

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto
Solucionario de la Autoevaluación 2

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

a) Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(0,1) \cap L^2(0,1)$. Se consideran los siguientes enunciados:

(A) Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $L^1(0,1)$, entonces también converge a 0 en $L^2(0,1)$.

(B) Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a g en $L^1(0,1)$ y a h en $L^2(0,1)$, entonces $g = h$ c.t.p..

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

b) Sea f una función medible positiva definida sobre un conjunto medible E , con $\mu(E) < \infty$. ¿Cuál de las siguientes opciones es, en general, válida?

i. $\left(\int_E f d\mu\right) \left(\int_E \frac{1}{f} d\mu\right) < \mu^2(E)$.

iii. $\left(\int_E f d\mu\right) \left(\int_E \frac{1}{f} d\mu\right) = \mu^2(E)$.

ii. $\left(\int_E f d\mu\right) \left(\int_E \frac{1}{f} d\mu\right) > \mu^2(E)$.

iv. Ninguna de las anteriores.

c) Considérense los siguientes enunciados:

(A) Si $f \in L^p(0,1)$ para todo $p \in (1, \infty)$, entonces $f \in L^\infty(0,1)$.

(B) Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $L^q(1, \infty) \subset L^p(1, \infty)$.

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

d) Sean $1 \leq p < q \leq \infty$. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

i. $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

iii. $\ell^q \subsetneq \ell^p$.

ii. $\ell^p = \ell^q$.

iv. Ninguna de las anteriores.

e) Se define la medida signada $\nu(E) = \int_E x^3 dx$ sobre la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue $E \subset [-2, 2]$. El conjunto $[-1, 1]$:

i. Es ν -nulo.

iii. Es ν -negativo.

ii. Es ν -positivo.

iv. Tiene ν -medida nula.

f) Se define la medida $\nu(A) = \int_A \frac{dx}{1+x^2}$ sobre los borelianos $A \subset \mathbb{R}$, y se consideran los siguientes asertos:

(A) $\nu \ll m$, con $d\nu/dm = (1+x^2)^{-1}$.

(B) $m \ll \nu$, con $dm/d\nu = 1+x^2$.

¿Cuál de ellos es verdadero?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

g) Dadas dos medidas signadas μ, ν sobre una misma σ -álgebra $\mathcal{S}$, se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ , si:

i. $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$.

iii. $|\mu|(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$.

ii. $\nu(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$.

iv. $|\nu|(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$.

h) Se define una medida de Borel μ en $\mathbb{R}^2$ por

$$\mu(A) = \int_{A^0} e^{-x^2} dx,$$

donde A^0 es la y -sección del boreliano $A \subset \mathbb{R}^2$ para $y = 0$, y se consideran los siguientes asertos:

(A) $\mu \ll m \times m$.

(B) $\mu \perp m \times m$.

¿Cuál de ellos es verdadero?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

i) ¿Cuál de los siguientes enunciados es, en general, falso?

i. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los rectángulos medibles.

iii. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los conjuntos elementales.

ii. La σ -álgebra producto es la clase monótona generada por los rectángulos medibles.

iv. La σ -álgebra producto es la clase monótona generada por los conjuntos elementales.

j) Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y - 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Cuál de los siguientes resultados es correcto?

- | | |
|---|--|
| i. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 0, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 0.$ | iii. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 1, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 0.$ |
| ii. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 0, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 1.$ | iv. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 1, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 1.$ |

Resolución.

- | | | | | |
|---------|--------|--------|---------|---|
| a) iii. | c) iv. | e) iv. | g) iii. | i) ii. |
| b) ii. | d) i. | f) i. | h) iii. | j) ii. □ |

2. [3 puntos]

- a) Enunciar el teorema de Radon-Nikodým.
 b) Enunciar el teorema de descomposición de Lebesgue.

Sean $X = [0, 1]$ y $\mathcal{S}$ la σ -álgebra de Borel en $[0, 1]$, sobre la que se consideran la medida de Lebesgue m y la medida cardinal μ . Probar:

- c) Se tiene que $m \ll \mu$, pero no existe ninguna función medible, no negativa y finita f tal que $m(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \mathcal{S}$. ¿Qué hipótesis del teorema de Radon-Nikodým no se está verificando en este caso?
 d) La medida μ no admite descomposición de Lebesgue respecto de m . ¿Qué hipótesis del teorema de Lebesgue no se está verificando en este caso?

Resolución.

- a) Teorema 3.5 del Tema 4 (Radon-Nikodým). Supongamos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita y ν es una medida σ -finita sobre $\mathcal{S}$, verificando que $\nu \ll \mu$. Existe una función medible no negativa y finita f sobre X tal que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Además, f es única, en el sentido de que si

$$\nu(E) = \int_E g d\mu \quad (E \in \mathcal{S}),$$

entonces $f = g$ c.t.p. $[\mu]$. Cualquiera de estas f se llama derivada de Radon-Nikodým de ν respecto de μ , denotada $d\nu/d\mu$.

- b) Teorema 4.10 del Tema 4 (descomposición de Lebesgue). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, y ν una medida σ -finita sobre $\mathcal{S}$. Entonces $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde ν_0, ν_1 son medidas sobre $\mathcal{S}$ tales que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$. Esta es la llamada descomposición de Lebesgue de la medida ν con respecto a μ , y es única.
 c) Si $A \subset X$ satisface $\mu(A) = 0$, necesariamente $A = \emptyset$, así que $m(A) = 0$; luego, $m \ll \mu$. Supongamos que exista una tal f . Como m no es idénticamente nula, f tampoco puede serlo, y para algún $x_0 \in X$ debemos tener $f(x_0) \neq 0$. Considerando el conjunto $A = \{x_0\}$, resulta la contradicción

$$0 = m(A) = \int_A f d\mu = \int_{\{x_0\}} f d\mu = f(x_0) \mu(\{x_0\}) = f(x_0) \neq 0.$$

- d) Razonando, de nuevo, por contradicción, supongamos que $\mu = \mu_0 + \mu_1$ es suma de dos medidas tales que $\mu_0 \perp m$ y $\mu_1 \ll m$. Entonces, existe un conjunto medible A tal que $\mu_0(A) = m(A^c) = 0$. No puede ser $A = \emptyset$, porque en tal caso $m(A^c) = 1$. Si $x_0 \in A$, necesariamente $\mu_0(\{x_0\}) = 0$; y como $\mu_1 \ll m$ y $m(\{x_0\}) = 0$, también $\mu_1(\{x_0\}) = 0$. Se llega así a la contradicción

$$1 = \mu(\{x_0\}) = \mu_0(\{x_0\}) + \mu_1(\{x_0\}) = 0.$$

La hipótesis que falla en ambos casos e impide aplicar los teoremas de Radon-Nikodým y de Lebesgue es la σ -finitud de la medida cardinal: en $[0, 1]$ con la σ -álgebra de Borel, la medida de Lebesgue es σ -finita, porque es finita; pero la medida cardinal no lo es, porque $[0, 1]$ es incontable, mientras que la unión contable de conjuntos finitos es contable. $\square$

3. [3 puntos] Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ intervalos disjuntos dos a dos, no degenerados pero no necesariamente finitos, y $a_1, \dots, a_n > 0$. Para cada $j = 1, \dots, n$ y cada boreliano A , se define la medida μ_j por $\mu_j(A) = m(A \cap I_j)$. Sea $\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j$.

- Demostrar que m y μ son σ -finitas.
- Probar que μ es absolutamente continua con respecto a m y hallar la correspondiente derivada de Radon-Nikodým. ¿Es única esta derivada? Justificar la respuesta.
- ¿Se verifica que $\mu \perp m$? Justificar la respuesta.

Resolución.

- a) Nótese, en primer lugar, que $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k]$. Se tiene que m es σ -finita, porque $m([-k, k]) = 2k < \infty$ ($k \in \mathbb{N}$). Similarmente, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, la medida $a_j \mu_j$ es σ -finita, ya que

$$a_j \mu_j([-k, k]) = a_j m([-k, k] \cap I_j) \leq 2ka_j < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Como

$$\mu([-k, k]) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j([-k, k]) \leq 2k \sum_{j=1}^n a_j < \infty \quad (k \in \mathbb{N}),$$

se concluye que μ también es σ -finita.

- b) Nos apoyaremos en los siguientes resultados:

- (1) Consecuencia del teorema de Radon-Nikodým, enunciado anteriormente. Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita, f es una función medible, no negativa y finita sobre X , y se define

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{S}),$$

entonces ν es una medida σ -finita sobre $\mathcal{S}$ tal que $\nu \ll \mu$, con $d\nu/d\mu = f$ $[\mu]$. En efecto: que ν es una medida se deduce del Teorema 2.8 del Tema 2; ν es absolutamente continua respecto de μ , porque la integral de f sobre cualquier conjunto de μ -medida nula es nula; ν es σ -finita, como se probó en la resolución del Ejercicio 21 del Tema 4; y la conclusión sobre la derivada de Radon-Nikodým $d\nu/d\mu$ se desprende del teorema del mismo nombre.

- (2) Teorema 4.4 del Tema 4. Si ν_1, ν_2, μ son medidas σ -finitas sobre $(X, \mathcal{S})$, con $\nu_1 \ll \mu, \nu_2 \ll \mu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$, con

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \quad [\mu].$$

(3) Resultado adicional. En la notación e hipótesis del teorema de Radon-Nikodým, dado cualquier $a > 0$, es

$$av(E) = a \int_E f d\mu = \int_E af d\mu \quad (E \in \mathcal{S}),$$

así que $av \ll \mu$, con

$$\frac{d(av)}{d\mu} = af = a \frac{dv}{d\mu} \quad [\mu].$$

Sentado lo anterior, razonamos como sigue. Para cada $j = 1, \dots, n$ se tiene, por (1), que $\mu_j \ll m$; de hecho,

$$\mu_j(A) = m(A \cap I_j) = \int_A \chi_{I_j} dx \quad (A \in \mathcal{B})$$

entraña que $d\mu_j/dm = \chi_{I_j} \quad [m]$. Sin más que aplicar (2) y (3) encontramos que $\mu \ll m$, con

$$\frac{d\mu}{dm} = \sum_{j=1}^n \frac{d(a_j \mu_j)}{dm} = \sum_{j=1}^n a_j \frac{d\mu_j}{dm} = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{I_j} \quad [m].$$

c) Si, simultáneamente, $\mu \ll m$ y $\mu \perp m$, sería $\mu = 0$ (Ejercicio 19 del Tema 4), lo cual supone una clara contradicción. $\square$

4. [1.5 puntos]

a) Sean p, q exponentes conjugados. Enunciar la desigualdad de Hölder para $1 < p, q < \infty$ y para $p = 1, q = \infty$.

b) Verificar que

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[5]{1-x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt[5]{54}}.$$

Resolución.

a) Teoremas 2.20 y 2.24 del Tema 3 (desigualdad de Hölder para $1 < p, q < \infty$ y para $p = 1, q = \infty$, respectivamente). Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados ($p + q = pq$). Si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$, con $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Aquí,

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|.$$

b) Aplicamos la desigualdad de Hölder, tomando como exponentes conjugados $p = 5/3, q = 5/2$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{(1-x)^{1/5}} dx &\leq \left\{ \int_0^1 x^{3(5/3)} dx \right\}^{3/5} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{(1/5)(5/2)}} dx \right\}^{2/5} = \left\{ \int_0^1 x^5 dx \right\}^{3/5} \left\{ \int_0^1 (1-x)^{-1/2} dx \right\}^{2/5} \\ &= \left(\frac{x^6}{6} \Big|_0^1 \right)^{3/5} \left(-2(1-x)^{1/2} \Big|_0^1 \right)^{2/5} = \frac{2^{2/5}}{6^{3/5}} = \left(\frac{4}{216} \right)^{1/5} = \frac{1}{54^{1/5}}. \end{aligned} \quad \square$$

5. [1.5 puntos]

a) Enunciar el teorema de Tonelli-Hobson-Fubini.

b) Aplicarlo para comprobar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \ln 2.$$

Resolución.

- a) Teorema 2.5 del Tema 5 (Tonelli-Hobson, I). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita, y sea $f \geq 0$ una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible. Pongamos

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y).$$

Entonces, φ es $\mathcal{S}$ -medible, ψ es $\mathcal{T}$ -medible, y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

Teorema 2.7 del Tema 5 (Tonelli-Hobson, II). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Dada una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible f , definimos

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x d\nu, \quad \psi^*(y) = \int_X |f|^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y).$$

Las condiciones $\varphi^* \in L^1(\mu)$, $\psi^* \in L^1(\nu)$, $f \in L^1(\mu \times \nu)$, son equivalentes.

Teorema 2.8 del Tema 5 (Fubini). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ para casi todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$, las funciones φ y ψ definidas por

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y)$$

están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$, respectivamente, y se cumple:

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

- b) La integral propuesta es de tipo Frullani. Se tiene

$$\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = \int_1^2 e^{-tx} dt,$$

por lo que la integral original se expresa como

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \int_0^\infty dx \int_1^2 e^{-tx} dt.$$

Ya que $e^{-tx} \geq 0$ en el dominio de integración, el primer teorema de Tonelli-Hobson permite igualar las dos integrales iteradas y escribir:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \int_1^2 dt \int_0^\infty e^{-tx} dx.$$

La integral interior es ahora

$$\int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{-e^{-tx}}{t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{t},$$

y basta sustituir en la integral exterior para obtener

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

como se pretendía. □