

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Autoevaluación 3

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Si $m^*(A) = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
- i. $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ para cualquier $B \subset \mathbb{R}$.
 - ii. A no es medible.
 - iii. A es contable.
 - iv. $A = \emptyset$.
- b) ¿Para cuáles de los siguientes conjuntos A se tiene que $m^*(A) = 0$?
- i. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - ii. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - iii. El conjunto de Vitali.
 - iv. El conjunto de tipo Cantor $C^{(\alpha)}$, con $0 \leq \alpha < 1$.
- c) ¿Cuál de las siguientes condiciones no garantiza que A es medible?
- i. $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ ($E \subset \mathbb{R}$).
 - ii. $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$ ($E \subset \mathbb{R}$).
 - iii. $m^*(A) = 0$.
 - iv. $m^*(A^c) = 0$.
- d) Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de un conjunto X . Entonces, $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$ es igual a:
- i. $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$.
 - ii. $\bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty E_n$.
 - iii. $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$.
 - iv. $\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n$.
- e) Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de un conjunto X . Entonces, $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ es igual a:
- i. $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$.
 - ii. $\bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty E_n$.
 - iii. $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$.
 - iv. $\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n$.
- f) Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- i. E es unión de un F_σ y un conjunto de medida nula.
 - ii. Existe un conjunto de medida nula cuya unión con E es un G_δ .
 - iii. Si $m(E) > 0$, entonces E contiene un cerrado no vacío.
 - iv. Si E contiene un cerrado no vacío, entonces $m(E) > 0$.
- g) Si una propiedad se verifica c.t.p., ¿qué se puede afirmar de su negación?
- i. No se verifica en un conjunto de medida nula.
 - ii. Se verifica en un conjunto de medida nula.
 - iii. Se verifica en todo punto.
 - iv. No se verifica en ningún punto.
- h) El supremo esencial de una función f sobre un conjunto medible E se define como:
- i. La menor cota superior de f sobre E .
 - ii. El mayor valor que toma f en c.t.p. de E .
 - iii. La menor cota superior de f en c.t.p. de E .
 - iv. El punto donde f alcanza su máximo en E .
- i) Supongamos que f es medible no negativa. ¿Cuál de los siguientes procedimientos no es, en general, válido para calcular su integral?
- i. Aproximar f por una sucesión creciente de funciones simples medibles y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - ii. Expresar $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ como una serie de funciones integrables tales que $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| dx < \infty$.
 - iii. Aproximar f por la sucesión $f_n = \min\{f, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - iv. Aproximar f por una sucesión de funciones medibles no negativas y aplicar el lema de Fatou.
- j) ¿Cuál de las siguientes funciones es integrable Lebesgue, pero no integrable Riemann, en $[0, 1]$?
- i. La función característica del conjunto de Cantor.
 - ii. La función característica del conjunto de Vitali.
 - iii. La función de Dirichlet.
 - iv. La función de Thomae.

2. [3 puntos] Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

- a) Definir el concepto de σ -álgebra. Dar tres ejemplos no triviales.
- b) Explicar la diferencia entre medida exterior y medida en el contexto de la teoría de Lebesgue. ¿Qué condición caracteriza a los conjuntos medibles?

c) Se tiene una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones integrables sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$, tales que

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

¿Se puede afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty?$$

3. [1.5 puntos] a) Enunciar el lema de Fatou.

b) Aplicarlo para probar que si $f, f_k \in L^1(\mu)$ ($k \in \mathbb{N}$), con $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ c.t.p. $[\mu]$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k| d\mu = \int |f| d\mu,$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| d\mu = 0.$$

4. [1.5 puntos] a) Enunciar el teorema de la convergencia dominada.

b) Aplicarlo para demostrar que si $p, q > 0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+nq}.$$

5. [3 puntos]

a) Describir el proceso de construcción de la integral de Lebesgue mediante extensiones sucesivas a partir de la integral de funciones simples medibles hasta llegar a la integral de funciones medibles reales, respondiendo, en particular, a las siguientes cuestiones:

- ¿Es cierto que toda función medible no negativa tiene una integral? ¿Es cierto que toda función medible no negativa es integrable? ¿Cuál es el matiz que diferencia «tener una integral» de «ser integrable»?
- ¿Qué ocurre si en a) se reemplaza «medible no negativa» por «medible real»?

b) Enunciar el teorema de aproximación de Lebesgue.

c) Enunciar el teorema de la convergencia monótona.

d) Sea f una función integrable Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Dado $a > 0$, defínase $f_a(x) = f(ax)$ ($x \in \mathbb{R}$). Ilustrar los apartados a), b) y c) probando que

$$\int f_a dx = \frac{1}{a} \int f dx.$$