

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Autoevaluación 4

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) ¿Cuál de los siguientes asertos sobre la medida exterior de Lebesgue es falso?
- Es invariante por traslaciones.
 - Aplicada a un intervalo, devuelve su longitud.
 - Está definida para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
 - Es contablemente aditiva.
- b) Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $m^*(A) = 2$. Se considera el conjunto $2A = \{2x : x \in A\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- $m(2A) = 4$.
 - $m^*(2A) = 4$.
 - $m^*(2A) = 2$.
 - $m^*(2A) = 1$.
- c) Si $m^*(A) = 0$, ¿cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- A es medible.
 - $m^*(A \cup B) < m^*(B)$ para cualquier $B \subset \mathbb{R}$.
 - A es contable.
 - $A = \emptyset$.
- d) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la σ -álgebra de Borel es falsa?
- Contiene a la clase $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$.
 - Contiene a la clase $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$.
 - Contiene estrictamente a la σ -álgebra de Lebesgue.
 - Es la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos.
- e) ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- La medida de Lebesgue no es completa.
 - Si E es medible y acotado, entonces $m(E) < \infty$.
 - Si $m(E) < \infty$, entonces E es medible y acotado.
 - La medida de Lebesgue del conjunto de Vitali es nula.
- f) ¿Cuál de los siguientes asertos es falso?
- Si f es continua y g es medible, entonces $f \circ g$ es medible.
 - Si f y g son medibles Borel, entonces $f \circ g$ es medible Borel.
 - Si f y g son medibles, entonces $f \circ g$ es medible.
 - Si f es medible Borel y g es medible, entonces $f \circ g$ es medible.
- g) ¿Cuál de los siguientes enunciados no implica que la función f sea medible?
- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible.
 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.
 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.
 - f es continua.
- h) Los siguientes asertos se refieren a una función f definida sobre un espacio de medida abstracto. ¿Cuál de ellos es falso?
- Si $|f|$ no es medible, entonces f no es medible.
 - Si f no es medible, entonces f^+ ó f^- no son medibles.
 - Si $|f|$ es medible, entonces f es medible.
 - Si f no es integrable, entonces f^+ ó f^- no son integrables.
- i) Sea C el conjunto de Cantor habitual. La integral de χ_C sobre $[0, 1]$:
- No existe, porque C no es medible.
 - Vale ∞ , porque C es incontable.
 - Vale 1, porque C es denso.
 - Vale 0, porque $m(C) = 0$.
- j) Los siguientes enunciados se refieren a funciones acotadas f definidas en intervalos acotados. ¿Cuál de ellos es cierto?
- Si f es integrable Lebesgue, entonces es integrable Riemann y ambas integrales coinciden.
 - Si f es integrable Riemann, entonces es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden.
 - Si f es integrable Lebesgue, entonces su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.
 - Si f es discontinua en un conjunto de medida nula, entonces no es integrable Riemann.

2. [3 puntos]

- a) Probar que dado cualquier conjunto A , existe un conjunto medible E que contiene a A , tal que $m^*(A) = m(E)$.
- b) Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Supongamos que $\int_A f d\mu = 0$ para todo $A \in \mathcal{S}$. Demostrar que $f = 0$ c.t.p..

3. [1.5 puntos] Sea $E \in \mathcal{M}$ un conjunto acotado. Probar que existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $A \subset E$ y $m(A) = m(E)/\pi$. [Sugerencia: Aplicar el teorema de los valores intermedios, en un intervalo adecuado, a la función continua $\alpha \mapsto m(E \cap (-\alpha, \alpha))$.]

4. [1.5 puntos]

a) Enunciar el teorema de integración de series funcionales con términos a valores reales.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$f_n(x) = (-x)^n \quad (0 < x < 1).$$

Comprobar que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n dx$$

y que, sin embargo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_n| dx = \infty.$$

Explicar por qué b) no contradice a).

5. [3 puntos] Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $f_n(x) = n\chi_{(0, n^{-1})}(x)$ ($x \in (0, 1]$).

a) Verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) dx.$$

b) Sea $h(x) = \lfloor x^{-1} \rfloor$ ($x \in (0, 1]$). Comprobar que $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = h$.

c) Enunciar el teorema de Beppo Levi.

d) Demostrar que $h \notin L^1(0, 1)$.

e) Enunciar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

f) Explicar por qué a) no contradice e).