

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Solucionario de la Autoevaluación 3

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Si $m^*(A) = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
- $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ para cualquier $B \subset \mathbb{R}$.
 - A no es medible.
 - A es contable.
 - $A = \emptyset$.
- b) ¿Para cuáles de los siguientes conjuntos A se tiene que $m^*(A) = 0$?
- $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - El conjunto de Vitali.
 - El conjunto de tipo Cantor $C^{(\alpha)}$, con $0 \leq \alpha < 1$.
- c) ¿Cuál de las siguientes condiciones no garantiza que A es medible?
- $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ ($E \subset \mathbb{R}$).
 - $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$ ($E \subset \mathbb{R}$).
 - $m^*(A) = 0$.
 - $m^*(A^c) = 0$.
- d) Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de un conjunto X . Entonces, $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$ es igual a:
- $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$.
 - $\bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty E_n$.
 - $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$.
 - $\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n$.
- e) Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de un conjunto X . Entonces, $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ es igual a:
- $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$.
 - $\bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty E_n$.
 - $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$.
 - $\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n$.
- f) Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- E es unión de un F_σ y un conjunto de medida nula.
 - Existe un conjunto de medida nula cuya unión con E es un G_δ .
 - Si $m(E) > 0$, entonces E contiene un cerrado no vacío.
 - Si E contiene un cerrado no vacío, entonces $m(E) > 0$.
- g) Si una propiedad se verifica c.t.p., ¿qué se puede afirmar de su negación?
- No se verifica en un conjunto de medida nula.
 - Se verifica en un conjunto de medida nula.
 - Se verifica en todo punto.
 - No se verifica en ningún punto.
- h) El supremo esencial de una función f sobre un conjunto medible E se define como:
- La menor cota superior de f sobre E .
 - El mayor valor que toma f en c.t.p. de E .
 - La menor cota superior de f en c.t.p. de E .
 - El punto donde f alcanza su máximo en E .
- i) Supongamos que f es medible no negativa. ¿Cuál de los siguientes procedimientos no es, en general, válido para calcular su integral?
- Aproximar f por una sucesión creciente de funciones simples medibles y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - Expresar $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ como una serie de funciones integrables tales que $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| dx < \infty$.
 - Aproximar f por la sucesión $f_n = \min\{f, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) y aplicar el teorema de la convergencia monótona.
 - Aproximar f por una sucesión de funciones medibles no negativas y aplicar el lema de Fatou.
- j) ¿Cuál de las siguientes funciones es integrable Lebesgue, pero no integrable Riemann, en $[0, 1]$?
- La función característica del conjunto de Cantor.
 - La función característica del conjunto de Vitali.
 - La función de Dirichlet.
 - La función de Thomae.

Resolución.

- | | | | | |
|-------|--------|--------|---------|--|
| a) i. | c) ii. | e) iv. | g) ii. | i) iv. |
| b) i. | d) ii. | f) iv. | h) iii. | j) iii. □ |

2. [3 puntos] Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

- a) Definir el concepto de σ -álgebra. Dar tres ejemplos no triviales.

- b) Explicar la diferencia entre medida exterior y medida en el contexto de la teoría de Lebesgue. ¿Qué condición caracteriza a los conjuntos medibles?
- c) Se tiene una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones integrables sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$, tales que

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

¿Se puede afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty?$$

Resolución.

- a) Una σ -álgebra sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X que cumple:

- i. $X \in \mathcal{S}$.
- ii. Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $A^c \in \mathcal{S}$.
- iii. La familia $\mathcal{S}$ es cerrada bajo uniones contables: si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

Son ejemplos no triviales: la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}$, generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$; la σ -álgebra de Lebesgue $\mathcal{M}$, formada por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son medibles Lebesgue; y la σ -álgebra co-contable en un conjunto incontable X (digamos, $X = \mathbb{R}$), formada por los subconjuntos de X tales que ellos mismos, o sus complementarios, son contables.

- b) La medida exterior m^* está definida para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, y es contablemente subaditiva:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \quad (A_n \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}). \quad (1)$$

La medida de Lebesgue m es la restricción de m^* a la σ -álgebra $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles Lebesgue, que son aquellos que satisfacen la condición de Carathéodory. Se dice que $E \subset \mathbb{R}$ satisface la condición de Carathéodory si para todo $A \subset \mathbb{R}$, se tiene que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

La medida de Lebesgue m es contablemente aditiva sobre $\mathcal{M}$, es decir, si los conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ son disjuntos dos a dos, entonces se da la igualdad en (1).

- c) No, pues al incumplirse la tesis del teorema de integración de series funcionales con términos a valores reales, debe incumplirse también la hipótesis:

Teorema 2.14 del Tema 2. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables, tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge c.t.p., su suma f es integrable, y

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu. \quad \square$$

3. [1.5 puntos] a) Enunciar el lema de Fatou.

- b) Aplicarlo para probar que si $f, f_k \in L^1(\mu)$ ($k \in \mathbb{N}$), con $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ c.t.p. $[\mu]$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k| d\mu = \int |f| d\mu,$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| d\mu = 0.$$

Resolución.

- a) Teorema 2.4 del Tema 2 (lema de Fatou). Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas en un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Entonces,

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu.$$

- b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos la función medible no negativa $g_k = |f_k| + |f| - |f_k - f|$. Ya que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ c.t.p. $[\mu]$, necesariamente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 2|f| \quad \text{c.t.p. } [\mu].$$

Aplicando el lema de Fatou a $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, resulta:

$$\begin{aligned} 2 \int |f| d\mu &= \int \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int g_k d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int (|f_k| + |f| - |f_k - f|) d\mu \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int |f_k| d\mu + \int |f| d\mu - \int |f_k - f| d\mu \right) \\ &= \int |f| d\mu + \int |f| d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| d\mu \\ &= 2 \int |f| d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| d\mu. \end{aligned}$$

Como $f \in L^1(\mu)$, sigue que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| d\mu \leq 0,$$

de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| d\mu = 0. \quad \square$$

4. [1.5 puntos] a) Enunciar el teorema de la convergencia dominada.

- b) Aplicarlo para demostrar que si $p, q > 0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+nq}.$$

Resolución.

- a) Teorema 2.13 del Tema 2 (convergencia dominada). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), donde g es una función integrable, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p.. Entonces, f es integrable,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu, \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

- b) Buscamos un desarrollo en serie alternada a cuyas sumas parciales aplicaremos el teorema en cuestión. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p+nq-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{p+nq-1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{p+nq}}{p+nq} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+nq}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que la m -ésima suma parcial de la serie que integramos término a término está mayorada por una

función integrable: si $0 < x < 1$, entonces

$$\left| \sum_{n=0}^m (-1)^n x^{p+nq-1} \right| = x^{p-1} \left| \sum_{n=0}^m (-x^q)^n \right| = x^{p-1} \left| \frac{1 - (-x^q)^{m+1}}{1 + x^q} \right| \leq x^{p-1} \frac{1 + x^{q(m+1)}}{1 + x^q} \leq x^{p-1} \quad (m \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

con

$$\int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p} \Big|_0^1 = \frac{1}{p} < \infty. \quad \square$$

5. [3 puntos]

- a) Describir el proceso de construcción de la integral de Lebesgue mediante extensiones sucesivas a partir de la integral de funciones simples medibles hasta llegar a la integral de funciones medibles reales, respondiendo, en particular, a las siguientes cuestiones:
- ¿Es cierto que toda función medible no negativa tiene una integral? ¿Es cierto que toda función medible no negativa es integrable? ¿Cuál es el matiz que diferencia «tener una integral» de «ser integrable»?
 - ¿Qué ocurre si en a) se reemplaza «medible no negativa» por «medible real»?
- b) Enunciar el teorema de aproximación de Lebesgue.
- c) Enunciar el teorema de la convergencia monótona.
- d) Sea f una función integrable Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Dado $a > 0$, defínase $f_a(x) = f(ax)$ ($x \in \mathbb{R}$). Ilustrar los apartados a), b) y c) probando que

$$\int f_a dx = \frac{1}{a} \int f dx. \quad (2)$$

Resolución.

- a) Se define primero la integral de funciones simples medibles, y luego la de funciones medibles no negativas f como el supremo de las anteriores tomadas sobre todas las funciones simples mayoradas por f . Cualquier función medible no negativa tiene una integral, ya sea finita (en cuyo caso diremos que es integrable) o infinita. Las partes positiva f^+ y negativa f^- de una función medible real $f = f^+ - f^-$ son medibles no negativas y, por tanto, admitirán una integral; si, al menos, una de estas integrales es finita, tiene sentido definir la integral de f como la diferencia entre las integrales de f^+ y f^- , aunque esta integral puede valer $\pm\infty$. Se dirá que una función medible real f es integrable si la función medible no negativa $|f|$ lo es. En tal caso, $f^\pm$ son siempre integrables, lo que garantiza que f tiene una integral bien definida y finita.
- b) Teorema 2.6 del Tema 2 (aproximación de Lebesgue). Sea $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones simples medibles tales que $\varphi_n \nearrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- c) Teorema 2.5 del Tema 2 (convergencia monótona). Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, con $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ($n \in \mathbb{N}$), una sucesión de funciones medibles, tales que $f_n \nearrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

- d) La hipótesis de integrabilidad asegura que la integral de f está bien definida y es finita.

Supóngase que $A \in \mathcal{M}$, con $m(A) < \infty$. Entonces $\int \chi_A dx = m(A)$, y χ_A es integrable. Por otra parte,

$$\begin{aligned} (\chi_A)_a(x) &= \chi_A(ax) = \begin{cases} 1, & ax \in A \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & x \in \frac{1}{a}A \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \chi_{\frac{1}{a}A}(x).$$

Luego,

$$\int (\chi_A)_a dx = \int \chi_{\frac{1}{a}A} dx = m\left(\frac{1}{a}A\right) = \frac{1}{a}m(A) = \frac{1}{a} \int \chi_A dx.$$

Por linealidad, (2) vale para funciones simples. Que también vale para funciones medibles no negativas es consecuencia del teorema de aproximación de Lebesgue (si $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples medibles tal que $\varphi_n \nearrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $(\varphi_n)_a \nearrow f_a$ cuando $n \rightarrow \infty$) y del teorema de la convergencia monótona:

$$\int f_a dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\varphi_n)_a dx = \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n dx = \frac{1}{a} \int f dx.$$

Finalmente, cuando f es medible real, aplicamos (2) a las funciones medibles no negativas f^+ y f^- para concluir que

$$\begin{aligned} \int f_a dx &= \int (f^+ - f^-)_a dx = \int [(f^+)_a - (f^-)_a] dx \\ &= \frac{1}{a} \int f^+ dx - \frac{1}{a} \int f^- dx = \frac{1}{a} \int (f^+ - f^-) dx = \frac{1}{a} \int f dx. \end{aligned} \quad \square$$