

Tema 1: Medibilidad y medida
Tema 2: La integral de Lebesgue
Solucionario de la Autoevaluación 4

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Pregunta [1](#)
2. Pregunta [2](#)
3. Pregunta [3](#)
4. Pregunta [4](#)
5. Pregunta [5](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) ¿Cuál de los siguientes asertos sobre la medida exterior de Lebesgue es falso?
- Es invariante por traslaciones.
 - Aplicada a un intervalo, devuelve su longitud.
 - Está definida para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
 - Es contablemente aditiva.
- b) Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $m^*(A) = 2$. Se considera el conjunto $2A = \{2x : x \in A\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- $m(2A) = 4$.
 - $m^*(2A) = 4$.
 - $m^*(2A) = 2$.
 - $m^*(2A) = 1$.
- c) Si $m^*(A) = 0$, ¿cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- A es medible.
 - $m^*(A \cup B) < m^*(B)$ para cualquier $B \subset \mathbb{R}$.
 - A es contable.
 - $A = \emptyset$.
- d) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la σ -álgebra de Borel es falsa?
- Contiene a la clase $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$.
 - Contiene a la clase $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$.
 - Contiene estrictamente a la σ -álgebra de Lebesgue.
 - Es la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos.
- e) ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- La medida de Lebesgue no es completa.
 - Si E es medible y acotado, entonces $m(E) < \infty$.
 - Si $m(E) < \infty$, entonces E es medible y acotado.
 - La medida de Lebesgue del conjunto de Vitali es nula.
- f) ¿Cuál de los siguientes asertos es falso?
- Si f es continua y g es medible, entonces $f \circ g$ es medible.
 - Si f y g son medibles Borel, entonces $f \circ g$ es medible Borel.
 - Si f y g son medibles, entonces $f \circ g$ es medible.
 - Si f es medible Borel y g es medible, entonces $f \circ g$ es medible.
- g) ¿Cuál de los siguientes enunciados no implica que la función f sea medible?
- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible.
 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.
 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.
 - f es continua.
- h) Los siguientes asertos se refieren a una función f definida sobre un espacio de medida abstracto. ¿Cuál de ellos es falso?
- Si $|f|$ no es medible, entonces f no es medible.
 - Si f no es medible, entonces f^+ ó f^- no son medibles.
 - Si $|f|$ es medible, entonces f es medible.
 - Si f no es integrable, entonces f^+ ó f^- no son integrables.
- i) Sea C el conjunto de Cantor habitual. La integral de χ_C sobre $[0, 1]$:
- No existe, porque C no es medible.
 - Vale ∞ , porque C es incontable.
 - Vale 1, porque C es denso.
 - Vale 0, porque $m(C) = 0$.
- j) Los siguientes enunciados se refieren a funciones acotadas f definidas en intervalos acotados. ¿Cuál de ellos es cierto?
- Si f es integrable Lebesgue, entonces es integrable Riemann y ambas integrales coinciden.
 - Si f es integrable Riemann, entonces es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden.
 - Si f es integrable Lebesgue, entonces su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.
 - Si f es discontinua en un conjunto de medida nula, entonces no es integrable Riemann.

Resolución.

- | | | | | |
|--------|---------|---------|---------|---|
| a) iv. | c) i. | e) ii. | g) i. | i) iv. |
| b) ii. | d) iii. | f) iii. | h) iii. | j) ii. □ |

2. [3 puntos]

- a) Probar que dado cualquier conjunto A , existe un conjunto medible E que contiene a A , tal que $m^*(A) = m(E)$.
- b) Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Supongamos que $\int_A f d\mu = 0$ para todo $A \in \mathcal{S}$. Demostrar que $f = 0$ c.t.p..

Resolución.

- a) Si $m^*(A) = \infty$, tomamos $E = \mathbb{R}$. Si $m^*(A) < \infty$, teniendo en cuenta que la medida exterior de A es el ínfimo de las medidas de los abiertos que lo contienen, para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos un abierto $O_n \supset A$ tal que $m(O_n) < m^*(A) + 1/n$. El conjunto G_δ dado por $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ tiene las propiedades requeridas: $A \subset E$ implica, por monotonía, $m^*(A) \leq m(E)$, mientras que

$$m(E) \leq m(O_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

prueba que $m(E) \leq m^*(A)$ y, con ello, que $m(E) = m^*(A)$.

- b) Se tiene que

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \{x : |f(x)| \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \{x : |f(x)| > 1/n\} = \{x : f(x) > 1/n\} \cup \{x : f(x) < -1/n\} = E_n^+ \cup E_n^-,$$

y los conjuntos $E_n^\pm$ son medibles. Ahora bien,

$$\frac{1}{n} \mu(E_n^+) \leq \int_{E_n^+} f d\mu = 0$$

implica $\mu(E_n^+) = 0$, y similarmente

$$0 = \int_{E_n^-} f d\mu \leq -\frac{1}{n} \mu(E_n^-)$$

implica $\mu(E_n^-) = 0$. Se concluye que $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$, como se pretendía. $\square$

3. [1.5 puntos] Sea $E \in \mathcal{M}$ un conjunto acotado. Probar que existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $A \subset E$ y $m(A) = m(E)/\pi$. [Sugerencia: Aplicar el teorema de los valores intermedios, en un intervalo adecuado, a la función continua $\alpha \mapsto m(E \cap (-\alpha, \alpha))$.]

Resolución. Como E es acotado, existe $\beta > 0$ tal que $E \subset (-\beta, \beta)$. Definimos $f : [0, \beta] \rightarrow [0, m(E)]$ por $f(\alpha) = m(E \cap (-\alpha, \alpha))$ ($0 \leq \alpha \leq \beta$). Esta función es creciente, con $f(0) = 0$ y $f(\beta) = m(E)$. Además, f es continua en $[0, \beta]$. En efecto, fijados $\alpha \in (0, \beta)$ y $h > 0$, la subaditividad de m permite escribir

$$m(E \cap (-\alpha - h, \alpha + h)) \leq m(E \cap (-\alpha - h, -\alpha)) + m(E \cap (-\alpha, \alpha)) + m(E \cap (\alpha, \alpha + h)),$$

de donde, puesto que f es creciente,

$$\begin{aligned} |f(\alpha + h) - f(\alpha)| &= f(\alpha + h) - f(\alpha) \\ &\leq m(E \cap (-\alpha - h, -\alpha)) + m(E \cap (\alpha, \alpha + h)) \\ &\leq |(-\alpha - h, -\alpha)| + |(\alpha, \alpha + h)| \\ &= 2h \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$|f(\alpha) - f(\alpha - h)| \leq 2h \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

Si $\alpha = 0$ ó $\alpha = \beta$, analizamos la continuidad de f por la derecha y por la izquierda de estos puntos, respectivamente: para $h > 0$,

$$\begin{aligned} |f(0 + h) - f(0)| &= f(h) - f(0) = m(E \cap (-h, h)) \leq |(-h, h)| = 2h \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0, \\ |f(\beta) - f(\beta - h)| &= f(\beta) - f(\beta - h) = m(E \cap (-\beta, -\beta + h)) + m(E \cap (\beta - h, \beta)) \end{aligned}$$

$$\leq |(-\beta, -\beta + h)| + |(\beta - h, \beta)| = 2h \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

El teorema de los valores intermedios asegura que f toma todos los valores del intervalo $(0, m(E))$; en particular, existe $\gamma \in (0, \beta)$ tal que $f(\gamma) = m(E)/\pi$. El conjunto buscado es $A = E \cap (-\gamma, \gamma)$. $\square$

4. [1.5 puntos]

- a) Enunciar el teorema de integración de series funcionales con términos a valores reales.
 b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$f_n(x) = (-x)^n \quad (0 < x < 1).$$

Comprobar que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n dx$$

y que, sin embargo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_n| dx = \infty.$$

Explicar por qué b) no contradice a).

Resolución.

- a) Teorema 2.14 del Tema 2. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables, tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge c.t.p., su suma f es integrable, y

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

- b) Se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x} \quad (0 < x < 1).$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2,$$

efectivamente se cumple que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n dx.$$

Por otra parte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_n| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

No se contradice el teorema en cuestión porque la condición que este proporciona es suficiente, pero no necesaria. $\square$

5. [3 puntos] Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $f_n(x) = n\chi_{(0, n^{-1})}(x)$ ($x \in (0, 1]$).

a) Verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) dx.$$

b) Sea $h(x) = \lfloor x^{-1} \rfloor$ ($x \in (0, 1]$). Comprobar que $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = h$.

c) Enunciar el teorema de Beppo Levi.

d) Demostrar que $h \notin L^1(0, 1)$.

e) Enunciar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

f) Explicar por qué a) no contradice e).

Resolución.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_n dx = n \left| \left(0, \frac{1}{n} \right) \right| = n \frac{1}{n} = 1,$$

así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 1.$$

Sin embargo, fijado $x \in (0, 1]$, la propiedad arquimediana de los naturales proporciona $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq x^{-1}$, o bien $x \geq N^{-1}$. Entonces, para todo $n \geq N$, se cumple que $x \geq N^{-1} \geq n^{-1}$, de modo que $f_n(x) = \chi_{(0, n^{-1})}(x) = 0$. Esto significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ y, por consiguiente,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) dx = 0.$$

b) Notemos que $f_n(x) = n \leq x^{-1}$ ($0 < x \leq n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$), así que $h(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \lfloor x^{-1} \rfloor$ ($0 < x \leq 1$).

c) Teorema 2.7 del Tema 2 (Beppo Levi). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

d) Para ver que h no es integrable en $(0, 1]$, escribimos

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{((n+1)^{-1}, n^{-1}]}$$

e integramos miembro a miembro, aplicando c):

$$\int_0^1 h dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

e) Teorema 2.13 del Tema 2 (convergencia dominada). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), donde g es una función integrable, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ c.t.p.. Entonces, f es integrable,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu, \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

- $f)$ No se contradice el teorema de la convergencia dominada porque no existe ninguna función integrable g que domine a la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Cualquier función que domine a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ también mayorará a h y, por lo tanto, no será integrable. $\square$