

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto
Autoevaluación 4

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. [Pregunta 1](#)
2. [Pregunta 2](#)
3. [Pregunta 3](#)
4. [Pregunta 4](#)
5. [Pregunta 5](#)
6. [Pregunta 6](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$). ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- Si $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para algún q , $1 \leq q \leq \infty$, entonces existe $f \in L^q(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_q = 0$.
 - $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ admite una subsucesión convergente c.t.p..
 - Si $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para algún q , $1 \leq q \leq \infty$, entonces existe $f \in L^q(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_q = \|f\|_q$.
 - Todos los anteriores.
- b) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, donde p, q son exponentes conjugados en el rango $(1, \infty)$. Entonces $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- c) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f \in L^1(\mu)$, $g \in L^\infty(\mu)$. Entonces $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- d) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in L^p(\mu)$, con $p \in (1, \infty)$. Entonces $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- e) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in L^\infty(\mu)$. Entonces $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- f) Sea ν una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$, y sean $A, B \in \mathcal{S}$ tales que $X = A \cup B$. ¿Qué condiciones deben cumplir A y B para constituir una descomposición de Hahn de X respecto de ν ?
- $A \cap B \neq \emptyset$, A es ν -positivo y B es ν -negativo.
 - $A \triangle B$ es ν -nulo.
 - $A \cap B$ es ν -nulo.
 - $A \cap B = \emptyset$, A es ν -positivo y B es ν -negativo.
- g) Supongamos que μ y ν son medidas sobre X , y que $\nu(X) = 2$. Sea f la derivada de Radon-Nikodým de μ respecto de $\mu + \nu$. Entonces, $\nu(\{x : f(x) < 1\})$ vale:
- 2.
 - $3/2$.
 - $1/2$.
 - 1.
- h) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- La σ -álgebra producto es la menor que contiene a los rectángulos medibles.
 - La medida producto es la única definida sobre una σ -álgebra producto que asigna a un rectángulo medible el producto de las medidas de los conjuntos factores.
 - La σ -álgebra producto está formada por todos los subconjuntos del espacio producto cuyas secciones cruzadas pertenecen a las σ -álgebras factores.
 - La σ -álgebra generada por un álgebra $\mathcal{A}$ es la menor clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$.
- i) Sean m la medida de Lebesgue y λ la medida cardinal en $[0, 1]$. Entonces, $(m \times \lambda)(\{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\})$:
- Vale 0.
 - Vale 1.
 - Vale ∞ .
 - No está definida.
- j) Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x = y \\ -2 + 2^{-y}, & x = y + 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Cuál de los siguientes resultados es correcto?

- i. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$ iii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 2.$
 ii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 2, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$ iv. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 2, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 2.$

2. **[1.5 puntos]** Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y supongamos que los exponentes p, q satisfacen $1 \leq p < q \leq \infty$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre μ para que se tenga $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ ó $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$. Proporcionar también un ejemplo de una medida μ tal que $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$ no guarden ninguna relación de inclusión cuando $p \neq q$. Justificar la respuesta.

3. **[1.5 puntos]**

- a) Enunciar las desigualdades de Hölder y de Cauchy-Schwarz.
 b) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que $\mu(X) = 1$ y que f, g son funciones medibles no negativas sobre X tales que $fg \geq 1$. Probar que

$$\int f d\mu \int g d\mu \geq 1.$$

4. **[1.5 puntos]**

- a) Enunciar el primer teorema de Tonelli-Hobson.
 b) Sean $a > 0, f \in L^1(0, a), f \geq 0$, y

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x > 0).$$

Demostrar la igualdad

$$\int_0^a f(x) \ln \frac{1}{x} dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x} dx + F(a) \ln \frac{1}{a}.$$

5. **[1.5 puntos]** Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

definida en $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

- a) Enunciar el teorema de Fubini.
 b) Comprobar que

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-(x+y)}{y(x^2+y^2)^{1/2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x+y}{x(x^2+y^2)^{1/2}} \right).$$

- c) ¿Es cierto que $f \in L^1(D, m \times m)$?

6. **[3 puntos]** Sea m la medida de Lebesgue sobre la σ -álgebra de Borel $\mathcal{S}$ en $X = [0, 1]$.

- a) Fijado $a \in X$, sea $\delta_a(E) = \chi_E(a)$ ($E \in \mathcal{S}$). Demostrar que δ_a es una medida sobre $\mathcal{S}$, que no es absolutamente continua con respecto a m .
 b) Se define la función de conjunto ν sobre $\mathcal{S}$ por

$$\nu(E) = \int_E x^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{1/n}(E) \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Justificar que ν es una medida, y que tanto m como ν son σ -finitas.

- c) Enunciar el teorema de descomposición de Lebesgue.
 d) Hallar la descomposición de Lebesgue de ν relativa a m , identificando la derivada de Radon-Nikodým de la parte absolutamente continua respecto de m y el soporte de la parte singular con m .