

Tema 3: Espacios L^p
Tema 4: Medidas signadas
Tema 5: Integración en espacios producto
Solucionario de la Autoevaluación 4

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. [Pregunta 1](#)
2. [Pregunta 2](#)
3. [Pregunta 3](#)
4. [Pregunta 4](#)
5. [Pregunta 5](#)
6. [Pregunta 6](#)



1. [1 punto] En la misma hoja de enunciados, marcar la opción más apropiada. No es necesario justificar la respuesta.

- a) Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$). ¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?
- Si $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para algún q , $1 \leq q \leq \infty$, entonces existe $f \in L^q(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_q = 0$.
 - $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ admite una subsucesión convergente c.t.p..
 - Si $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para algún q , $1 \leq q \leq \infty$, entonces existe $f \in L^q(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_q = \|f\|_q$.
 - Todos los anteriores.
- b) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, donde p, q son exponentes conjugados en el rango $(1, \infty)$. Entonces $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- c) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f \in L^1(\mu)$, $g \in L^\infty(\mu)$. Entonces $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- d) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in L^p(\mu)$, con $p \in (1, \infty)$. Entonces $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- e) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in L^\infty(\mu)$. Entonces $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ si, y sólo si:
- f y g son proporcionales c.t.p..
 - $|f|^p$ y $|g|^q$ son proporcionales c.t.p..
 - $|g| = \|g\|_\infty$ c.t.p. en el conjunto donde $f \neq 0$.
 - Para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \cap \{x : f(x)g(x) \geq 0\}) > 0$.
- f) Sea ν una medida signada sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$, y sean $A, B \in \mathcal{S}$ tales que $X = A \cup B$. ¿Qué condiciones deben cumplir A y B para constituir una descomposición de Hahn de X respecto de ν ?
- $A \cap B \neq \emptyset$, A es ν -positivo y B es ν -negativo.
 - $A \triangle B$ es ν -nulo.
 - $A \cap B$ es ν -nulo.
 - $A \cap B = \emptyset$, A es ν -positivo y B es ν -negativo.
- g) Supongamos que μ y ν son medidas sobre X , y que $\nu(X) = 2$. Sea f la derivada de Radon-Nikodým de μ respecto de $\mu + \nu$. Entonces, $\nu(\{x : f(x) < 1\})$ vale:
- 2.
 - $3/2$.
 - $1/2$.
 - 1.
- h) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
- La σ -álgebra producto es la menor que contiene a los rectángulos medibles.
 - La medida producto es la única definida sobre una σ -álgebra producto que asigna a un rectángulo medible el producto de las medidas de los conjuntos factores.
 - La σ -álgebra producto está formada por todos los subconjuntos del espacio producto cuyas secciones cruzadas pertenecen a las σ -álgebras factores.
 - La σ -álgebra generada por un álgebra $\mathcal{A}$ es la menor clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$.
- i) Sean m la medida de Lebesgue y λ la medida cardinal en $[0, 1]$. Entonces, $(m \times \lambda)(\{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\})$:
- Vale 0.
 - Vale 1.
 - Vale ∞ .
 - No está definida.
- j) Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu$ la medida cardinal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x = y \\ -2 + 2^{-y}, & x = y + 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Cuál de los siguientes resultados es correcto?

- i. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$ iii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 0, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 2.$
 ii. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 2, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 0.$ iv. $\int d\mu(x) \int f(x,y) dv(y) = 2, \int dv(y) \int f(x,y) d\mu(x) = 2.$

Resolución.

- a) iv. c) iii. e) iv. g) i. i) iv.
 b) ii. d) i. f) iv. h) iii. j) ii. □

2. [1.5 puntos] Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y supongamos que los exponentes p, q satisfacen $1 \leq p < q \leq \infty$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre μ para que se tenga $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ ó $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$. Proporcionar también un ejemplo de una medida μ tal que $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$ no guarden ninguna relación de inclusión cuando $p \neq q$. Justificar la respuesta.

Resolución. La respuesta a esta pregunta viene dada por los resultados y ejemplos siguientes:

- a) Teorema 3.4 del Tema 3 (Villani, I). *Las siguientes condiciones sobre el espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ son equivalentes:*
- i. $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para ciertos $p, q \in [1, \infty]$ con $p < q$.
 - ii. $\inf_{E \in \mathcal{S}_0} \mu(E) > 0$, donde $\mathcal{S}_0$ denota la colección de todos los conjuntos $E \in \mathcal{S}$ de medida positiva.
 - iii. $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ para cualesquiera $p, q \in [1, \infty]$ con $p < q$.
- b) Teorema 3.5 del Tema 3 (Villani, II). *Las siguientes condiciones sobre el espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ son equivalentes:*
- i. $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ para ciertos $p, q \in [1, \infty)$ con $p < q$.
 - ii. $\sup_{E \in \mathcal{S}_\infty} \mu(E) < \infty$, donde $\mathcal{S}_\infty$ denota la colección de todos los conjuntos $E \in \mathcal{S}$ de medida finita.
 - iii. $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ para cualesquiera $p, q \in [1, \infty)$ con $p < q$.
- c) Teorema 3.6 del Tema 3. *Las siguientes condiciones sobre el espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ son equivalentes:*
- i. $L^p(\mu) \supset L^\infty(\mu)$ para algún $p \in [1, \infty)$.
 - ii. $\mu(X) < \infty$.
 - iii. $L^p(\mu) \supset L^\infty(\mu)$ para cualquier $p \in [1, \infty)$.
- d) Ejemplo 3.10 del Tema 3. Sea $f(x) = x^{-1}(1 + |\ln x|)^{-2}$.
- i. Se verifica que f es integrable en $(0, \infty)$.
 - ii. Si $1 \leq p < \infty$, entonces $g_p = f^{1/p} \in L^p(0, \infty) \setminus L^\infty(0, \infty)$.
 - iii. Si, además, $1 \leq q < \infty$ y $q \neq p$, entonces $g_p \notin L^q(0, \infty)$.

Por tanto, existen espacios de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ donde los correspondientes espacios $L^p(\mu)$ no guardan entre sí ninguna relación de inclusión. □

3. [1.5 puntos]

- a) Enunciar las desigualdades de Hölder y de Cauchy-Schwarz.
 b) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que $\mu(X) = 1$ y que f, g son funciones medibles no negativas sobre X tales que $fg \geq 1$. Probar que

$$\int f d\mu \int g d\mu \geq 1.$$

Resolución.

- a) Teoremas 2.20 y 2.24 del Tema 3 (desigualdad de Hölder para $1 < p, q < \infty$ y para $p = 1, q = \infty$, respectivamente). Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$, con $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Aquí,

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es el caso particular de la de Hölder correspondiente a $p = q = 2$.

- b) Puesto que $\sqrt{fg} \geq 1$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite escribir:

$$\int f d\mu \int g d\mu \geq \left\{ \int \sqrt{fg} d\mu \right\}^2 \geq \left\{ \int 1 d\mu \right\}^2 = \mu(X)^2 = 1. \quad \square$$

4. [1.5 puntos]

- a) Enunciar el primer teorema de Tonelli-Hobson.
b) Sean $a > 0, f \in L^1(0, a), f \geq 0$, y

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x > 0).$$

Demostrar la igualdad

$$\int_0^a f(x) \ln \frac{1}{x} dx = \int_0^a \frac{F(x)}{x} dx + F(a) \ln \frac{1}{a}.$$

Resolución.

- a) Teorema 2.5 del Tema 5 (Tonelli-Hobson, I). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Sea $f \geq 0$ una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible, y sean

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y).$$

Entonces, φ es $\mathcal{S}$ -medible, ψ es $\mathcal{T}$ -medible, y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

- b) Se cumple que

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{F(x)}{x} dx &= \int_0^a \frac{1}{x} dx \int_0^x f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \int_t^a \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^a (\ln a - \ln t) f(t) dt = \int_0^a f(x) \ln \frac{1}{x} dx - F(a) \ln \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

donde, en virtud del primer teorema de Tonelli-Hobson, el cambio en el orden de integración se justifica porque los integrandos son no negativos. $\square$

5. [1.5 puntos] Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

definida en $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

- a) Enunciar el teorema de Fubini.

b) Comprobar que

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-(x+y)}{y(x^2+y^2)^{1/2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x+y}{x(x^2+y^2)^{1/2}} \right).$$

c) ¿Es cierto que $f \in L^1(D, m \times m)$?

Resolución.

a) Teorema 2.8 del Tema 5 (Fubini). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ espacios de medida σ -finita. Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ para casi todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$, las funciones φ y ψ definidas por

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y)$$

están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$, respectivamente, y se cumple:

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

b) Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-(x+y)}{y(x^2+y^2)^{1/2}} \right) &= -\frac{1}{y} \frac{(x^2+y^2)^{1/2} - x(x+y)(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2} = -\frac{1}{y} \frac{x^2+y^2 - x(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{y} \frac{y^2 - xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y(x-y)}{y(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Para calcular la otra derivada, intercambiamos los papeles de x e y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x+y}{x(x^2+y^2)^{1/2}} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-(x+y)}{x(x^2+y^2)^{1/2}} \right) = -\frac{y-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

c) La respuesta es negativa: aplicando a), encontramos que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\ln 2 \neq \ln 2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx;$$

así pues, $f \notin L^1(D, m \times m)$.

□

6. [3 puntos] Sea m la medida de Lebesgue sobre la σ -álgebra de Borel $\mathcal{S}$ en $X = [0, 1]$.

a) Fijado $a \in X$, sea $\delta_a(E) = \chi_E(a)$ ($E \in \mathcal{S}$). Demostrar que δ_a es una medida sobre $\mathcal{S}$, que no es absolutamente continua con respecto a m .

b) Se define la función de conjunto ν sobre $\mathcal{S}$ por

$$\nu(E) = \int_E x^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{1/n}(E) \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Justificar que ν es una medida, y que tanto m como ν son σ -finitas.

c) Enunciar el teorema de descomposición de Lebesgue.

d) Hallar la descomposición de Lebesgue de ν relativa a m , identificando la derivada de Radon-Nikodým de la parte absolutamente continua respecto de m y el soporte de la parte singular con m .

Resolución.

- a) Fijemos $a \in X$. La medida δ_a se conoce como medida o delta de Dirac en a ; comprobamos directamente que es, en efecto, una medida. En primer lugar, resulta obvio que δ_a toma valores no negativos. Además,

$$\delta_a(\emptyset) = \chi_{\emptyset}(a) = 0.$$

Por último, si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de subconjuntos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos, se tiene:

$$\delta_a\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(E_i).$$

Luego, δ_a es, en efecto, una medida. Puesto que $\delta_a(\{a\}) = 1$ y $m(\{a\}) = 0$, encontramos que $\delta_a \not\ll m$.

- b) Observamos que $\nu = \varphi + \psi$, donde las funciones de conjunto φ y ψ se definen mediante

$$\varphi(E) = \int_E x^2 dx, \quad \psi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{1/n}(E) \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Para demostrar que ν es una medida sobre $\mathcal{S}$, bastará ver que φ y ψ lo son.

Que φ es una medida se infiere del Teorema 2.8 del Tema 2. Por otro lado, para cerciorarnos de que ψ es una medida sólo necesitamos probar que es contablemente aditiva, puesto que, obviamente, es no negativa y se anula en el vacío. A tal fin, sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos; sin más que atender al apartado a) y al hecho de que toda serie doble de términos no negativos se puede sumar en cualquier orden (lo que se demuestra, por ejemplo, aplicando el teorema de Tonelli al producto de medidas cardinales sobre $\mathbb{N}$) encontramos que

$$\begin{aligned} \psi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{1/n}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{1/n}(E_i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{1/n}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{1/n}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi(E_i), \end{aligned}$$

como se pretendía. Puesto que las medidas φ y ψ son finitas (consecuentemente, σ -finitas), lo mismo cabe afirmar de $\nu = \varphi + \psi$:

$$\nu([0, 1]) = \int_0^1 x^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{1/n}([0, 1]) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} < \infty.$$

- c) Teorema 4.10 del Tema 4 (descomposición de Lebesgue). Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, y ν una medida σ -finita sobre $\mathcal{S}$. Entonces $\nu = \nu_0 + \nu_1$, donde ν_0, ν_1 son medidas sobre $\mathcal{S}$ tales que $\nu_0 \perp \mu$ y $\nu_1 \ll \mu$. Esta es la llamada descomposición de Lebesgue de la medida ν con respecto a μ , y es única.
- d) Resulta evidente que $\varphi \ll m$, y que la derivada de Radon-Nikodým $d\varphi/dm$ (Teorema 3.5 del Tema 4) es $f(x) = x^2$ c.t.p. $[m]$. Por otra parte, denotando $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1/n\} \in \mathcal{S}$, también es claro que $m(A) = \psi(A^c) = 0$, de modo que $\psi \perp m$. El soporte de ψ es la clausura del conjunto donde ψ es positiva, es decir, $A \cup \{0\}$. Dado que ν y m son medidas σ -finitas sobre la misma σ -álgebra $\mathcal{S}$, podemos aplicarles el teorema de Lebesgue y, basándonos en la unicidad de la descomposición, concluir que φ es la parte absolutamente continua respecto de m mientras que ψ es la parte mutuamente singular con m , con la derivada de Radon-Nikodým y el soporte ya indicados. $\square$