

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Autoevaluación 2

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)
6. Pregunta [6](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $m^*(A) = 5$. Se considera el conjunto $-3A = \{x : (-3)^{-1}x \in A\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- $m^*(-3A) = 15$.
 - $m(-3A) = 15$.
 - $m^*(-3A) = 5$.
 - $m^*(-3A) = 3/5$.
- b) Si $m^*(A) = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ para cualquier $B \subset \mathbb{R}$.
 - A no es medible.
 - A es contable.
 - $A = \emptyset$.
- c) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la σ -álgebra de Lebesgue es cierta?
- Contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
 - Es la σ -álgebra generada por los intervalos semiabiertos.
 - Contiene estrictamente a la σ -álgebra de Borel.
 - Es la σ -álgebra generada por los intervalos cerrados.
- d) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la medida de Lebesgue es cierta?
- La medida de Lebesgue no es invariante por traslaciones.
 - Si $m(E) < \infty$, entonces E es acotado.
 - Si E es incontable, entonces $m(E) > 0$.
 - La medida de Lebesgue de un punto es nula.
- e) Supongamos que A es medible Lebesgue, con $m(A) > 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre A es falsa?
- Contiene un cerrado de medida positiva.
 - Es incontable.
 - Contiene un abierto de medida positiva.
 - Contiene un subconjunto no medible.
- f) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- La función de Thomae no es integrable Riemann.
 - El conjunto de Vitali es unión de un boreliano y un conjunto de medida exterior nula.
 - La función de Dirichlet es integrable Riemann.
 - Existen conjuntos de tipo Cantor con medida de Lebesgue positiva.
- g) Si f es la función característica de los racionales, entonces $\int_0^1 f \, dx$ vale:
- 1, porque $\mathbb{Q}$ es denso.
 - 0, porque $m(\mathbb{Q}) = 0$.
 - ∞ , porque el cardinal de $\mathbb{Q}$ es infinito.
 - No existe, porque f no es medible.
- h) Sea $f_n(x) = n^{-1}\chi_{[0,n]}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$). Al hacer $n \rightarrow \infty$, ¿qué ocurre con $\int f_n \, dx$?
- Tiende a 0.
 - Tiende a 1.
 - Tiende a ∞ .
 - No converge.
- i) ¿Cuál de las siguientes funciones no es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$?
- $f(x) = e^{-|x|}$.
 - $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.
 - $f(x) = x^{-1} \sin x$.
 - $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
- j) Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre un espacio de medida arbitrario $(X, \mathcal{S}, \mu)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es monótona creciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, entonces $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.
 - $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.
 - Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p. y existe g integrable tal que $f_n \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), entonces $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.
 - Todas las anteriores.

2. [1.5 puntos]

- a) Demostrar que si una función f es continua c.t.p. $[m]$, entonces es medible Lebesgue.
- b) Sea C el conjunto de Cantor, y sea P un subconjunto de C que no es de Borel. Probar que $f = \chi_P$ es continua c.t.p. $[m]$, pero no medible Borel. [Sugerencia: Como C es cerrado, f es continua, al menos, en C^c .]
- c) ¿Qué propiedad de la medida de Lebesgue, de la que carece su restricción a los borelianos, explica que (tal como muestra b)) el apartado a) pueda ser falso si se reemplaza «medible Lebesgue» por «medible Borel»? Razonar la respuesta.

3. [1.5 puntos] Se considera la composición $h = f \circ g$ de dos funciones f y g , reales y de variable real. Demostrar que las siguientes cuatro condiciones sobre f y g garantizan que h es medible Borel: a) f es continua y g es medible Borel; b) f es medible Borel y g es continua; c) f, g son ambas medibles Borel; d) f, g son ambas continuas.

4. [1.5 puntos]

- a) (Teorema de Lusin, I) Sea $E \in \mathcal{M}$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $C \subset E$, cerrado en la topología relativa de E , tal que $m(E \setminus C) < \varepsilon$ y $f|_C$ es continua. La demostración de este resultado se basa en construir un conjunto cerrado C tal que la antiimagen por $f|_C$ de cualquier intervalo abierto con extremos racionales es un abierto relativo en C . Explicar por qué esta propiedad demuestra el teorema.
- b) (Teorema de Lusin, II) Sea $E \in \mathcal{M}$, con $m(E) < \infty$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset E$, tal que $m(E \setminus K) < \varepsilon$ y $f|_K$ es continua. Demostrar esta versión justificando y utilizando la siguiente sugerencia: si, dado $\varepsilon > 0$, C es el cerrado que proporciona el apartado a), existe un compacto $K \subset C$ tal que $m(C \setminus K) < \varepsilon$.
- c) Sean $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, $\varepsilon > 0$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$, y

$$U = [0, 1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right).$$

Justificar detalladamente que $K = [0, 1] \setminus U$ es el compacto cuya existencia se postula en b), y que no existe ningún abierto O tal que $f|_{[0,1] \cap O}$ es continua.

5. [1.5 puntos] Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponemos $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ ($x > 0$).

- a) Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \frac{1}{e^x + 1}.$$

- b) Utilizando a), verificar que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \ln 2 \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n dx.$$

- c) Enunciar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. La sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ¿satisface las hipótesis de este teorema?

- d) Enunciar el teorema de integración de series funcionales con términos a valores reales. ¿Es $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| dx < \infty$?

6. [3 puntos] Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$.

- a) Justificar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) = \infty \right\}.$$

- b) Enunciar el teorema de Beppo Levi.

- c) Mediante dicho teorema, deducir que la función $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$ es integrable.

- d) Demostrar que toda función integrable es finita c.t.p..

- e) Concluir que $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$.