

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Solucionario de la Autoevaluación 2

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)
6. Pregunta [6](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $m^*(A) = 5$. Se considera el conjunto $-3A = \{x : (-3)^{-1}x \in A\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- $m^*(-3A) = 15$.
 - $m(-3A) = 15$.
 - $m^*(-3A) = 5$.
 - $m^*(-3A) = 3/5$.
- b) Si $m^*(A) = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ para cualquier $B \subset \mathbb{R}$.
 - A no es medible.
 - A es contable.
 - $A = \emptyset$.
- c) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la σ -álgebra de Lebesgue es cierta?
- Contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
 - Es la σ -álgebra generada por los intervalos semiabiertos.
 - Contiene estrictamente a la σ -álgebra de Borel.
 - Es la σ -álgebra generada por los intervalos cerrados.
- d) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la medida de Lebesgue es cierta?
- La medida de Lebesgue no es invariante por traslaciones.
 - Si $m(E) < \infty$, entonces E es acotado.
 - Si E es incontable, entonces $m(E) > 0$.
 - La medida de Lebesgue de un punto es nula.
- e) Supongamos que A es medible Lebesgue, con $m(A) > 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre A es falsa?
- Contiene un cerrado de medida positiva.
 - Es incontable.
 - Contiene un abierto de medida positiva.
 - Contiene un subconjunto no medible.
- f) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- La función de Thomae no es integrable Riemann.
 - El conjunto de Vitali es unión de un boreliano y un conjunto de medida exterior nula.
 - La función de Dirichlet es integrable Riemann.
 - Existen conjuntos de tipo Cantor con medida de Lebesgue positiva.
- g) Si f es la función característica de los racionales, entonces $\int_0^1 f \, dx$ vale:
- 1, porque $\mathbb{Q}$ es denso.
 - 0, porque $m(\mathbb{Q}) = 0$.
 - ∞ , porque el cardinal de $\mathbb{Q}$ es infinito.
 - No existe, porque f no es medible.
- h) Sea $f_n(x) = n^{-1}\chi_{[0,n]}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$). Al hacer $n \rightarrow \infty$, ¿qué ocurre con $\int f_n \, dx$?
- Tiende a 0.
 - Tiende a 1.
 - Tiende a ∞ .
 - No converge.
- i) ¿Cuál de las siguientes funciones no es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$?
- $f(x) = e^{-|x|}$.
 - $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.
 - $f(x) = x^{-1} \sin x$.
 - $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
- j) Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre un espacio de medida arbitrario $(X, \mathcal{S}, \mu)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es monótona creciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, entonces $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.
 - $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.
 - Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p. y existe g integrable tal que $f_n \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), entonces $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.
 - Todas las anteriores.

Resolución.

- | | | | | |
|-------|---------|---------|--------|---|
| a) i. | c) iii. | e) iii. | g) ii. | i) iii. |
| b) i. | d) iv. | f) iv. | h) ii. | j) iv. □ |

2. [1.5 puntos]

- a) Demostrar que si una función f es continua c.t.p. $[m]$, entonces es medible Lebesgue.
- b) Sea C el conjunto de Cantor, y sea P un subconjunto de C que no es de Borel. Probar que $f = \chi_P$ es continua c.t.p. $[m]$, pero no medible Borel. [Sugerencia: Como C es cerrado, f es continua, al menos, en C^c .]

- c) ¿Qué propiedad de la medida de Lebesgue, de la que carece su restricción a los borelianos, explica que (tal como muestra b)) el apartado a) pueda ser falso si se reemplaza «medible Lebesgue» por «medible Borel»? Razonar la respuesta.

Resolución.

- a) Suponiendo que f es continua en $E \in \mathcal{M}$, con $m(E^c) = 0$, sea $g = f\chi_E$. Afirmamos que g es medible Lebesgue. Para comprobarlo, sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\{x : g(x) > \alpha\} &= \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : g(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : 0 > \alpha\} \\ &= \{x \in E : f(x) > \alpha\}.\end{aligned}$$

El conjunto $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es abierto en E , es decir, se obtiene como intersección de E con un abierto de $\mathbb{R}$; por tanto, este conjunto es medible. Similarmente, si $\alpha < 0$,

$$\{x : g(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup E^c$$

es medible. Ahora, puesto que g es medible y $f = g$ c.t.p. $[m]$, se concluye del Teorema 2.54 del Tema 1 que f es medible.

- b) Sea C el conjunto de Cantor, y sea P un subconjunto de C que no es de Borel (demostración del Teorema 2.70 del Tema 1). Entonces, $f = \chi_P$ no es medible Borel. Sin embargo, como C es cerrado, resulta que f es continua, al menos, en C^c . En efecto, para cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}$ se tiene:

- Si $0 \notin U$ y $1 \notin U$, entonces $f^{-1}(U) = \emptyset$.
- Si $0 \notin U$ y $1 \in U$ entonces $f^{-1}(U) = P$.
- Si $0 \in U$ y $1 \notin U$, entonces $f^{-1}(U) = P^c$.
- Si $0 \in U$ y $1 \in U$, entonces $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$.

Puesto que $C^c \subset P^c$, el conjunto $f^{-1}(U) \cap C^c$ sólo puede ser $\emptyset$ ó C^c , que son abiertos. Ahora, ya que el conjunto de discontinuidades de f es un subconjunto de C y $m(C) = 0$, se concluye que f es continua c.t.p. $[m]$.

- c) La completitud: si la medida de Lebesgue fuera completa sobre los borelianos, no existiría un tal P , porque C es un boreliano (cerrado) con $m(C) = 0$. □

3. **[1.5 puntos]** Se considera la composición $h = f \circ g$ de dos funciones f y g , reales y de variable real. Demostrar que las siguientes cuatro condiciones sobre f y g garantizan que h es medible Borel: a) f es continua y g es medible Borel; b) f es medible Borel y g es continua; c) f, g son ambas medibles Borel; d) f, g son ambas continuas.

Resolución. La clase $\mathcal{A}$, formada por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuya antiimagen por una función arbitraria es medible Borel (respectivamente, Lebesgue), constituye una σ -álgebra (Ejercicio 18 del Tema 1). Si dicha función es medible Borel (respectivamente, Lebesgue), $\mathcal{A}$ contiene a los intervalos y, por lo tanto, también a los borelianos. Así pues, la antiimagen de un boreliano por una función medible Borel (respectivamente, Lebesgue) es medible Borel (respectivamente, Lebesgue).

Si la σ -álgebra considerada es la de Borel, entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x : h(x) > \alpha\} = h^{-1}(\alpha, \infty) = g^{-1}(B),$$

donde $B = f^{-1}(\alpha, \infty)$ es un boreliano siempre que f sea medible Borel (en particular, continua). Luego, para resolver las cuestiones propuestas, bastaría garantizar que $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ cuando $B \in \mathcal{B}$; pero esto ocurre siempre que g sea medible Borel (en particular, continua). Se desprende que las cuatro afirmaciones son ciertas. □

4. [1.5 puntos]

- a) (Teorema de Lusin, I) Sea $E \in \mathcal{M}$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $C \subset E$, cerrado en la topología relativa de E , tal que $m(E \setminus C) < \varepsilon$ y $f|_C$ es continua. La demostración de este resultado se basa en construir un conjunto cerrado C tal que la antiimagen por $f|_C$ de cualquier intervalo abierto con extremos racionales es un abierto relativo en C . Explicar por qué esta propiedad demuestra el teorema.
- b) (Teorema de Lusin, II) Sea $E \in \mathcal{M}$, con $m(E) < \infty$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset E$, tal que $m(E \setminus K) < \varepsilon$ y $f|_K$ es continua. Demostrar esta versión justificando y utilizando la siguiente sugerencia: si, dado $\varepsilon > 0$, C es el cerrado que proporciona el apartado a), existe un compacto $K \subset C$ tal que $m(C \setminus K) < \varepsilon$.
- c) Sean $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, $\varepsilon > 0$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$, y

$$U = [0, 1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right).$$

Justificar detalladamente que $K = [0, 1] \setminus U$ es el compacto cuya existencia se postula en b), y que no existe ningún abierto O tal que $f|_{[0,1] \cap O}$ es continua.

Resolución.

- a) Para ver que $f|_C$ es continua, necesitamos probar que la antiimagen por $f|_C$ de cualquier abierto es un abierto relativo en C . Pero basta considerar la antiimagen de abiertos básicos en la topología usual de $\mathbb{R}$, y los intervalos abiertos con extremos racionales constituyen una base de esta topología.
- b) Dado $\varepsilon > 0$, la versión I del teorema proporciona un cerrado $C \subset E$, tal que $m(E \setminus C) < \varepsilon/2$ y que la restricción $f|_C$ de f a C es continua. Ahora, como $m(C) \leq m(E) < \infty$, en virtud del Ejemplo 2.34 del Tema 1 existe un compacto $K \subset C$ tal que $m(C \setminus K) = m(C) - m(K) < \varepsilon/2$. Luego,

$$m(E \setminus K) \leq m(E \setminus C) + m(C \setminus K) < \varepsilon,$$

y $f|_K$ es continua porque $K \subset C$ y $f|_C$ lo es.

- c) Ahora, $E = [0, 1]$. La función de Dirichlet f es medible sobre E . El K propuesto es compacto porque es cerrado en $[0, 1]$ (donde U es abierto) y acotado. Además,

$$m([0, 1] \setminus K) = m(U) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

La restricción de f a K es continua, porque es idénticamente nula. Finalmente, no existe ningún abierto O , con $[0, 1] \cap O \neq \emptyset$, tal que $f|_{[0,1] \cap O}$ sea continua: si $[0, 1] \cap O \neq \emptyset$, entonces $O \neq \emptyset$ es unión contable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, y por lo tanto $[0, 1] \cap O$ ha de contener un intervalo abierto no vacío que, a su vez, contendrá una infinidad de racionales e irracionales, siendo todos ellos puntos de discontinuidad de f .

5. [1.5 puntos] Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponemos $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ ($x > 0$).

- a) Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \frac{1}{e^x + 1}.$$

- b) Utilizando a), verificar que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \ln 2 \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n dx.$$

- c) Enunciar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. La sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ¿satisface las hipótesis de este teorema?
- d) Enunciar el teorema de integración de series funcionales con términos a valores reales. ¿Es $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| dx < \infty$?

Resolución. Se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \\ &= \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)} \\ &= \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x - 1)^2(e^x + 1)} = \frac{1}{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Por una parte:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \quad [e^{-x} = t, -e^{-x} dx = dt] \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1 + t} = \ln(1 + t) \Big|_0^1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Por otra:

$$\int_0^{\infty} f_n dx = \int_0^{\infty} e^{-nx} dx - 2 \int_0^{\infty} e^{-2nx} dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0. \quad (1)$$

Luego:

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \ln 2 \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n dx. \quad (2)$$

Teorema 1.38 del Tema 2 (convergencia dominada). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), con g integrable, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p.. Entonces f es integrable, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = \int f dx. \quad (3)$$

Teorema 1.41 del Tema 2 (integración de series funcionales con términos a valores reales). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables, tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| dx < \infty.$$

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge c.t.p. a una función integrable f , y se verifica que

$$\int f dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx.$$

El resultado en (2) significa que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ no satisface las hipótesis del teorema de la convergencia dominada, ni la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las hipótesis del Teorema 1.41 del Tema 2; de lo contrario, ambos teoremas serían aplicables, y se daría la igualdad en (2). Nótese que la hipótesis del Teorema 1.41 del Tema 2 que no se satisface ha de ser la del apartado d), puesto que los cálculos en (1) permiten deducir que cada f_n ($n \in \mathbb{N}$) está mayorada por una suma de funciones integrables, y por lo tanto ella misma es integrable. $\square$

6. [3 puntos] Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$.

a) Justificar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) = \infty \right\}.$$

b) Enunciar el teorema de Beppo Levi.

c) Mediante dicho teorema, deducir que la función $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$ es integrable.

d) Demostrar que toda función integrable es finita c.t.p..

e) Concluir que $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$.

Resolución.

a) Es sabido que $E = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ es el conjunto de los puntos que pertenecen a una infinidad de términos de la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, también podemos describirlo de la siguiente manera:

$$E = \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) = \infty \right\}.$$

b) Teorema 2.7 del Tema 2 (Beppo Levi). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

c) En virtud del teorema de Beppo Levi y de la hipótesis sobre la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

d) Sea f una función integrable. La sucesión de conjuntos dada por $A_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) es decreciente, con límite $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : |f(x)| = \infty\}$. Ya que f es integrable, todos los conjuntos A_n ($n \in \mathbb{N}$) tienen medida finita:

$$n\mu(A_n) \leq \int_{A_n} |f| d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty.$$

Luego,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int |f| d\mu = 0,$$

probando que f es finita c.t.p..

e) Por el apartado c), la función $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$ es integrable; sigue del apartado d) que es finita c.t.p., lo que obliga, por el apartado a), a que $\mu(E) = 0$. □