

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto

Autoevaluación 3

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

a) Considérense los siguientes enunciados:

(A) Si $f \in L^p(0, \infty)$ para todo $1 \leq p < \infty$, entonces $f \in L^\infty(0, \infty)$.

(B) Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $L^p(0, \infty) \subset L^q(0, \infty)$ ó $L^q(0, \infty) \subset L^p(0, \infty)$.

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

b) Dada la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^{-3} \chi_{(2^{-n-1}, 2^{-n})}$, considérense los siguientes enunciados:

(A) $f \in L^p(0, 1)$ para algún $1 < p < \infty$.

(B) $f \in L^1(0, 1)$.

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

c) Dado un espacio de medida finita $(X, \mathcal{S}, \mu)$, considérense los siguientes enunciados:

(A) Existen $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, tales que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

(B) Cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, se tiene que $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$.

¿Cuál de ellos puede ser falso?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

d) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{S}$ tal que $0 < \mu(E) < \varepsilon$, y considérense los siguientes enunciados:

(A) Existen $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, tales que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

(B) Cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, se tiene que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

¿Cuál de ellos es falso?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

e) Sea ν una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$, y sean $A, B \in \mathcal{S}$ conjuntos disjuntos tales que $X = A \cup B$, con A positivo y B negativo.

¿Qué denominación recibe el par (A, B) ?

i. Descomposición de Hahn.

iii. Derivada de Radon-Nikodým.

ii. Descomposición de Jordan.

iv. Descomposición de Lebesgue.

f) La expresión de una medida signada ν en la forma $\nu = \nu^+ - \nu^-$, con $\nu^+ \perp \nu^-$, recibe el nombre de:

i. Descomposición de Hahn.

iii. Derivada de Radon-Nikodým.

ii. Descomposición de Jordan.

iv. Descomposición de Lebesgue.

g) La expresión de una medida σ -finita ν en la forma $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde ν_0, ν_1 son medidas tales que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$, siendo μ otra medida σ -finita, recibe el nombre de:

i. Descomposición de Hahn.

iii. Derivada de Radon-Nikodým.

ii. Descomposición de Jordan.

iv. Descomposición de Lebesgue.

h) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es, en general, correcta?

i. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los rectángulos medibles.

iii. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los conjuntos elementales.

ii. La σ -álgebra producto es el conjunto formado por todos los rectángulos medibles.

iv. La σ -álgebra producto es la clase monótona generada por los conjuntos elementales.

i) Para la validez del teorema de Fubini, las medidas involucradas deben ser:

i. Absolutamente continuas respecto de una tercera.

iii. σ -finitas.

ii. Mutuamente singulares.

iv. Completas.

j) Sea f una función medible en el espacio producto $(X \times Y, \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \mu \times \nu)$, y considérense los siguientes enunciados:

(A) $f \geq 0$.

(B) Cualquiera de las dos integrales iteradas de $|f|$ es finita.

Suponiendo que μ y ν satisfacen las hipótesis necesarias, ¿bajo qué condición es posible calcular la integral doble de f como una integral iterada en cualquier orden?

- i. (A) y (B).
- ii. (A), pero no (B).
- iii. (B), pero no (A).
- iv. Ni (A), ni (B).

2. [3 puntos] Demostrar que $x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^p(0, \infty)$ si $p = 2$, pero no si $p \neq 2$. [Sugerencia: Distinguir los casos $p = 2$, $p > 2$ y $p < 2$.]

3. [1.5 puntos]

a) Enunciar las desigualdades de Hölder y Cauchy-Schwarz.

b) Aplicar esta última para demostrar que $|\arcsen x| \leq \sqrt{\frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)}$ ($|x| < 1$).

4. [1.5 puntos]

a) Enunciar los teoremas de Tonelli-Hobson-Fubini.

b) Se considera sobre $[0, 1]$ la medida de Lebesgue m y se define $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2}, & 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Es cierto que $f \in L^1(m \times m)$?

5. [3 puntos]

a) Enunciar el teorema de Radon-Nikodým.

Sean $\mathcal{M}$ y m , respectivamente, la σ -álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\nu(E) = \int_E f \, dx \quad (E \in \mathcal{M}),$$

donde $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Justificar detalladamente el siguiente desarrollo.

b) Como $m \ll \nu$, existe una función medible, no negativa y finita g tal que

$$m(E) = \int_E g \, d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

c) Se verifica

$$\int_E \psi \, dx = \int_E \psi g \, d\nu \quad (E \in \mathcal{M})$$

para toda función simple medible ψ .

d) Aproximando f por una sucesión no decreciente de funciones simples medibles, encontramos que

$$\nu(E) = \int_E f g \, d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

e) Por tanto, $g(x) = 1 + x^2$ c.t.p. $[m]$.

f) Expresar el resultado obtenido en términos de las derivadas de Radon-Nikodým $d\nu/dm$ y $dm/d\nu$.