

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto
Solucionario de la Autoevaluación 3

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

a) Considérense los siguientes enunciados:

(A) Si $f \in L^p(0, \infty)$ para todo $1 \leq p < \infty$, entonces $f \in L^\infty(0, \infty)$.

(B) Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $L^p(0, \infty) \subset L^q(0, \infty)$ ó $L^q(0, \infty) \subset L^p(0, \infty)$.

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

b) Dada la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^{-3} \chi_{(2^{-n-1}, 2^{-n})}$, considérense los siguientes enunciados:

(A) $f \in L^p(0, 1)$ para algún $1 < p < \infty$.

(B) $f \in L^1(0, 1)$.

¿Cuál de ellos es cierto?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

c) Dado un espacio de medida finita $(X, \mathcal{S}, \mu)$, considérense los siguientes enunciados:

(A) Existen $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, tales que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

(B) Cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, se tiene que $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$.

¿Cuál de ellos puede ser falso?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

d) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{S}$ tal que $0 < \mu(E) < \varepsilon$, y considérense los siguientes enunciados:

(A) Existen $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, tales que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

(B) Cualesquiera sean $p, q \in [1, \infty]$, con $p < q$, se tiene que $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

¿Cuál de ellos es falso?

i. (A) y (B).

iii. (B), pero no (A).

ii. (A), pero no (B).

iv. Ni (A), ni (B).

e) Sea ν una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$, y sean $A, B \in \mathcal{S}$ conjuntos disjuntos tales que $X = A \cup B$, con A positivo y B negativo.

¿Qué denominación recibe el par (A, B) ?

i. Descomposición de Hahn.

iii. Derivada de Radon-Nikodým.

ii. Descomposición de Jordan.

iv. Descomposición de Lebesgue.

f) La expresión de una medida signada ν en la forma $\nu = \nu^+ - \nu^-$, con $\nu^+ \perp \nu^-$, recibe el nombre de:

i. Descomposición de Hahn.

iii. Derivada de Radon-Nikodým.

ii. Descomposición de Jordan.

iv. Descomposición de Lebesgue.

g) La expresión de una medida σ -finita ν en la forma $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde ν_0, ν_1 son medidas tales que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$, siendo μ otra medida σ -finita, recibe el nombre de:

i. Descomposición de Hahn.

iii. Derivada de Radon-Nikodým.

ii. Descomposición de Jordan.

iv. Descomposición de Lebesgue.

h) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es, en general, correcta?

i. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los rectángulos medibles.

iii. La σ -álgebra producto es la σ -álgebra generada por los conjuntos elementales.

ii. La σ -álgebra producto es el conjunto formado por todos los rectángulos medibles.

iv. La σ -álgebra producto es la clase monótona generada por los conjuntos elementales.

i) Para la validez del teorema de Fubini, las medidas involucradas deben ser:

i. Absolutamente continuas respecto de una tercera.

iii. σ -finitas.

ii. Mutuamente singulares.

iv. Completas.

j) Sea f una función medible en el espacio producto $(X \times Y, \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \mu \times \nu)$, y considérense los siguientes enunciados:

(A) $f \geq 0$.

(B) Cualquiera de las dos integrales iteradas de $|f|$ es finita.

Suponiendo que μ y ν satisfacen las hipótesis necesarias, ¿bajo qué condición es posible calcular la integral doble de f como una integral iterada en cualquier orden?

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| i. (A) y (B). | iii. (B), pero no (A). |
| ii. (A), pero no (B). | iv. Ni (A), ni (B). |

Resolución.

- | | | | | |
|---------|--------|--------|--------|--|
| a) iv. | c) ii. | e) i. | g) iv. | i) iii. |
| b) iii. | d) i. | f) ii. | h) ii. | j) i. □ |

2. [3 puntos] Demostrar que $x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^p(0, \infty)$ si $p = 2$, pero no si $p \neq 2$. [Sugerencia: Distinguir los casos $p = 2$, $p > 2$ y $p < 2$.]

Resolución.

- a) Si $p = 2$, intégrese explícitamente sobre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ para obtener una integral finita.
- b) Si $p > 2$, $\int_0^1 x^{-p/2}(1 - \ln x)^{-p} dx$ es infinita, por comparación con $\int_0^1 x^{-1} dx$.
- c) Si $p < 2$, $\int_1^\infty x^{-p/2}(1 + \ln x)^{-p} dx$ es, de nuevo, infinita, por comparación con $\int_1^\infty x^{-1} dx$.

En efecto:

- a) Para $p = 2$ tenemos (cambio de variable $\ln x = t$, con $dx/x = dt$ y t entre $-\infty$ y 0):

$$\int_0^1 \frac{1}{x(1 - \ln x)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1 - t)^2} dt = \frac{1}{1 - t} \Big|_{-\infty}^0 = 1,$$

y también (cambio de variable $\ln x = t$, con $dx/x = dt$ y t entre 0 e ∞):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1 + \ln x)^2} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + t)^2} dt = -\frac{1}{1 + t} \Big|_0^\infty = 1.$$

En cualquier caso, la integral es finita y vale 2.

- b) Si $p > 2$, comparamos con x^{-1} en $(0, 1)$: se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{\frac{p}{2}}(1 - \ln x)^p} : \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^{\frac{p}{2}-1}(1 - \ln x)^p} = \frac{1}{\left[x^{\frac{p-2}{2p}}(1 - \ln x)\right]^p} \\ &= \frac{1}{\left(x^{\frac{p-2}{2p}} - x^{\frac{p-2}{2p}} \ln x\right)^p} = \frac{1}{(x^\alpha - x^\alpha \ln x)^p} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty, \end{aligned}$$

ya que $\alpha = \frac{p-2}{2p} > 0$ y en tal caso, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ y $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. La integral es infinita.

- c) Si $p < 2$, comparamos con x^{-1} en $(1, \infty)$: se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{\frac{p}{2}}(1 + \ln x)^p} : \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^{\frac{p}{2}-1}(1 + \ln x)^p} = \frac{1}{\left[x^{\frac{p-2}{2p}}(1 + \ln x)\right]^p} \\ &= \frac{1}{\left(x^{\frac{p-2}{2p}} + x^{\frac{p-2}{2p}} \ln x\right)^p} = \frac{1}{(x^\alpha + x^\alpha \ln x)^p} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned}$$

ya que $\alpha = \frac{p-2}{2p} < 0$ y en tal caso, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ y $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. La integral es infinita. □

3. [1.5 puntos]

- a) Enunciar las desigualdades de Hölder y Cauchy-Schwarz.
- b) Aplicar esta última para demostrar que $|\arcsen x| \leq \sqrt{\frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)}$ ($|x| < 1$).

Resolución.

- a) Teoremas 2.20 y 2.24 del Tema 3 (desigualdad de Hölder para $1 < p, q < \infty$ y para $p = 1, q = \infty$, respectivamente). Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$, con $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Aquí,

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es el caso particular de la de Hölder correspondiente a $p = q = 2$.

- b) Si $x \in [0, 1)$, se tiene, por Cauchy-Schwarz,

$$|\arcsen x| = \arcsen x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \sqrt{\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \int_0^x dt} = \sqrt{\frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)}.$$

Si $x \in (-1, 0]$, entonces $-x \in [0, 1)$ y, por tanto,

$$|\arcsen x| = \arcsen(-x) \leq \sqrt{\frac{-x}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)} = \sqrt{\frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)}.$$

□

4. [1.5 puntos]

- a) Enunciar los teoremas de Tonelli-Hobson-Fubini.
- b) Se considera sobre $[0, 1]$ la medida de Lebesgue m y se define $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2}, & 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Es cierto que $f \in L^1(m \times m)$?

Resolución.

- a) Teorema 2.5 del Tema 5 (Tonelli-Hobson, I). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita, y sea $f \geq 0$ una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible. Pongamos

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y).$$

Entonces, φ es $\mathcal{S}$ -medible, ψ es $\mathcal{T}$ -medible, y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

Teorema 2.7 del Tema 5 (Tonelli-Hobson, II). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Dada una

función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible f , definimos

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x d\nu, \quad \psi^*(y) = \int_X |f|^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y).$$

Las condiciones $\varphi^* \in L^1(\mu)$, $\psi^* \in L^1(\nu)$, $f \in L^1(\mu \times \nu)$, son equivalentes.

Teorema 2.8 del Tema 5 (Fubini). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ para casi todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$, las funciones φ y ψ definidas por

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y)$$

están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$, respectivamente, y se cumple:

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

- b) La respuesta es negativa. Si $f \in L^1(m \times m)$, el teorema de Fubini garantizaría la igualdad de las integrales iteradas. Sin embargo,

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{y^2} dx - \int_y^1 \frac{1}{x^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \Big|_y^1 \right) dy = 1,$$

mientras que

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x -\frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \Big|_x^1 \right) dx = -1. \quad \square$$

5. [3 puntos]

- a) Enunciar el teorema de Radon-Nikodým.

Sean $\mathcal{M}$ y m , respectivamente, la σ -álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\nu(E) = \int_E f dx \quad (E \in \mathcal{M}),$$

donde $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Justificar detalladamente el siguiente desarrollo.

- b) Como $m \ll \nu$, existe una función medible, no negativa y finita g tal que

$$m(E) = \int_E g d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

- c) Se verifica

$$\int_E \psi dx = \int_E \psi g d\nu \quad (E \in \mathcal{M})$$

para toda función simple medible ψ .

- d) Aproximando f por una sucesión no decreciente de funciones simples medibles, encontramos que

$$\nu(E) = \int_E f g d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

- e) Por tanto, $g(x) = 1 + x^2$ c.t.p. $[m]$.

f) Expresar el resultado obtenido en términos de las derivadas de Radon-Nikodým dv/dm y dm/dv .

Resolución.

a) Teorema 3.5 del Tema 4 (Radon-Nikodým). Supongamos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita y ν es una medida σ -finita sobre $\mathcal{S}$, verificando que $\nu \ll \mu$. Existe una función medible no negativa y finita f sobre X tal que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Además, f es única, en el sentido de que si

$$\nu(E) = \int_E g d\mu \quad (E \in \mathcal{S}),$$

entonces $f = g$ c.t.p. $[\mu]$. Cualquiera de estas f se llama derivada de Radon-Nikodým de ν respecto de μ , denotada $dv/d\mu$.

b) La medida ν es positiva y finita (luego, σ -finita). Se tiene que $\mu \ll \nu$ ya que, al ser $f > 0$, si $E \in \mathcal{M}$ y $\nu(E) = 0$, necesariamente $\mu(E) = 0$. Dado que μ también es positiva y σ -finita ($\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$, donde cada intervalo tiene medida finita $2n$), el teorema de Radon-Nikodým proporciona g cumpliendo lo afirmado.

c) Supongamos que $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, con $a_i > 0$ y $A_i \in \mathcal{M}$ ($i = 1, \dots, n$). Entonces,

$$\begin{aligned} \int_E \psi dx &= \int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \right) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_{E \cap A_i} dx = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{E \cap A_i} g d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int_E \chi_{A_i} g d\nu = \int_E \psi g d\nu \quad (E \in \mathcal{M}). \end{aligned}$$

d) El teorema de aproximación de Lebesgue (Teorema 1.19 del Tema 2) permite escribir la función medible no negativa f como límite puntual de una sucesión no decreciente de funciones simples medibles $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces fg es el límite puntual de la sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas $\{\psi_n g\}_{n=1}^{\infty}$. Aplicamos a ambas sucesiones el teorema de la convergencia monótona (Teorema 1.17 del Tema 2) y c), para obtener:

$$\nu(E) = \int_E f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n g d\nu = \int_E fg d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

e) Ahora,

$$\nu(E) = \int_E fg d\nu = \int_E d\nu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

La unicidad del teorema de Radon-Nikodým obliga a que $fg = 1$ c.t.p. $[\nu]$, así que $g(x) = 1 + x^2$ c.t.p. $[\nu]$ o, equivalentemente, $[m]$.

f) El resultado obtenido se resume diciendo que

$$g = \frac{dm}{dv} = \left(\frac{dv}{dm} \right)^{-1} = \frac{1}{f} \quad [m].$$

□