

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto

Autoevaluación 2

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

a) Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(0,1) \cap L^2(0,1)$. Se consideran los siguientes enunciados:

(A) Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $L^1(0,1)$, entonces también converge a 0 en $L^2(0,1)$.

(B) Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a g en $L^1(0,1)$ y a h en $L^2(0,1)$, entonces $g = h$ c.t.p..

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

b) Sea f una función medible positiva definida sobre un conjunto medible E , con $\mu(E) < \infty$. ¿Cuál de las siguientes opciones es, en general, válida?

i. $\left(\int_E f d\mu\right) \left(\int_E \frac{1}{f} d\mu\right) < \mu^2(E)$.

iii. $\left(\int_E f d\mu\right) \left(\int_E \frac{1}{f} d\mu\right) = \mu^2(E)$.

ii. $\left(\int_E f d\mu\right) \left(\int_E \frac{1}{f} d\mu\right) > \mu^2(E)$.

iv. Ninguna de las anteriores.

c) Considérense los siguientes enunciados:

(A) Si $f \in L^p(0,1)$ para todo $p \in (1, \infty)$, entonces $f \in L^\infty(0,1)$.

(B) Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $L^q(1, \infty) \subset L^p(1, \infty)$.

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

d) Sean $1 \leq p < q \leq \infty$. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

i. $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

iii. $\ell^q \subsetneq \ell^p$.

ii. $\ell^p = \ell^q$.

iv. Ninguna de las anteriores.

e) Se define la medida signada $\nu(E) = \int_E x^3 dx$ sobre la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue $E \subset [-2, 2]$. El conjunto $[-1, 1]$:

i. Es ν -nulo.

iii. Es ν -negativo.

ii. Es ν -positivo.

iv. Tiene ν -medida nula.

f) Se define la medida $\nu(A) = \int_A \frac{dx}{1+x^2}$ sobre los borelianos $A \subset \mathbb{R}$, y se consideran los siguientes asertos:

(A) $\nu \ll m$, con $d\nu/dm = (1+x^2)^{-1}$.

(B) $m \ll \nu$, con $dm/d\nu = 1+x^2$.

¿Cuál de ellos es verdadero?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

g) Dadas dos medidas signadas μ, ν sobre una misma σ -álgebra $\mathcal{S}$, se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ , si:

i. $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$.

iii. $|\mu|(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$.

ii. $\nu(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$.

iv. $|\nu|(E) = 0$ implica $\mu(E) = 0$.

h) Se define una medida de Borel μ en $\mathbb{R}^2$ por

$$\mu(A) = \int_{A^0} e^{-x^2} dx,$$

donde A^0 es la y -sección del boreliano $A \subset \mathbb{R}^2$ para $y = 0$, y se consideran los siguientes asertos:

(A) $\mu \ll m \times m$.

(B) $\mu \perp m \times m$.

¿Cuál de ellos es verdadero?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

i) ¿Cuál de los siguientes enunciados es, en general, falso?

i. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los rectángulos medibles.

iii. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los conjuntos elementales.

ii. La σ -álgebra producto es la clase monótona generada por los rectángulos medibles.

iv. La σ -álgebra producto es la clase monótona generada por los conjuntos elementales.

j) Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y - 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Cuál de los siguientes resultados es correcto?

- i. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 0, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 0.$ iii. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 1, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 0.$
 ii. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 0, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 1.$ iv. $\int d\mu(x) \int f(x, y) d\nu(y) = 1, \int d\nu(y) \int f(x, y) d\mu(x) = 1.$

2. [3 puntos]

- a) Enunciar el teorema de Radon-Nikodým.
 b) Enunciar el teorema de descomposición de Lebesgue.

Sean $X = [0, 1]$ y $\mathcal{S}$ la σ -álgebra de Borel en $[0, 1]$, sobre la que se consideran la medida de Lebesgue m y la medida cardinal μ . Probar:

- c) Se tiene que $m \ll \mu$, pero no existe ninguna función medible, no negativa y finita f tal que $m(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \mathcal{S}$. ¿Qué hipótesis del teorema de Radon-Nikodým no se está verificando en este caso?
 d) La medida μ no admite descomposición de Lebesgue respecto de m . ¿Qué hipótesis del teorema de Lebesgue no se está verificando en este caso?

3. [3 puntos]

Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ intervalos disjuntos dos a dos, no degenerados pero no necesariamente finitos, y $a_1, \dots, a_n > 0$. Para cada $j = 1, \dots, n$ y cada boreliano A , se define la medida μ_j por $\mu_j(A) = m(A \cap I_j)$. Sea $\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j$.

- a) Demostrar que m y μ son σ -finitas.
 b) Probar que μ es absolutamente continua con respecto a m y hallar la correspondiente derivada de Radon-Nikodým. ¿Es única esta derivada? Justificar la respuesta.
 c) ¿Se verifica que $\mu \perp m$? Justificar la respuesta.

4. [1.5 puntos]

- a) Sean p, q exponentes conjugados. Enunciar la desigualdad de Hölder para $1 < p, q < \infty$ y para $p = 1, q = \infty$.
 b) Verificar que

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[5]{1-x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt[5]{54}}.$$

5. [1.5 puntos]

- a) Enunciar el teorema de Tonelli-Hobson-Fubini.
 b) Aplicarlo para comprobar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \ln 2.$$