertos es falso?
- Si $\nu(A) = \infty$ para algún $A \in \mathcal{S}$, no existe $B \in \mathcal{S}$ tal que $\nu(B) = -\infty$.
 - Las condiciones « $\nu(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$ » y « $|\nu|(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$ » son equivalentes.
 - Si μ es una medida, existe $\int f d\mu$, y $\nu(E) = \int_E f d\mu$, entonces $\nu \ll \mu$.
 - Para todo $E \in \mathcal{S}$ se tiene que $\nu^+(E) = \max\{\nu(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\}$ y $\nu^-(E) = -\min\{\nu(U) : U \in \mathcal{S}, U \subset E\}$.
- f) ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?
- La descomposición de Jordan de una medida signada es única.
 - Si P_i, N_i son dos particiones de X en un conjunto ν -positivo P_i y otro ν -negativo N_i ($i = 1, 2$), entonces el conjunto $P_1 \triangle P_2 = N_1 \triangle N_2$ es ν -nulo.
 - La descomposición de Hahn de una medida signada es única.
 - Si μ, ν son medidas signadas sobre $(X, \mathcal{S})$, con ν finita, entonces $\nu \ll \mu$ si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $E \in \mathcal{S}$ y $|\mu|(E) < \delta$ implica $|\nu|(E) < \varepsilon$.
- g) Sobre la σ -álgebra $\mathcal{L}$ de los conjuntos medibles Lebesgue en $[-1, 1]$, se considera la medida signada $\nu(E) = \int_E x dx$ ($E \in \mathcal{L}$). El conjunto $[-1/2, 1/2]$:
- Es ν -nulo.
 - Es ν -positivo.
 - Es ν -negativo.
 - Tiene ν -medida nula.
- h) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- La σ -álgebra producto de dos σ -álgebras $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ es $\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \{A \times B : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}$.
 - La σ -álgebra generada por un álgebra $\mathcal{A}$ es la menor clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$.
 - Si $(X, \mathcal{S}), (Y, \mathcal{T})$ son espacios medibles y $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, entonces $E_x \in \mathcal{T}$ y $E^y \in \mathcal{S}$ para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$.
 - La medida producto es la única medida definida sobre una σ -álgebra producto que asigna a un rectángulo medible el producto de las medidas de los conjuntos factores.
- i) En general, la σ -álgebra producto no coincide con:
- La menor clase monótona que contiene a los conjuntos elementales.
 - La clase de todos los rectángulos medibles.
 - La menor σ -álgebra que contiene a todos los rectángulos medibles.
 - La menor σ -álgebra que contiene a los conjuntos elementales.
- j) Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y + 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad ((x, y) \in X \times Y).$$

¿Cuál de los siguientes resultados es correcto?

- i. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$ iii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 1, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$
 ii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 1.$ iv. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 1, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 1.$

Resolución.

- a) iv. c) iii. e) ii. g) iv. i) ii.
 b) ii. d) i. f) iii. h) i. j) iii. □

2. [3 puntos] Sea $\mathcal{S}$ la σ -álgebra de los subconjuntos de $X = (0, 1)$ que son contables o tienen complementario contable. La medida co-contable μ sobre $\mathcal{S}$ es la que asigna medida 0 a los conjuntos contables y medida 1 a los conjuntos cuyo complementario es contable. Sea también λ la medida cardinal restringida a $\mathcal{S}$.

- a) Verificar que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida, y justificar que λ está bien definida sobre $\mathcal{S}$.
 b) Demostrar que $\mu \ll \lambda$ y que, sin embargo, no existe ninguna función medible, no negativa y finita f satisfaciendo

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{S}).$$

- c) Probar que no es posible descomponer λ como suma de dos medidas λ_0, λ_1 tales que $\lambda_0 \perp \mu$ y $\lambda_1 \ll \mu$.
 d) Enunciar el teorema de Radon-Nikodým y el teorema de descomposición de Lebesgue. ¿Por qué los apartados b) y c), respectivamente, no los contradicen?

Resolución.

- a) Nótese que $\#X > \aleph_0$. Sea $\mathcal{S} = \{E \subset X : \#E \leq \aleph_0 \text{ ó } \#E^c \leq \aleph_0\}$. Las dos condiciones que definen los conjuntos medibles son mutuamente excluyentes, porque X es incontable. El par $(X, \mathcal{S})$ es un espacio medible; en efecto:
 (i) Claramente, $X \in \mathcal{S}$.
 (ii) Si $E \in \mathcal{S}$, entonces $\#E \leq \aleph_0$ ó $\#(E^c)^c \leq \aleph_0$, así que $E^c \in \mathcal{S}$.
 (iii) Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathcal{S}$. Entonces, o bien $\#E_n \leq \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien $\#E_m^c \leq \aleph_0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. En el primer caso, $\#\bigcup_{n=1}^\infty E_n \leq \aleph_0$. En el segundo, $\#\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)^c = \#\bigcap_{n=1}^\infty E_n^c \leq \#E_m^c \leq \aleph_0$. En ambos, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{S}$.

Definamos ahora sobre $\mathcal{S}$ la medida μ por

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \#E \leq \aleph_0 \\ 1, & \#E^c \leq \aleph_0 \end{cases} \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Comprobemos que μ es, en efecto, una medida. En primer lugar, $\#\emptyset = 0 \leq \aleph_0$ implica $\mu(\emptyset) = 0$. En segundo lugar, sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ cualquier sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos. Si $\#E_n \leq \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, necesariamente $\#\bigcup_{n=1}^\infty E_n \leq \aleph_0$, así que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n).$$

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\#E_m^c \leq \aleph_0$, entonces $\#\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)^c = \#\bigcap_{n=1}^\infty E_n^c \leq \#E_m^c \leq \aleph_0$, así que $\mu(E_m) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 1$. Además, cuando $n \neq m$ la inclusión $E_n \subset E_m^c$ implica $\#E_n \leq \aleph_0$, y $\mu(E_n) = 0$. Se concluye que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 1 = \mu(E_m) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n).$$

La medida cardinal $\lambda = \mu_c$ está bien definida sobre las partes de cualquier conjunto; en particular, sobre $\mathcal{S}$.

- b) Si $A \subset (0, 1)$ satisface $\lambda(A) = 0$, necesariamente $A = \emptyset$, así que $\mu(A) = 0$; luego, $\mu \ll \lambda$.

Supongamos que exista una tal f . Como μ no es idénticamente nula, f tampoco puede serlo, y para algún $x \in (0, 1)$ debemos tener $f(x) \neq 0$. Resulta entonces la contradicción

$$0 = \mu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\lambda = f(x) \lambda(\{x\}) = f(x) \neq 0.$$

- c) Supongamos ahora que $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, con $\lambda_0 \perp \mu$ y $\lambda_1 \ll \mu$. Entonces, existe un conjunto medible A tal que $\lambda_0(A) = \mu(A^c) = 0$. No puede ser $A = \emptyset$, porque en tal caso $\mu(A^c) = 1$. Si $x \in A$, por monotonía, $\lambda_0(\{x\}) = 0$; y como $\lambda_1 \ll \mu$ y $\mu(\{x\}) = 0$, también $\lambda_1(\{x\}) = 0$. Se llega así a una manifiesta contradicción:

$$1 = \lambda(\{x\}) = \lambda_0(\{x\}) + \lambda_1(\{x\}) = 0.$$

- d) Teorema 3.5 del Tema 4 (Radon-Nikodým). Supongamos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita y ν es una medida σ -finita sobre $\mathcal{S}$, verificando que $\nu \ll \mu$. Existe una función medible no negativa y finita f sobre X tal que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Además, f es única en el sentido de que si

$$\nu(E) = \int_E g d\mu \quad (E \in \mathcal{S}),$$

entonces $f = g$ c.t.p. $[\mu]$. Cualquiera de estas f se llama derivada de Radon-Nikodým de ν respecto de μ , denotada $d\nu/d\mu$.

Teorema 4.10 del Tema 4 (descomposición de Lebesgue). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, y ν una medida σ -finita sobre $\mathcal{S}$. Entonces $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde ν_0, ν_1 son medidas sobre $\mathcal{S}$ tales que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$. Esta es la llamada descomposición de Lebesgue de la medida ν con respecto a μ , y es única.

La hipótesis que falla en ambos casos e impide aplicar los teoremas de Radon-Nikodým y de Lebesgue es la σ -finitud de la medida cardinal: la medida de Lebesgue es σ -finita, porque es finita, pero la medida cardinal en $(0, 1)$ no lo es, porque este conjunto es incontable. $\square$

3. [3 puntos] Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ intervalos disjuntos dos a dos, y $a_1, \dots, a_n > 0$. Para cada $j = 1, \dots, n$ y cada boreliano A , se define la medida μ_j por $\mu_j(A) = m(A \cap I_j)$. Sea $\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j$.

- Demostrar que μ_j ($j = 1, \dots, n$) y μ son medidas sobre la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.
- Verificar que m y μ son σ -finitas.
- Probar que $\mu \ll m$, y hallar la correspondiente derivada de Radon-Nikodým.
- ¿Es $\mu \perp m$? Justificar la respuesta.

Resolución.

- a) Sea I cualquier intervalo; verifiquemos que $\nu(A) = m(A \cap I)$ ($A \in \mathcal{B}$) satisface los axiomas de medida. Como la intersección de dos borelianos es un boreliano (y, por lo tanto, medible Lebesgue), es obvio que ν está bien definida sobre $\mathcal{B}$. También es evidente que $\nu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{B}$, y que $\nu(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$. Por último, sea $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{B}$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos. Entonces:

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = m\left(\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \cap I\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^\infty (A_k \cap I)\right) = \sum_{k=1}^\infty m(A_k \cap I) = \sum_{k=1}^\infty \nu(A_k).$$

Consecuentemente, ν es una medida sobre $\mathcal{B}$, y lo mismo cabe decir de μ_j ($j = 1, \dots, n$).

Verifiquemos ahora que μ , dada por $\mu(A) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(A)$ ($A \in \mathcal{B}$), es también una medida. Claramente, μ está bien definida y para cualquier $A \in \mathcal{B}$, se tiene que $\mu(A) \geq 0$. También es obvio que $\mu(\emptyset) = 0$. Por último, dada una sucesión $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ de borelianos disjuntos dos a dos, podemos escribir:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^\infty \mu_j(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).$$

Se concluye que μ es una medida sobre $\mathcal{B}$.

- b) Nótese, en primer lugar, que $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^\infty [-k, k]$. Se tiene que m es σ -finita, porque $m([-k, k]) = 2k < \infty$ ($k \in \mathbb{N}$). Similarmente, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, la medida $a_j \mu_j$ es σ -finita, ya que

$$a_j \mu_j([-k, k]) = a_j m([-k, k] \cap I_j) \leq 2ka_j < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Como

$$\mu([-k, k]) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j([-k, k]) \leq 2k \sum_{j=1}^n a_j < \infty \quad (k \in \mathbb{N}),$$

se concluye que μ también es σ -finita.

- c) Teorema 4.4 del Tema 4. Si ν_1, ν_2, μ son medidas σ -finitas sobre $(X, \mathcal{S})$, con $\nu_1 \ll \mu, \nu_2 \ll \mu$, entonces

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \quad [\mu].$$

Para cada $j = 1, \dots, n$ se tiene, claramente, que $a_j \mu_j \ll m$; de hecho,

$$a_j \mu_j(A) = a_j m(A \cap I_j) = \int_A a_j \chi_{I_j} dx \quad (A \in \mathcal{B})$$

implica que $d(a_j \mu_j)/dm = a_j \chi_{I_j} [m]$. Por tanto, $\mu \ll m$, con

$$\frac{d\mu}{dm} = \sum_{j=1}^n \frac{d(a_j \mu_j)}{dm} = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{I_j} \quad [m].$$

- d) Si se tuviera, simultáneamente, que $\mu \ll m$ y $\mu \perp m$, sería $\mu = 0$, una clara contradicción. □

4. [1.5 puntos]

- a) Enunciar la desigualdad de Hölder.
b) Aplicarla para demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2} dx \leq \sqrt[3]{6}.$$

[Sugerencia: No todas las factorizaciones del integrando son apropiadas.]

Resolución.

- a) Teorema 2.20 del Tema 3 (desigualdad de Hölder). Sean $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados, y sean $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Entonces $fg \in L^1(\mu)$, y

$$\int |fg| d\mu \leq \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int |g|^q d\mu \right\}^{1/q}.$$

b) Consideramos los exponentes conjugados $p = 3$ y $q = 3/2$:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2} dx &= \int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x} \frac{1}{x} dx \leq \left\{ \int_1^\infty \frac{1+x}{x^3} dx \right\}^{1/3} \left\{ \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx \right\}^{2/3} \\ &= \left\{ \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \right\}^{1/3} \left\{ \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx \right\}^{2/3} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^\infty - \frac{1}{x} \Big|_1^\infty \right\}^{1/3} \left\{ -\frac{2}{x^{1/2}} \Big|_1^\infty \right\}^{2/3} \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} 2^{2/3} = 3^{1/3} 2^{1/3} = 6^{1/3} = \sqrt[3]{6}. \quad \square \end{aligned}$$

5. [1.5 puntos] Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , con $f' \in L^1(0, \infty)$, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

a) Enunciar el teorema de Tonelli-Hobson-Fubini.

b) Integrando $-f'(xy)$ en el dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, a \leq y \leq b\}$ ($a, b > 0$), demostrar la fórmula de Frullani:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

c) Aplicar b) para comprobar que

$$\int_0^\infty \frac{\arctg \pi x - \arctg x}{x} dx = \frac{\pi \ln \pi}{2}.$$

Resolución.

a) Teorema 2.5 del Tema 5 (Tonelli-Hobson, I). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita, y sea $f \geq 0$ una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible. Pongamos

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y).$$

Entonces, φ es $\mathcal{S}$ -medible, ψ es $\mathcal{T}$ -medible, y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

Teorema 2.7 del Tema 5 (Tonelli-Hobson, II). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Dada una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible f , definimos

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f_x| d\nu, \quad \psi^*(y) = \int_X |f^y| d\mu \quad (x \in X, y \in Y).$$

Las condiciones $\varphi^* \in L^1(\mu)$, $\psi^* \in L^1(\nu)$, $f \in L^1(\mu \times \nu)$, son equivalentes.

Teorema 2.8 del Tema 5 (Fubini). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ para casi todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$, las funciones φ y ψ definidas por

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y)$$

están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$, respectivamente, y se cumple:

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

b) Se tiene que

$$\int_a^b dy \int_0^\infty |-f'(xy)| dx = \int_a^b \frac{dy}{y} \int_0^\infty |f'(t)| dt = \ln \frac{b}{a} \int_0^\infty |f'(t)| dt < \infty.$$

Así pues, el teorema de Tonelli-Hobson II permite aplicar el teorema de Fubini para calcular $\int_D -f'(xy) d(x,y)$ como una integral iterada en los dos órdenes posibles: por una parte,

$$\begin{aligned} \int_D -f'(xy) d(x,y) &= - \int_a^b dy \int_0^\infty f'(xy) dx = - \int_a^b \frac{dy}{y} \int_0^\infty f'(t) dt \\ &= - \int_a^b \left[\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) \right] \frac{dy}{y} = f(0) \int_a^b \frac{dy}{y} = f(0) \ln \frac{b}{a}; \end{aligned}$$

por otra,

$$\int_D -f'(xy) d(x,y) = - \int_0^\infty dx \int_a^b f'(xy) dy = - \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_{ax}^{bx} f'(t) dt = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx.$$

c) Particularizando $f(x) = \arctg x - \pi/2$ ($x \in [0, \infty)$), $a = 1$ y $b = \pi$ en b), encontramos que

$$\int_0^\infty \frac{\arctg \pi x - \arctg x}{x} dx = \frac{\pi \ln \pi}{2}.$$

□