Macroeconomía III (Grado en Economía)

Universidad de La Laguna

Tema 1. Los Modelos de tasa de ahorro exógenas. El modelo de Solow

Juan Acosta Ballesteros

Carlos Bethencourt Marrero

Gustavo A. Marrero Díaz

Fernando Perera Tallo

Departamento de Análisis Económico

Universidad de La Laguna

TEMA 1.

LOS MODELOS CON TASA DE AHORRO EXÓGENA: EL MODELO DE SOLOW

1. Introducción

En los modelos que se han analizado hasta ahora, la perspectiva empleada ha sido la del corto plazo, entendido como un período relativamente corto de tiempo en el cual las políticas de demanda pueden ejercer algún efecto sobre el empleo y la producción. No obstante, parece que uno de los objetivos deseables para cualquier economía se manifiesta en el largo plazo y se refiere a que muestre un perfil de crecimiento continuo y constante en los niveles de renta que le permita acceder a un mayor bienestar a su población. La existencia de condiciones que permitan el crecimiento económico puede generar diferencias importantes en los niveles de bienestar de distintas economías.

El tema se desarrolla en torno al modelo neoclásico de crecimiento planteado por Solow (1956) y por Swan (1956), que constituye el punto de arranque de la moderna teoría del crecimiento. El modelo de crecimiento neoclásico de Solow es consistente con ciertos hechos estilizados de la economía norteamericana en la década de los 60. Estos hechos, conocidos como los 'hechos estilizados de Kaldor', indican que la tasa de crecimiento de la producción per cápita, la tasa de crecimiento del capital per cápita, la tasa de ahorro, el tipo de interés real y la participación de los factores productivos en la renta nacional se mantuvieron aproximadamente constantes en este periodo. Además,

- La tasa de crecimiento de la producción per cápita fue aproximadamente el 1,6%.
- La tasa de crecimiento del capital per cápita fue positiva.
- La tasa de ahorro estuvo próxima a 0,2.

- La participación del factor trabajo se mantuvo en torno a 0,66 y la del capital en el 0,34.

En el apartado 2 se exponen los supuestos sobre la tecnología y sobre la evolución del capital y la población que se utilizan en el modelo de Solow, pero que también son la base del resto de los modelos de crecimiento que estudiaremos en esta asignatura. En el apartado 3, se define el supuesto característico del modelo de Solow que es que la tasa de ahorro de la economía es constante y se explica el equilibrio del modelo de Solow y cuál es el proceso temporal que se sigue para llegar al mismo. También se considera el comportamiento del modelo cuando modifica la tasa de ahorro y se pone de manifiesto que el crecimiento de la producción per cápita se agota a causa de la existencia de rendimientos marginales decrecientes en la acumulación de capital. Además, se analiza la eficiencia dinámica del equilibrio estacionario.

En el apartado 4 se explica cómo obtener una medida cuantitativa de la duración de la transición de la economía hacia el estado estacionario y se presenta la hipótesis de convergencia.

En el apartado 5 se explica cómo los estudios empíricos hicieron patente que la acumulación de trabajo y capital no eran suficientes para explicar el crecimiento de la producción per cápita. Surgió así lo que se denominó el residuo de Solow, que sirvió para justificar los modelos de crecimiento técnico exógeno. Como se ha dicho, una característica fundamental del modelo neoclásico es que el crecimiento se agota debido a la existencia de rendimientos marginales decrecientes en el factor capital. En este sentido, el crecimiento a largo plazo se justifica por la existencia de shocks tecnológicos exógenos que incrementan en el tiempo la productividad de los factores productivos. En cualquier caso, el crecimiento a largo plazo se puede explicar mediante los modelos de crecimiento endógeno, que se analizarán en el tema 3.

Antes de comenzar, es importante aclarar algunos aspectos de la notación que se va a emplear:

- Las variables en niveles están expresadas en mayúsculas: I (inversión), C (consumo), Y (producción), L (trabajo), N (población), K (capital), etc.
- Las variables en minúsculas representan variables en per capita. Por ejemplo, $y=Y/L$ (producción per cápita); $k=K/L$ (capital per cápita), $c=C/L$ (consumo per cápita), etc.
- Se supone que las economías están siempre en pleno empleo, por ello la fuerza de trabajo coincide con la población, así $L=N$. Por ello, las variables que están medidas es términos per cápita equivalen a medidas por trabajador.
- En este tema, y en los sucesivos, será frecuente tener que considerar la variación respecto al tiempo, t, de diversas variables. Hay que indicar que la derivada respecto al tiempo de una variable cualquiera, X, se denota con la variable con un punto encima. Así:

$$\dot{X}(t) = \frac{\partial X(t)}{\partial t}$$

- La tasa de crecimiento de dicha variable X, que indica el crecimiento porcentual de esa variable en cada momento del tiempo, viene dada por:

$$v_X(t) = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$$

2. Características del proceso de crecimiento del *stock* de capital

2.1. La función de producción

La función de producción utiliza dos factores productivos: trabajo, representado por la población (o la población adulta) de la economía, y el capital, cuya acumulación proviene de la asignación de unidades del bien final a actividades productivas. Las variables representadas con letras mayúsculas se referirán a valores absolutos, mientras que cuando se utilicen minúsculas harán referencia a valores *per cápita*.

La función de producción tiene la forma y propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} & Y = F(L,K) \\ & \mathrm{F_L} > 0 \;\; ; \;\; \mathrm{F_K} > 0 \\ & \mathrm{F_{LL}} < 0 \;\; ; \;\; \mathrm{F_{KK}} < 0 \\ & \mathrm{F_{LK}} > 0 \;\; ; \;\; \mathrm{F_{KL}} > 0 \\ & \lim_{K\to\infty} \mathrm{F_K}(L,K) = \lim_{L\to\infty} \mathrm{F_L}(L,K) = 0 \\ & \lim_{K\to 0} \mathrm{F_K}(L,K) = \lim_{L\to 0} \mathrm{F_L}(L,K) = \infty \end{aligned} \qquad [1.1.]$$

Además, se añade la propiedad de que la función de producción presente rendimientos constantes a escala. Es decir, al incrementar la aplicación de factores productivos en una determinada proporción la producción se incrementa en la misma proporción. Formalmente, la función de producción debe ser homogénea de grado 1, es decir, que para cualquier $\lambda>0$ se verifica

$$\lambda Y = F(\lambda L, \lambda K) \qquad [1.2.]$$

Definiendo $\lambda=(1/L)$, $y=(Y/L)$, $k=(K/L)$, [1.2.] puede escribirse de las siguientes formas alternativas:

$$\frac{Y}{L} = F(1,\frac{K}{L}) = y = f(k) \qquad [1.3.]$$

Teniendo en cuenta que $Y = L\,F(1,\frac{K}{L}) = L\;f(k)$, se puede afirmar que

$$\begin{aligned} & F_K = f'(k) > 0 \;\; ; \;\; f''(k) < 0 \\ & \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0 \\ & \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty \end{aligned}$$

En la expresión anterior la producción *per cápita* aparece como función del capital *per cápita*. La productividad marginal de capital y del trabajo pueden expresarse en términos del capital *per cápita*[1] según

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial K} = F_K = LF_K(1,\frac{K}{L})\frac{1}{L} = f'(k) \\ & \frac{\partial F}{\partial L} = F_L = F(1,\frac{K}{L}) - LF_K(1,\frac{K}{L})\frac{K}{L^2} = f(k) - kf'(k) \end{aligned} \qquad [1.4.]$$

Para desarrollar el análisis posterior en ocasiones se adoptará la siguiente forma específica de la función de producción que cumple con las propiedades anteriores

---

[1] Se deja al lector demostrar que se puede efectuar la siguiente descomposición de la función de producción en función de las productividades marginales: $\mathrm{Y = F(L,K) = LF_L + KF_K}$

$$Y = AL^{1-\alpha}K^{\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad A > 0$$

que puede transformarse en términos *per cápita*

$$y = Ak^{\alpha} \tag{1.5.}$$

y cuyas productividades marginales son

$$F_K = A\alpha k^{(\alpha-1)}$$
$$F_L = A(1-\alpha)k^{\alpha} \tag{1.6.}$$

Además, la función de producción Cobb-Douglas es tan usada en estos modelos debido a que es la única consistente con el hecho estilizado de Kaldor según el cual la participación de los factores productivos es aproximadamente constante.

Bajo el supuesto de que las empresas actúan de forma competitiva, tenemos que se cumplen las condiciones habituales según las cuáles se igualan la remuneración real de los factores productivos a sus productividades marginales:

$$r = F_K$$
$$w = F_L$$

Por lo tanto, las condiciones de los hechos de Kaldor (la fracción de remuneración de cada factores sobre la producción real) vienen dadas por:

$$\frac{\mathrm{w}\cdot\mathrm{L}}{Y} = \frac{\mathrm{F}_L\cdot\mathrm{L}}{Y} = 1-\alpha \simeq 0.66$$
$$\frac{\mathrm{r}\cdot\mathrm{K}}{Y} = \frac{\mathrm{F}_K\cdot\mathrm{K}}{Y} = \alpha \simeq 0.34$$

lo que, además, otorga una interpretación y un valor aproximado del parámetro α en la función de producción.

2.2. Inversión y acumulación de capital

La inversión bruta constituye la parte de la producción que se destina a mantener y ampliar el *stock* de capital. Definiendo la tasa de depreciación del *stock* de capital como $0 < \delta < 1$, la inversión puede expresarse[2]

$$I = \delta K + \dot{K} \tag{1.7.}$$

siendo $\dot{K}$ la derivada respecto al tiempo del *stock* de capital, esto es la acumulación (o desacumulación) neta de capital.

Suponiendo que la población crece a una tasa constante *n* ($\mathrm{n} = \dot{\mathrm{L}}/\mathrm{L}$), si se define *k=(K/L)*, derivando esta última expresión respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{k} = \frac{1}{L}\dot{K} - \frac{K}{L^2}\dot{L}\text{, de donde, } \frac{\dot{K}}{N} = \dot{k} + kn$$

Si se dividen ambos miembros de [1.7.] por *L* y se define *i=(I/L)*, sustituyendo la expresión anterior podemos obtener la siguiente expresión en términos *per cápita*,

---

[2] Hay que indicar que realmente en esta expresión aparecen funciones que dependen del tiempo, por lo que $I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t)$.

$$i = (n+\delta)k + \dot{k} \qquad [1.8.]$$

Nótese que *(n+δ)k* refleja, de una forma especial, la depreciación del *stock* de capital *per cápita*. En efecto, el capital *per cápita* se deprecia no sólo por la propia depreciación física del *stock* de capital sino también, y de ahí lo de especial, por el mero incremento de la población puesto que, aún bajo el supuesto de que $\delta=0$, a más personas presentes en una economía el capital por persona se reduce. En este caso, cuando la población crece, para evitar esta caída del capital *per cápita*, hay que "reponer" el capital correspondiente a las nuevas personas que se incorporan [3].

Despejando desde la expresión [1.8], se obtiene:

$$\dot{k} = i - (n+\delta)k \qquad [1.9]$$

La expresión anterior indica que el capital per cápita crecerá (disminuirá) siempre que la inversión bruta per cápita supere a (sea menor que) la depreciación del capital per cápita. Cuando la inversión bruta per cápita iguale a la depreciación del capital per cápita entonces la inversión neta per cápita será nula y el stock de capital per cápita no variará.

3. La acumulación de capital con tasa de ahorro constante: el modelo de Solow

3.1. El equilibrio en el modelo de Solow

Es fácil apreciar que para poder conocer la evolución temporal del stock de capital per cápita basta con sustituir la inversión bruta per cápita (i) en la expresión [1.9]. Pues bien, con este fin, a continuación se emplearán los supuestos del modelo de Solow aplicado a una economía cerrada sin sector público.

Cuando se considera que la economías es cerrada y que no existe sector público, se sabe que la producción o renta nacional (Y) sólo se puede destinar a consumo (C) o a inversión bruta (I). Además, la renta de la economía sólo se puede dedicar a consumo o a ahorro (S). Por ello, el ahorro de la economía se destina necesariamente a inversión bruta. En términos formales:

$$\left.\begin{array}{r} Y = C + I \\ Y = C + S_{ED} \end{array}\right\} \quad I = S_{ED}$$

De esta forma, la cantidad de inversión que se realiza en la economía lo determina el ahorro de las economías domésticas. En el modelo de Solow-Swan se supone que una fracción constante (no cambia con el tiempo) de la producción o renta, denominada tasa de ahorro (s), se destina a ahorro. De esta forma:

$$I = sY \qquad 0 < s < 1$$

Dividiendo por N se puede obtener la inversión bruta per cápita:

$$\frac{I}{N} = s\frac{Y}{N} \quad \rightarrow \quad i = sy \quad \rightarrow \quad i = sf(k)$$

---

[3] Si se utiliza el tiempo en forma discreta, tenemos que el capital de un período a otro evoluciona según

$$k(t+\Delta) - k(t) = \Delta\{f[k(t)] - c(t) - (n+\delta)k(t)\}$$

donde Δ representa la longitud del período de tiempo y el resto son variable flujo instantáneas. Nótese que se puede pasar a tiempo continuo si se reescribe y se toman límites según

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{k(t+\Delta)-k(t)}{\Delta} = \dot{k}(t) = f[k(t)] - c(t) - (n+\delta)k(t)$$

De esta forma, la expresión [1.8] queda:

$$sf(k) = (n+\delta)k + \dot{k}$$

Por otra parte, la evolución del stock de capital per cápita en el tiempo [1.9] viene dada por:

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k \qquad [1.10]$$

La interpretación de la expresión anterior es la clave del comportamiento del modelo de Solow. Siempre que el ahorro per cápita que se genera sea mayor que la depreciación del capital per cápita, se acumulará capital. Si fuese menor, el capital per cápita se reduciría en el tiempo. Si el ahorro per cápita iguala a la depreciación del capital per cápita, la inversión neta sería justamente cero y, por tanto, el capital per cápita permanecería constante.

Caracterización del estado estacionario en el modelo de Solow

Llegado este punto, la pregunta que nos hacemos es la siguiente: bajo estas condiciones de la economía, ¿es posible que esta economía se mantenga creciendo a una tasa positiva y constante? Responder a esta pregunta (afirmativa o negativamente) es una de las grandes aportaciones de Solow. Usaremos la condición [1.10] y las propiedades de la función de producción neoclásica para hacerlo.

Partiendo de [1.10], dividimos ambos lados de la ecuación por *k*. Así, a la izquierda nos queda la tasa de crecimiento del capital. Si esta tasa de crecimiento es positiva y constante siempre, entonces también será la de la economía. Demostraremos por reducción al absurdo que esto no se puede dar. Partimos de que:

$$v_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)$$

Supongamos que efectivamente $v_k > 0$ para todo periodo de tiempo t. Esto implica que a medida que t crece, el capital tiende a infinito. Tomando límites en la expresión anterior cuando k (o t) tiende a infinito,

$$\lim_{t\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} v_k = s \lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} - (n+\delta)$$

Pero debido a los rendimiento decrecientes a escala de $f(k)$), el denominador de $f(k)/k$ crece más rápido que el numerador, por lo que su límite cuando k tiende a infinito es cero. Así,

$$\lim_{k\to\infty} v_k = -(n+\delta) < 0 \,.$$

Este resultado constituye un absurdo, ya que habíamos partido de la premisa de que la tasa de crecimiento era constante y positiva. Así, concluimos que, debido a los rendimientos decrecientes de la función de producción, la economía no puede mantener una senda de crecimiento estable y constante en el largo plazo. Llega un momento en que las nuevas unidades de capital que se añaden a la economía no incrementan la producción lo suficiente ni siquiera para reponer la depreciación existente. Así, no quedan recursos para seguir aumentando *k*, por lo que no se crece más y el crecimiento se agota. Hay que indicar que cuando hablamos de capital en estos modelos hacemos referencia al número de unidades de capital (máquinas) existentes. Aumentar *k* implica, por lo tanto, incrementar la cantidad de capital (máquinas) que ya existen, sin que ello implique que estas unidades de capital (máquinas) sean mejores o diferentes.

Demostrado lo anterior, se puede concluir que el estado estacionario (EE) o equilibrio a largo plazo en el modelo de Solow vendrá caracterizado por crecimiento cero de las variables per capita, o lo que es lo mismo, que $\lim_{t \to \infty} k(t) = k^*$

En el gráfico 1 se representa el equilibrio del modelo de Solow. La recta $(n+\delta)k$ representa la depreciación del capital per cápita, mientras que la curva $sf(k)$ proporciona la inversión bruta. La existencia de rendimientos decrecientes es la causa de que la curva sea cada vez más plana a medida que aumenta el stock de capital per cápita.

Para un stock de capital dado, la diferencia entre la curva y la recta es precisamente $sf(k) - (n+\delta)k$, es decir, la inversión neta per cápita. Por ello, en puntos a la izquierda de la intersección entre la curva y la recta (es decir, para valores del stock de capital per cápita menores de k^*) se verifica que $\dot{k} > 0$, mientras que a la derecha ocurre lo contrario.

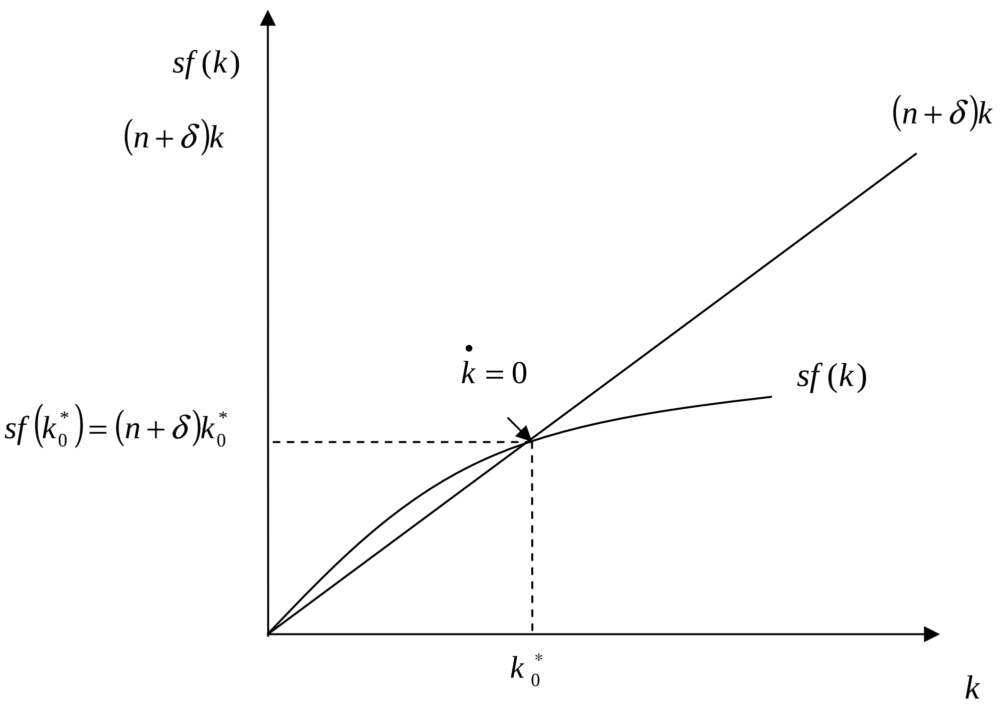

Gráfico 1. Equilibrio en el modelo de Solow

De este modo si, por ejemplo[4], el stock de capital per cápita fuese menor que k^*, la inversión neta superaría a la depreciación del capital per cápita. Es decir, como se invierte, más de lo que se necesita para mantener el stock de capital per-cápita, se iniciaría un proceso de crecimiento del stock de capital per cápita. Sin embargo, puesto que la función de producción neoclásica tiene rendimientos decrecientes, el producto marginal del capital es decreciente. Esto causa que a medida que el stock de capital per cápita va creciendo la inversión neta va disminuyendo. De este modo, los rendimientos decrecientes son el freno al crecimiento, ya que a medida que se acumula capital la producción per-cápita crece cada vez más despacio y con ello el ahorro se incrementa cada vez a un ritmo menor. Por ello, la brecha que separa a la curva y a la recta se va haciendo cada vez menor hasta que desaparece cuando

[4] El razonamiento inverso se haría para puntos a la derecha de k^*.

el stock de capital per cápita llega a ser k^* [5]. De ese modo, el equilibrio de este modelo conduce a que el stock de capital per capita sea constante.

Por ello, se puede establecer la condición de equilibrio del modelo de Solow, según la cual existirá equilibrio estacionario cuando no varíe el stock de capital per-cápita en el tiempo y, por tanto, tampoco se modifique la producción per-cápita. Esto es:

$$\dot{k} = 0 \quad \rightarrow \quad sf(k^*) = (n+\delta)k^*$$

La condición anterior indica que lo que se ahorra, y por lo tanto se invierte, es justo lo que se necesita para mantener el stock de capital per-cápita. Por ello, éste no crece en el tiempo.

El nivel de vida de las personas lo medimos habitualmente a través de la producción o renta per cápita. Por ello, es importante darse cuenta de que cuando el stock de capital permanece constante también lo hace la producción per cápita. Es fácil demostrarlo derivando respecto al tiempo la función de producción intensiva:

$$y = f(k) \quad \rightarrow \quad \dot{y} = f'(k)\dot{k}$$

Si $\dot{k} = 0$ se verifica que $\dot{y} = 0$. Así, en el equilibrio estacionario del modelo de Solow la renta per capita es constante.

En cualquier caso, es importante aclarar que, aunque el capital y la producción per cápita sean constantes en el tiempo, en el estado estacionario la producción y el stock de capital total están creciendo. Esto es así porque aunque la producción y el stock de capital por persona no varían sí lo hace la población. De hecho, puede calcularse que, en el estado estacionario, la producción y el stock de capital crecen a la misma tasa que la población (*n*):

$$y = \frac{Y}{L} \quad \rightarrow Y = yL \quad \rightarrow \quad \ln Y = \ln y + \ln L \rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{L}}{L} \rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = n$$

$$k = \frac{K}{L} \quad \rightarrow K = kL \quad \rightarrow \quad \ln K = \ln k + \ln L \rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{L}}{L} \rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = n$$

3.2. Alteraciones en las variables clave del modelo de Solow

Una pregunta relevante que podemos hacernos una vez que somos capaces de obtener el equilibrio en el modelo de Solow es cómo cambia cuando se producen alteraciones en las variables exógenas del modelo. En concreto, es importante saber qué ocurre cuando las familias deciden ahorrar más recursos y dedicarlos a inversión, es decir, cuando la tasa de ahorro aumenta.

Partiendo del estado estacionario representado en el gráfico 2, cuando se incrementa la tasa de ahorro, se desplaza hacia arriba la curva $sf(k)$. Esto implica instantáneamente un aumento del ahorro per cápita hasta $s_1 f(k_0)$, lo que da lugar a que parte de la producción que antes se consumía pase a ser destinada a incrementar el *stock* de capital. Puesto que la

---

[5] Formalmente, la estabilidad del equilibrio está garantizada si se verifican las condiciones de Inada, ya que en este caso se cumple que $\frac{d\dot{k}}{dk} = sf'(k^*) - (n+\delta) < 0$, lo que implica que, en las inmediaciones del estado estacionario, la función de inversión neta debe tener menor pendiente que la recta que define la depreciación del capital per cápita.

inversión bruta supera a la depreciación per cápita, el stock de capital per cápita empieza a crecer y con él la producción per cápita. Por ello, vuelve a aumentar la inversión bruta per cápita (movimiento a lo largo de la curva) y también la depreciación del capital per cápita (movimiento a lo largo de la recta). La existencia de rendimientos decrecientes en la acumulación de capital conduce a que la brecha que separa a la curva de la recta sea ahora menor, por lo que aunque el stock de capital per cápita volverá a crecer, lo hará ahora a una tasa menor. Este proceso dinámico de crecimiento continúa dando lugar a crecimientos cada vez menores del stock de capital hasta que, al cabo de cierto tiempo, lleva a conseguir el estado estacionario k_1^* y, como consecuencia, un nivel de renta *per cápita* superior al que se producía en el estado estacionario inicial.

En resumen, un aumento de la tasa de ahorro incrementa el nivel del *stock* de capital *per cápita* del estado estacionario, por lo que durante la transición la economía crece. Sin embargo, los rendimientos decrecientes en la acumulación de capital conducen a que el crecimiento se agote.

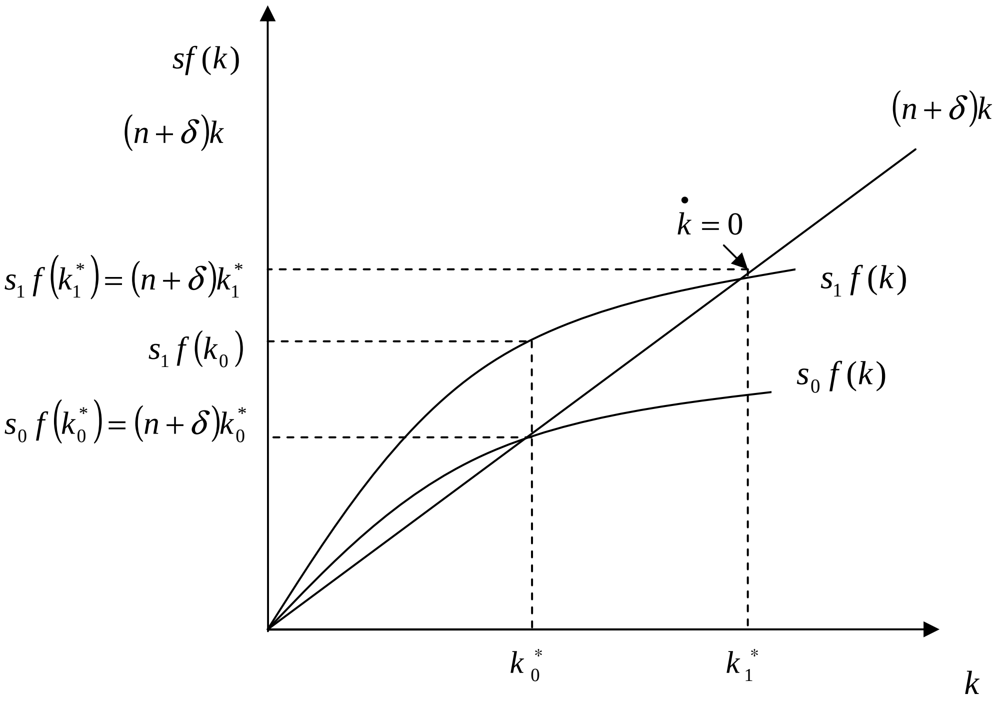

Gráfico 2. Aumento de la tasa de ahorro en el modelo de Solow

Razonamientos similares permiten explicar los efectos de alteraciones en el resto de variables exógenas del modelo.

3.3. La relación entre consumo y capital: la restricción de recursos de la economía y la regla de oro

El análisis hecho hasta ahora permite caracterizar el valor del capital per cápita en estado estacionario en el modelo neoclásico básico. Dado este nivel de capital, ¿cuál será el nivel de consumo que se alcanza a largo plazo en la economía? La relación entre consumo y capital en estado estacionario y alguna propiedad interesante de este equilibrio la obtenemos directamente de la restricción de recursos de la economía y es lo que discutiremos en esta subsección.

Pero antes de ir al detalle, demos la intuición de esta relación. Un razonamiento erróneo nos haría pensar que a más capital, más producción (dada por *f(k)*) y esto permitiría consumir más. Pero a nivel macroeconómico, no debemos olvidar la depreciación que sufre el capital. Para mantener mismos niveles de capital físico, una parte de los recursos ha de ser destinada a reponer este capital. Más aún, a medida que el capital crece, mientras que la producción crece cada vez más lentamente (la curva es cóncava), la depreciación crece linealmente (véase gráfico 1). Esto quiere decir que para niveles muy altos de capital, la productividad marginal del capital es muy pequeña, por lo que los aumentos de producción son inferiores a los recursos que hay que destinar a cubrir la depreciación. O sea, ¡en lugar de haber más recursos disponibles para consumir (o ahorrar), hay menos! Por ello, la relación entre consumo y capital no es monótona. En principio, debería ser creciente cuando la productividad del capital es alta (niveles de capital pequeños), superior a la depreciación, y decreciente cuando la productividad marginal es pequeña (niveles de capital altos).

Caractericemos a continuación la restricción de recursos de la economía, la cual establece la relación entre el capital existente, lo que este produce, los recursos que se destinan a depreciación, y los posibles usos de los recursos en consumo o en acumular más capital (inversión neta). Partimos de la siguiente condición que obtuvimos en las secciones anteriores, que define la acumulación de capital:

$$i = \dot{k} + (n+\delta)k \qquad [1.11.]$$

Además, en una economía cerrada sin sector público, la producción de destina a consumo o a inversión, por lo que la inversión es lo que queda de la producción después de detraer el consumo.

$$y = c + i \quad \rightarrow \quad i = y - c$$

Teniendo en cuenta que la producción per cápita viene dada por la función de producción *f(k)*:

$$i = f(k) - c \qquad [1.12]$$

Podemos combinar [1.11] y [1.12]

$$y - c = (n+\delta)k + \dot{k} \qquad [1.13]$$

de donde

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k \qquad [1.14]$$

La ecuación [1.14] constituye una relación importante en la medida en que refleja la disyuntiva que se produce entre consumo y crecimiento del capital. Dado un nivel de capital actual, si se quiere disponer de más capital en el futuro, es decir, destinar bienes a incrementar el *stock* de capital *per cápita*, será con un menor consumo actual.

Para dar otra interpretación a esta condición, la reescribimos de la siguiente manera:

$$f(k) - (n+\delta)k = c + \dot{k}$$

La parte izquierda representa los recursos disponibles en esta economía después de la depreciación; la parte izquierda denota los usos que se pueden dar de estos recursos: en consumo o en acumular más capital.

A partir de [1.14] se pueden examinar las condiciones bajo las cuales se mantiene indefinidamente en el tiempo un determinado nivel de capital adquirido, es decir, las condiciones bajo las cuales el *stock* de capital *per cápita* se mantiene en su estado estacionario. Haciendo $\dot{k} = 0$ en [1.14], se llega a

$$c = f(k) - (n+\delta)k \qquad [1.15]$$

Esta relación, que se representa en el **Gráfico 3,** permite establecer la relación entre consumo y capital que deja el *stock* de capital invariable en el tiempo (en estado estacionario). Es fácil establecer la forma de U-invertida en la relación entre *c* y *k* a partir de [1.15] (basta con calcular la primera y segunda derivada de esta función y los puntos de corte cuando *c=0*).

Volviendo a la explicación intuitiva que se proporcionaba al principio de este subapartado, la relación entre consumo y capital no es monótona. Inicialmente es creciente, ya que la productividad del capital supera a la tasas de depreciación del capital per cápita. Sin embargo, a medida que el stock de capital per cápita va aumentando el producto marginal del capital se va reduciendo hasta que queda por debajo de la depreciación del capital per cápita y la curva tiene pendiente negativa.

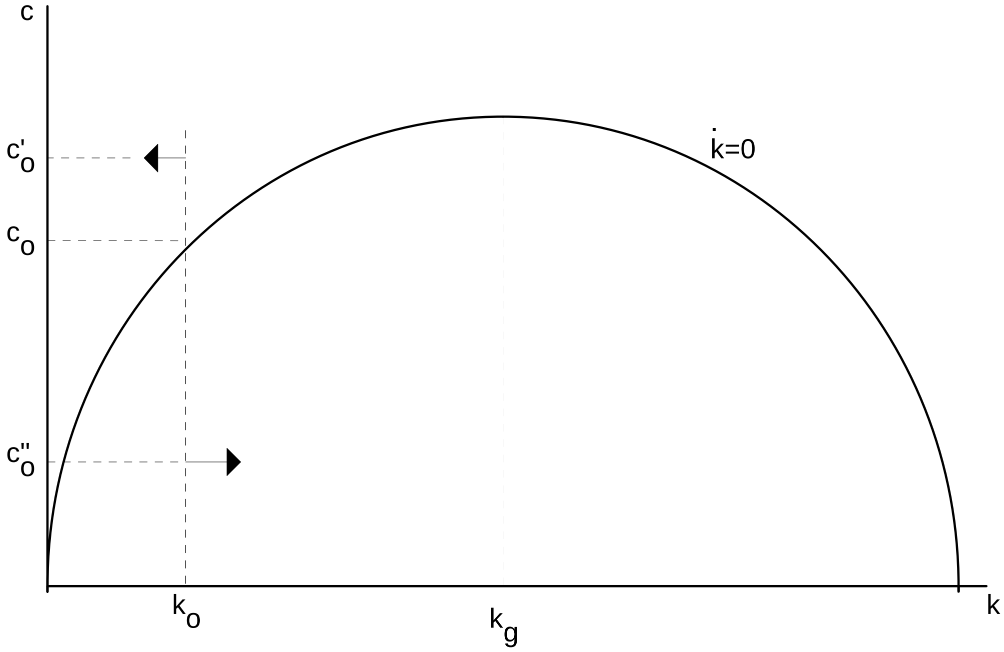

Gráfico 3: La restricción de recursos de la economía en el estado estacionario

Una vez que conocemos las combinaciones de consumo y capital per cápita que verifican que dejan el capital per cápita invariable, es importante conocer qué ocurre cuando le economía se sitúa por encima o por debajo. Para ello, tomemos un punto de la curva y veamos qué sucede si el consumo es menor o mayor. En efecto, dado un capital k_0, si se consume según [1.15].

$$c_0 = f(k_0) - (n+\delta)k_0$$

La inversión resultante es

$$i_0 = f(k_0) - c_0 = (n+\delta)k_0$$

Es decir, la inversión en estado estacionario es aquella que justamente repone la depreciación del capital *per cápita* y, en consecuencia, no permite incrementar su nivel.

Si para el mismo *stock* de capital, k_o**,** el nivel de consumo fuera $c'_o > c_o$ se estaría consumiendo parte de la cantidad de producción destinada a reponer la depreciación del capital *per cápita* y, ello haría que, en períodos futuros, el capital *per cápita* fuese menor,[6] es decir, $\dot{k} < 0$. Por el contrario, si el consumo se situara en un nivel $c''_o < c_o$, parte de la producción se estaría destinando, no sólo a mantener el *stock* de capital, sino también a incrementar el capital *per cápita* disponible. En este caso, $\dot{k} > 0$.

Por tanto, si se quiere incrementar el *stock* de capital *per cápita* correspondiente al estado estacionario, será necesario mantener durante algún tiempo un nivel de consumo inferior al del estado estacionario (hay que ahorrar) con el fin de poder acumular capital. Esta situación se corresponde con puntos situados en el interior de la curva representada en el **Gráfico 3**.

La regla de oro de la economía

Nótese que entre todos los posibles estados estacionarios que se pueden dar en la economía, existe uno que llama la atención por encima de los demás. Es el que hace que el consumo en estado estacionario sea máximo. En este punto de máximo, la primera derivada de [1.15] es igual a cero (nótese que la segunda derivada es negativa en este punto), esto es:

$$\frac{dc}{dk} = f'(k) - (n + \delta) = 0$$

Por tanto, existe un *stock* de capital, que denominaremos k_g que hace máximo (puesto que $f''(k)<0$) el nivel de consumo *per cápita* en estado estacionario y que se obtiene al despejar de

$$f'(k_g) = (n + \delta) \qquad [1.16]$$

Esta condición refleja el nivel de capital que hace que la productividad marginal del capital *per cápita* es igual a la tasa de depreciación del capital *per cápita*. Esto es lo que se conoce como la ***regla de oro*** de una economía. En este equilibrio se estaría maximizando el nivel de consumo per cápita en el largo plazo, aunque permanecer todo el tiempo en él no tendría que ser necesariamente óptimo desde el punto de vista de las preferencias de los agentes. Discutiremos este aspecto en el Tema 2 cuando los agentes decidan su consumo en base a un problema de elección intertemporal.

Para la función de producción Cobb-Douglas, el capital de la regla de oro es:

$$f(k) = Ak^{\alpha}$$

$$k_g = \left[\frac{A\alpha}{n + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Este capital marca el límite entre la parte creciente y decreciente de la curva $\dot{k} = 0$, pero también separa, como veremos a continuación, los equilibrios estacionarios eficientes de los ineficientes.

La eficiencia y la ineficiencia dinámica

Continuemos interpretando el significado de esta asignación en particular que es la regla de oro. Niveles de capital *per cápita* inferiores a k_g implican que la productividad marginal es superior a la tasa de depreciación del capital y, por tanto, si se incrementa en una unidad el *stock* de capital *per cápita*, se puede obtener un incremento del producto *per cápita* capaz de permitir a cada persona acceder a un mayor nivel de consumo y, al mismo tiempo, reponer la depreciación de la unidad adicional de capital. Dado que la productividad marginal

[6] Con niveles de consumo mayores puede darse la circunstancia de que no sólo se pueda consumir la parte de la producción que debiera destinarse a reponer el capital sino también parte del propio capital instalado.

del capital es decreciente, llegará un momento en el que al añadir una unidad adicional de capital, el incremento de la producción generado sólo permite reponer la depreciación de la unidad de capital incorporada. En este nivel, el *stock* de capital se corresponderá con k_g.

Si se siguen añadiendo nuevas unidades de capital, las posibilidades de consumo se reducen debido a que el incremento de la producción obtenido no permite reponer la depreciación de las nuevas unidades y, por lo tanto, se hace necesario disminuir el consumo de cada persona para atender dicha reposición. Por ello, si el *stock* de capital se sitúa por encima de k_g se considera que se ha acumulado excesivo capital y se habla de **ineficiencia dinámica**.

Así, estar situado sobre la U-invertida a la derecha de la regla de oro implica estar en una asignación que es dinámicamente ineficiente. Usamos el concepto de eficiencia paretiana para entender esta idea. Partiendo de una situación dinámicamente ineficiente, si se redujera el volumen de ahorro hoy (es decir, si la economía se situase durante algún tiempo por encima de la curva), la economía podría consumir más hoy pero **también** en el futuro. Es decir, las economías dinámicas ineficientes simplemente invierten en exceso (la productividad marginal de su inversión es muy pequeña, que ni siquiera compensa la depreciación que hay que pagar por el capital que existe) y consumen demasiado poco.

Por su parte, si estamos en niveles de capital inferiores a k_g (a la izquierda de la regla de oro) el consumo de equilibrio estacionario puede aumentarse simplemente ahorrando más. En este caso, se habla de **eficiencia dinámica** porque las economías se enfrentan a un dilema real entre las generaciones actuales, que pueden renunciar a parte de su consumo presente, y las generaciones futuras, que se beneficiarán del *stock* de capital generado de esa forma.

El modelo de Solow y la ineficiencia dinámica

Después del análisis realizado con la restricción de recursos, sabemos que los puntos sobre la curva U-invertida del gráfico 3 representan todos los posibles pares de *(c,k)* en estado estacionario de la economía y, además, que los puntos a la izquierda del capital per cápita de la regla de oro son dinámicamente eficientes mientras que los que quedan a la derecha son ineficientes.

¿Cuál se dará en la economía? Si utilizamos el modelo de Solow[7], el nivel de capital de estado estacionario $k*$ se puede representar como en el gráfico 1. En cualquier caso, sabemos que ese estado estacionario depende de los valores que tomen las variables exógenas del modelo. Como ya hemos considerado antes, la tasa de ahorro afecta al estado estacionario del modelo. Por ello, en el gráfico 4 hemos representado nuevamente el gráfico 2 junto con el 3. En este gráfico se muestran dos posibles estados estacionarios en base a dos tasas de ahorro (como ejemplo, se han elegido de forma que una de lugar a un estado estacionario eficiente y otro ineficiente).

[7] Es importante destacar que lo explicado hasta aquí sólo se ha sustentado en la restricción de recursos y, por tanto, también se podrá utilizar en el modelo del tema 2.

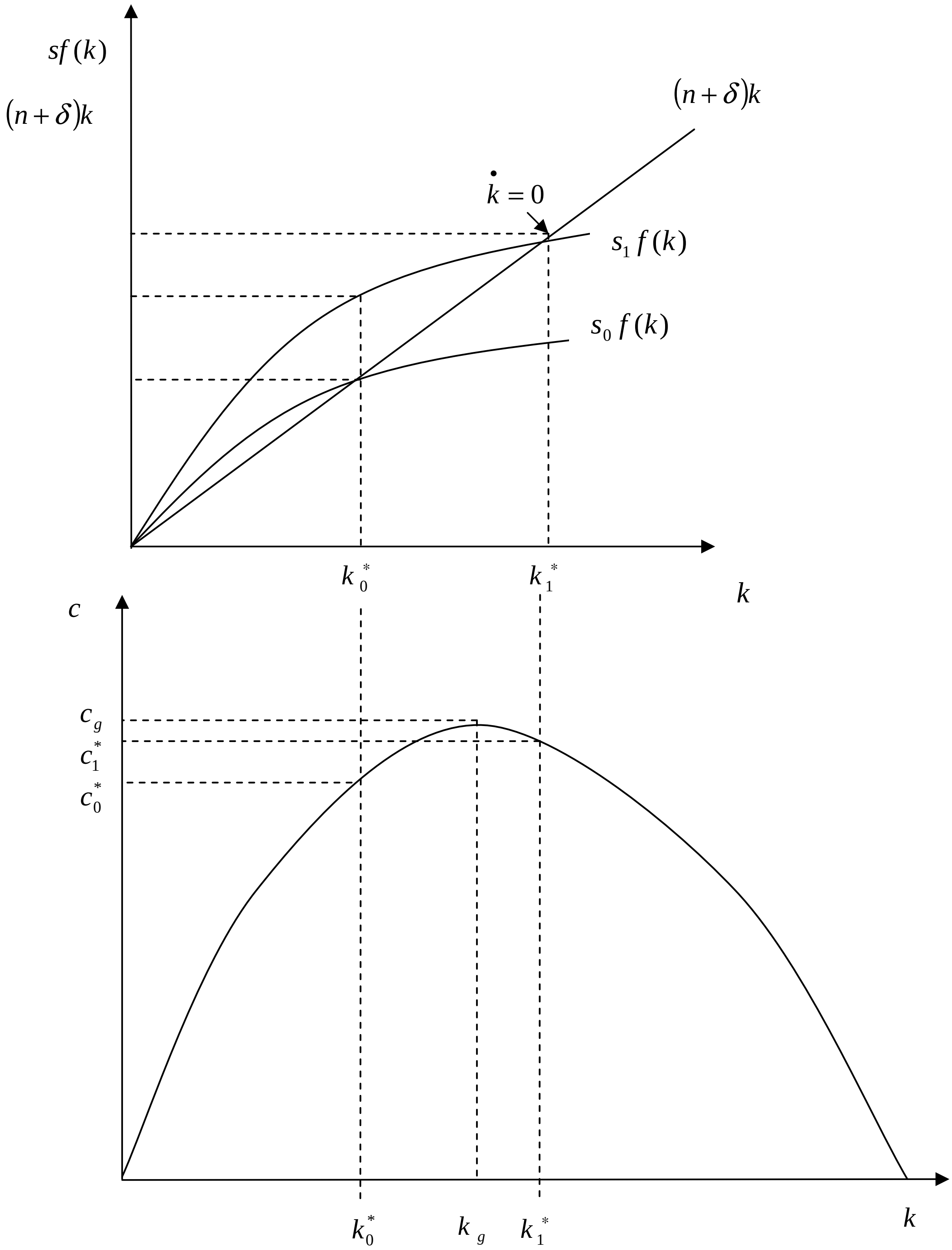

Gráfico 4: La eficiencia dinámica del estado estacionario en el modelo de Solow

Los resultados del gráfico 4 ilustran lo comentado anteriormente:

- Con una tasa de ahorro reducida, como s_0, el equilibrio se produce en la zona eficiente. En ese caso, si los agentes se sacrifican y aumentan un poco más la tasa de ahorro les puede permitir obtener niveles de consumo superiores.

- Con una tasa de ahorro suficientemente elevada, como s_1, el equilibrio es dinámicamente ineficiente. En este caso, los agentes pueden reducir su tasa de ahorro y aumentar su consumo hasta alcanzar c_g. En otras palabras, los agentes pueden consumir más hoy y aún así elevar su consumo fututo.

4. La velocidad de ajuste al estado estacionario y la hipótesis de convergencia

Además del estado estacionario de la economía, una cuestión muy relevante es la de entender la velocidad de ajuste hacia este equilibrio a largo plazo cuando no se está en él. Por ejemplo, si la velocidad de ajuste es muy lenta, políticas que afecten al estado estacionario tardarán mucho en hacer efecto en la economía, por lo que quizás habría que mirar más a políticas de corto plazo o para acelerar la velocidad de transición. Lo contrario ocurriría si la velocidad de transición es muy rápida. Pasamos en esta sección a analizar la velocidad de transición de la economía de Solow.

Se puede obtener una medida cuantitativa de la duración de la transición del proceso dinámico analizado en el apartado anterior. Para ello es preciso calcular y analizar el comportamiento en el tiempo de la velocidad de transición o velocidad de transición. Esta se define como la tasa de variación del capital per cápita, es decir, es la tasa a la que evoluciona la inversión neta en el tiempo:

$$v_k(k) = \frac{\dot{k}}{k}$$

La velocidad de transición se puede obtener a partir de [1.10]:

$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$ Para ello, se divide por el stock de capital y se obtiene que la velocidad de transición es la diferencia entre la tasa de inversión bruta y la tasa de depreciación del capital per cápita

$$v_k(k) = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta) \qquad [1.17]$$

Puesto que la velocidad de transición es otra forma de considerar la evolución del capital per cápita en el tiempo, refleja las mismas ideas que se consideraron en el apartado anterior. Así, si el stock de capital per cápita coincide con el de equilibrio se verifica que $v_k(k^*) = 0$. Si es diferente, entonces la velocidad de transición será positiva o negativa según que el stock de capital sea menor o mayor que $v_k(k^*) = 0$, respectivamente.

Para analizar con más detalle el comportamiento de la velocidad de transición utilizaremos, por simplicidad, la función de producción intensiva que procede de la tecnología Cobb- Douglas: $y = Ak^{\alpha}$.

En este caso la velocidad de transición es:

$$v_k(k) = \frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\alpha-1} - (n+\delta) \qquad [1.18]$$

La velocidad de transición [1.18] se representa en el **Gráfico 5**. Para cada nivel de capital, la velocidad de transición viene dada por la diferencia entre la curva, que representa la tasa de inversión bruta, y la recta, que refleja la tasa de depreciación del capital per cápita.

Para un nivel de capital $\boldsymbol{k_o}$, la velocidad de transición es positiva y, por tanto, indica que el capital *per cápita* debe crecer puesto que la inversión neta es positiva. A medida que crece el capital *per cápita*, la velocidad de transición es menor hasta que se anula al llegar al nivel del capital estacionario.

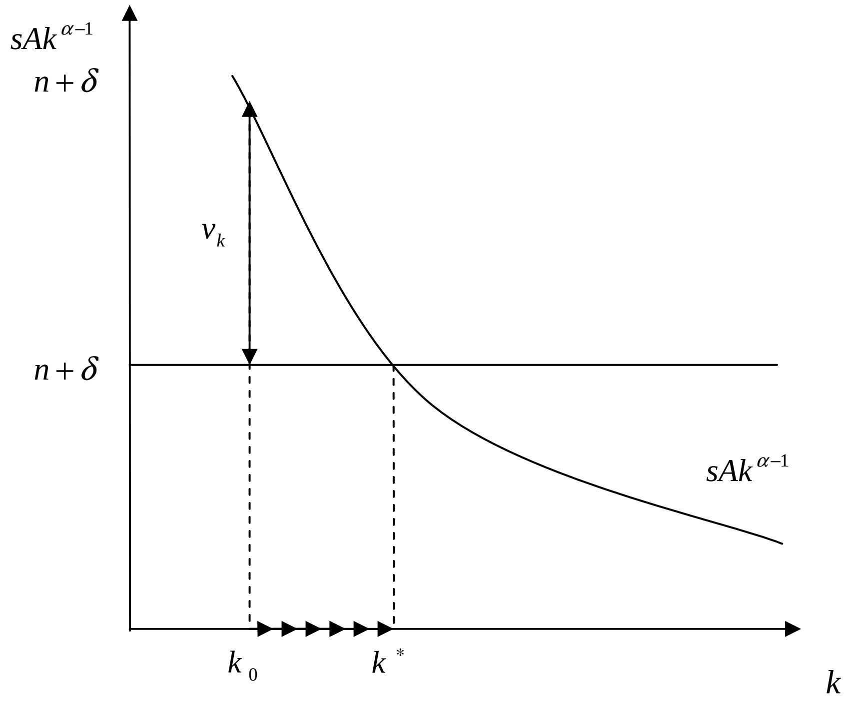

Gráfico 5: Dinámica de transición

Para extraer conclusiones con facilidad se puede realizar una aproximación lineal de la velocidad de transición, en torno al estado estacionario[8]

$$v_k(k) = \frac{\dot{k}}{k} = \left[sA(k^*)^{\alpha-1} - (n+\delta)\right] + (\alpha-1)sA(k^*)^{\alpha-2}\left(k-k^*\right) \qquad [1.19.]$$

Teniendo en cuenta que la expresión entre corchetes es cero (ya que la velocidad de transición en el estado estacionario es cero):

$$v_k(k) = \frac{\dot{k}}{k} = -(1-\alpha)sA(k^*)^{\alpha-1}\left[\frac{k-k^*}{k^*}\right]$$

Además, como la condición de equilibrio del modelo de Solow es $sA(k^*)^{\alpha-1} = (n+\delta)$, la velocidad de convergencia se puede expresar:

$$v_k(k) = \frac{\dot{k}}{k} = -(1-\alpha)(n+\delta)\left[\frac{k-k^*}{k^*}\right] \qquad [1.20]$$

Se aprecia claramente que la tasa de crecimiento del capital está inversamente relacionada con la diferencia porcentual (*gap*) entre al capital actual y el correspondiente al estado estacionario. La velocidad de convergencia viene dada por $(1-\alpha)(n+\delta)$.

Para proporcionar una medida cuantitativa de esta velocidad de convergencia, se utiliza que la tasa de crecimiento de la población de los países industrializados oscila entre 0,01 y 0,02.[9] La tasa de depreciación se mueve, por su parte, entre 0,05 y 0,10, según como se mida el capital para usos residenciales y otros tipos de bienes duraderos. La participación del

[8] En términos genéricos, la aproximación lineal es $v_k(k) = v_k(k^*) + v'_k(k^*)(k-k^*)$

[9] Sala i Martín (2000) pág. 44-45

capital físico (α) en los países industrializados está situada entre 0,25 y 0,30. En consecuencia la velocidad de convergencia que predice el modelo se sitúa entre 0,042 y 0,09. Es decir, cada año se cubre entre el 4,2% y el 9% de la diferencia existente entre k y k*. Esta velocidad de convergencia implica que la mitad de la distancia existente entre k y k* desaparece en un período de 7,7 y 16 años respectivamente. La velocidad de convergencia hacia el estado estacionario es, por lo tanto, bastante grande, por lo que la transición tiene lugar en un breve espacio de tiempo.[10]

El **Gráfico 6** indica que la tasa de crecimiento del capital de una economía que parte de un capital inferior al del estado estacionario es elevada, aunque decreciente. Este hecho significa que si las economías se diferenciasen únicamente en la relación inicial entre capital y trabajo, en el mundo real, se debería observar un crecimiento superior en economías pobres que en las ricas (en el Gráfico 6, las diferentes economías se representan por diferentes valores de k_0, aunque se supone que todas ellas poseen el mismo volumen de capital en el estado estacionario).

Puede obtenerse que la velocidad de transición o de convergencia de la producción per cápita es:

$$v_y(y) = \frac{\dot{y}}{y} = -(1-\alpha)(n+\delta)\left[\frac{y-y^*}{y^*}\right] \qquad [1.21]$$

Es decir, el crecimiento de la renta *per cápita* mantiene una relación inversa con la renta inicial. Esta relación inversa entre la renta inicial y su tasa de crecimiento es conocida como la ***hipótesis de convergencia***.

Hay que subrayar que el modelo que se acaba de esbozar sólo predice la existencia de una relación negativa entre la renta y las tasas de crecimiento en el caso de que la única diferencia entre los países resida en sus *stocks* iniciales de capital, y compartan estados estacionarios (equilibrios a largo plazo) similares. Si esto sucede así, la convergencia se le denomina ***convergencia absoluta***. Pero en muchas ocasiones los países o las regiones no comparten los mismos estados estacionarios o, dicho de otra manera, las mismas características tecnológicas y preferencias (que son las que determinan en última instancia los estados estacionarios).

---

[10] Las estimaciones de la velocidad de convergencia ofrecen resultados más reducidos que implican un proceso más lento.

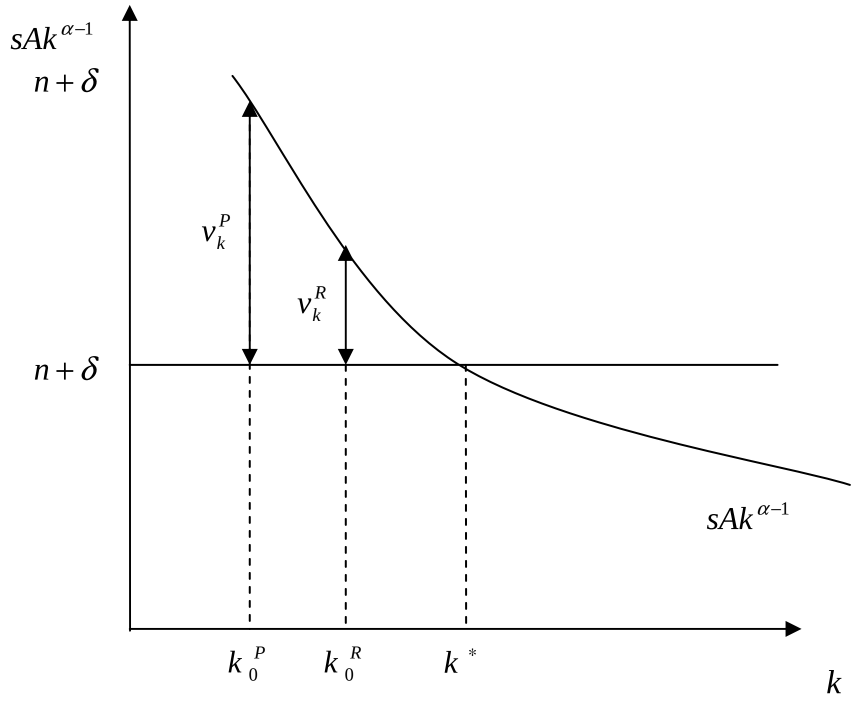

Gráfico 6: Distintas velocidades de convergencia para diferentes valores de k_0

Por ejemplo, supongamos que las economías se diferencian en su nivel de tecnología, *A*, o en su tasa de ahorro, *s*, o en la tasa de depreciación, δ, o en la tasa de crecimiento de la población, *n*. En esta situación, el modelo no tiene por qué predecir mayor crecimiento para los países pobres (que parten con un k_0 más pequeño). Esta idea se ilustra en el **Gráfico 7,** en donde se representan dos economías (designadas por **P** el país pobre, y **R** el país rico) que poseen un *stock* de capital k_0^P y k_0^R, respectivamente (siendo $k_0^P < k_0^R$). Suponiendo, además, que la tasa de ahorro en el país pobre es inferior a la del país rico, converge a un estado estacionario inferior, $k_P^* < k_R^*$. En este ejemplo, sucede que el país pobre crece menos que el país rico, por lo que no se produce convergencia en sentido absoluto.

Sin embargo, a pesar de esto, aún es posible hablar de ***convergencia condicional***, en el sentido de que la tasa de crecimiento de un país está inversamente relacionada con la distancia a la que se sitúa de su propio estado estacionario. En otras palabras, si un país es pobre en la actualidad pero se espera que siga siendo pobre en el largo plazo, entonces su tasa de crecimiento no será muy grande. Dicho de otro modo, el modelo predice convergencia únicamente después de tener en cuenta los elementos determinantes del estado estacionario.

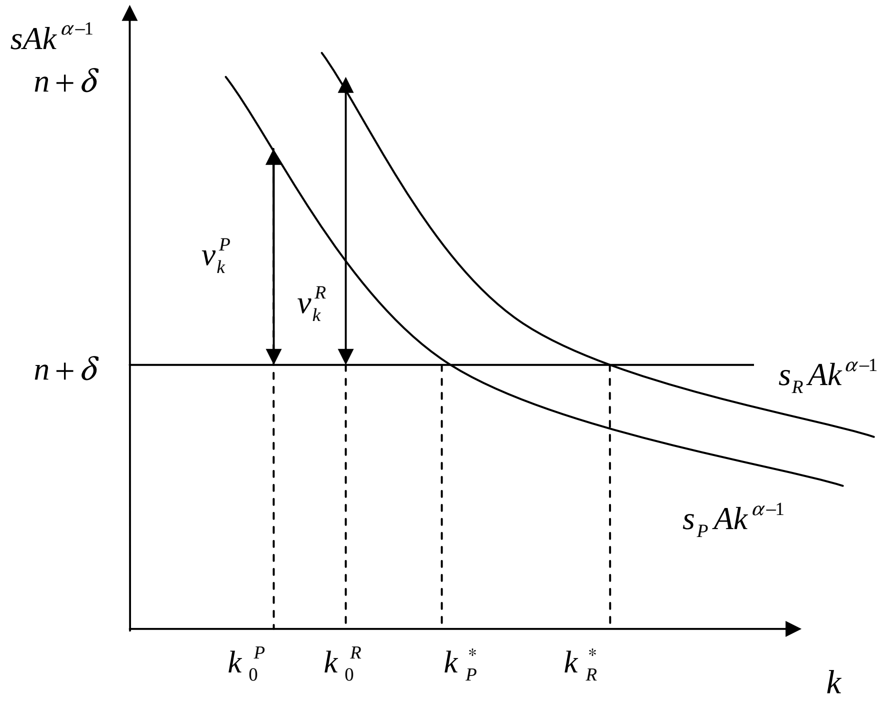

Gráfico 7. Velocidad de convergencia para economías con distintos estados estacionarios

En base a la ecuación [1.17], se han especificado muchos modelos econométricos con el objetivo de medir y contrastar la hipótesis de convergencia absoluta y/o condicionada y para caracterizar las fuerzas del crecimiento de un conjunto concreto de economías (países o regiones). Notar la analogía de la ecuación [1.17] con el siguiente modelo econométrico:

$g(y_i) = \alpha + \beta y_{i0} + \lambda' X_{i0} + \varepsilon_i$

$g(y_i)$: Tasa de crecimiento de i-ésima economia (PIB real per capita) entre t0 y t

y_{i0}: valor del PIB real pc al comienzo del periodo (en t0)

$i = 1, 2, ..., I$, cada i asociado a un país o región concreta

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

X_{i0}: Conjunto de variables relacionadas con estado estacionario de unidad i-ésima

α: Término constante (podría ser variable según la economía)

$\beta = -(1-\alpha)(n+\delta)$

Al comparar este modelo econométrico con la ecuación [1.17] es fácil relacionar el β de la ecuación con el término de convergencia de [1.17], de tal modo que:

$\beta = -(1-\alpha)(n+\delta)$

Por esto, estos análisis empíricos se les conocen como de β-convergencia. Así, estimando este modelo econométrico, el β estimado tendría que ser negativo y significativamente distinto de cero para poder concluir que existe evidencia de convergencia entre las economías consideradas, en el periodo de tiempo considerado. Si no consideramos el vector de variables X en esta regresión y el términos constante es igual para todos, es como si estuviéramos imponiendo el mismo estado estacionario para todas las economías, así que estaríamos contrastando la convergencia absoluta. Por el contrario, si incluimos un vector de variables en X relacionadas con los estados estacionarios, lo que estaríamos es contrastando la hipótesis de convergencia condicional. En cualquier caso se contrasta que el β sea negativo.

La manera gráfica habitual para analizar la existencia o no de β-convergencia absoluta para un conjunto de economías y periodo de tiempo es la de representar una nube de puntos en la que en el eje de las 'y' está el crecimiento del PIB (real y ajustado por PPA) por habitante en el periodo a analizar, mientras que en el eje de las 'x' estaría el nivel del periodo inicial de este PIB. Si la nube de puntos ofrece una relación inversa (negativa) y significativa existirá evidencia de convergencia absoluta: países con niveles iniciales más pequeños han crecido más deprisa que los países con niveles iniciales mayores. Para un mejor entendimiento de estos aspectos véase, entre muchos otros, 'Introduction to Modern Economic Growth (2008), de D. Acemoglu, Capítulo 1', también disponible en su material del Open Ware Course de MIT.

5. La contabilización del crecimiento y el progreso técnico exógeno

5.1. El residuo de Solow

El planteamiento teórico del modelo de Solow atribuye a la acumulación de factores productivos el papel de generadores del crecimiento económico. En una serie de artículos pioneros Abramovitz (1956) y Solow (1957) se propusieron averiguar cómo contribuyen los factores productivos al crecimiento de la producción. Para ello se parte de la función de producción neoclásica:

$$Y(t) = F(L(t), K(t))$$

Diferenciando con respecto al tiempo:

$$\dot{Y}(t) = \frac{\partial F(L(t),K(t))}{\partial L}\dot{L}(t) + \frac{\partial F(L(t),K(t))}{\partial K}\dot{K}(t)$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{\partial F(L(t),K(t))}{\partial L}L(t)}{Y(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\frac{\partial F(L(t),K(t))}{\partial K}K(t)}{Y(t)}\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$$

$$v_{Y\,t} = \alpha_t v_{L_t} + (1-\alpha_t)v_{K_t}\,,$$

donde $v_Y, v_L\ y\ v_K$ son las tasas de crecimiento de la renta, el empleo y el capital; y donde $\alpha_t\ y\ (1-\alpha_t)$ son la fracción de la renta que remunera al capital y al trabajo, que son aproximadamente constantes en la economía americana. Por tanto, obteniendo la fracción de la renta que remunera al trabajo y al capital a partir de la contabilidad nacional, los datos de empleo y los de inversión, a partir de los cuales se obtiene la serie del capital, se puede ver la contribución de los distintos factores productivos al crecimiento de la producción. Un importante hallazgo empírico fue que gran parte del crecimiento no se puede explicar por el crecimiento de los factores productivos. Esa parte del crecimiento no explicada se le llamó residuo de Solow o tasa de crecimiento de la Productividad Total de los Factores (Total Factor Productivity, TFP) y se define como sigue:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{TFP}} = \mathrm{v}_{\mathrm{Y}} - \alpha_{\mathrm{t}}\mathrm{v}_{\mathrm{N}} - (1-\alpha_{\mathrm{t}})\mathrm{v}_{\mathrm{K}}$$

Los cálculos de Solow muestran que la acumulación de factor trabajo y de factor capital sólo explican el 12,5% del crecimiento del producto, quedando el resto sin explicar. Esta parte no explicada, que se conoce como el residuo de Solow, se interpreta normalmente como progreso técnico: la parte del crecimiento que no se debe al aumento de los factores productivos se tienen que deber a un cambio de la función de producción, que significa un cambio técnico. El concepto de residuo de Solow se debe a que este puede interpretarse como el residuo de una regresión estimada por mínimos cuadrados restringidos del siguiente tipo:

$$v_{Y\,t} = \alpha_t v_{L_t} + (1-\alpha_t)v_{K_t} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$

La popularidad alcanzada por la interpretación de A como progreso técnico se debió en gran parte a la noción preexistente de que el avance tecnológico había sido uno de los grandes motores del desarrollo de las naciones industrializadas.

5.2. Cambio técnico exógeno

El modelo neoclásico de Solow-Swan predice que la tasa de crecimiento a largo plazo de las economías es cero porque existen rendimientos decrecientes en la acumulación de capital. Sin embargo, los datos muestran que muchos países han crecido en los últimos 200 años. Por otra parte, los estudios empíricos del residuo de Solow también ponían en entredicho los modelos neoclásicos ya que demostraban que una parte importante del crecimiento se debía al cambio tecnológico. Para resolver estas dos deficiencias empíricas del modelo se introdujo el crecimiento exógeno del parámetro tecnológico *A*, que viene dado por:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = a > 0 \qquad [1.22]$$

Para incorporar el progreso técnico, se deben establecer funciones de producción del tipo $Y = F(AL, K)$, es decir, con progreso técnico neutral en el sentido de Harrod, en las que **A** se interpreta como el número de unidades de eficiencia del trabajo. El motivo es que sólo el progreso técnico aumentador de la eficiencia del trabajo permite la existencia de un equilibrio con tasas de crecimiento constantes en el tiempo.

Para el análisis siguiente se utilizará la función de producción $Y = (AL)^{1-\alpha} K^{\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$, que en términos *per cápita* se expresa por $y = A^{1-\alpha} k^{\alpha}$.

Utilizando el gráfico del equilibrio del modelo de Solow es sencillo mostrar que una mejora tecnológica da lugar a que el estado estacionario se alcanza con un mayor capital per cápita. Así, en el gráfico 6 se ha representado el efecto de un aumento de *A*.

Aunque el gráfico 10 es bastante ilustrativo, para determinar el efecto sobre la economía de un cambio continuo en la tecnología como el planteado en la ecuación [1.17] es necesario hacer algunos cálculos. Para ello, se parte de la ecuación [1.10], que proporciona el equilibrio en el modelo de Solow, y se sustituye la función de producción anterior:

$$sf(k) = (n+\delta)k \rightarrow sA^{1-\alpha} k^{\alpha} = (n+\delta)k$$

Se puede despejar el stock de capital en el equilibrio estacionario:

$$sf(k) = (n+\delta)k \rightarrow k^* = A\left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Aplicando logaritmos neperianos y derivando respecto al tiempo se obtiene que la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita coincide con la del parámetro tecnológico:

$$\ln k^* = \ln A + \ln\left(\frac{s}{(n+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\dot{k}^*}{k^*} = \frac{\dot{A}}{A} = a > 0$$

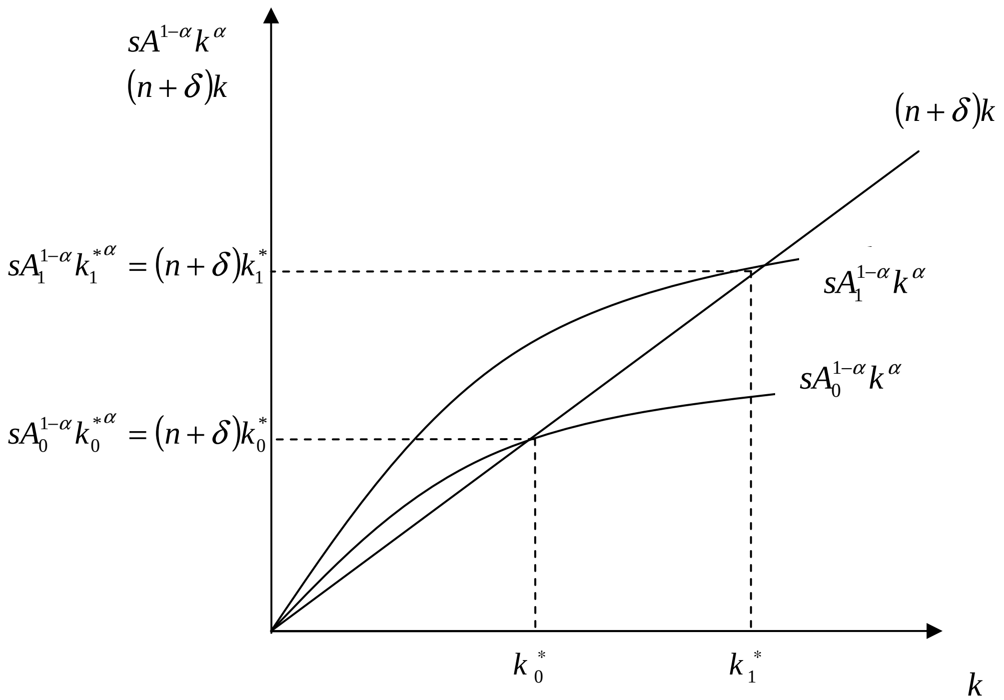

Gráfico 10: Progreso técnico exógeno en el modelo de Solow

La conclusión a la que se ha llegado es que la economía puede experimentar crecimiento positivo a largo plazo si la tecnología mejora. El progreso tecnológico es exógeno en el sentido de que no surge de la inversión en I+D de las empresas o del esfuerzo investigador de nadie; simplemente el nivel de la tecnología aumenta constantemente sin que se proporcione un motivo. De esta forma, el modelo neoclásico deja sin explicar, precisamente, el crecimiento económico a largo plazo, ya que lo atribuye al progreso técnico sin explicar de dónde proviene.

En definitiva, las explicaciones exógenas del crecimiento económico parecen poco satisfactorias. Esta insatisfacción ha llevado a elaborar un tipo de modelos en los que los determinantes del crecimiento sean endógenos. A estos modelos se les denomina de crecimiento endógeno porque el motor del crecimiento a largo plazo viene determinado dentro del propio modelo[11].

Al comparar los modelos neoclásicos con los de crecimiento endógeno, una de las diferencias fundamentales consiste en que en estos últimos la tasa de crecimiento en el estado estacionario del capital por trabajador puede ser positiva incluso cuando no se postula que alguna variable crezca a alguna tasa exógena. En estos modelos, la tasa de crecimiento en el estado estacionario depende de ciertas decisiones que toman los individuos y que llevan a que desaparezcan los rendimientos decrecientes en la acumulación de capital.

[11] Solow (2000, pp. 97-105 y 180-186) ofrece una visión crítica de los modelos de crecimiento endógeno.

Referencias bibliográficas y bibliografía

Abramovitz, M. (1956) "Resource and Output Trends in the United states since 1870", *American Economic Review* 46 (May): 5-23.

Barro, R. y X. Sala-i-Martín (2000), *Crecimiento Económico*, Ed. Reverté.

Cass, D. (1965): "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation", *Review of Economic Studies*, vol. 32, julio, pp. 233-240.

De La Fuente, A. (1992): "Historie d'A: crecimiento y progreso técnico", *Investigaciones Económicas*, vol. 16, nº 3, pp.331-391.

Dolado, J.; González-Páramo, J. y Roldán, J. (1994): "Convergencia económica entre las provincias españolas: evidencia empírica (1955-1989)", *Moneda y Crédito*, nº 198, pp. 81-119.

Koopmans, T. (1965): "On the concept of optimal economic growth", en *Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans*, Springer, New York.

Marrero, G. y Luis A. Puch (2005). "La Medición del Crecimiento Económico", en Crecimiento y Competitividad: Bases del Progreso Económico y Social, Ekonomi Gerizan, Vol. XII, pp. 57-69

Ramsey, F. (1928): "A mathematical theory of saving", *Economic Journal*, vol. 38, diciembre, pp. 543-559.

Romer, D. (2006): *Macroeconomía Avanzada*, McGraw-Hill, 3ª edición.

Sala-i-Martin, X. (2000): *Apuntes de crecimiento económico*, segunda edición, Antoni Bosch, Barcelona.

Solow, R.M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, nº 1, pp. 65-94.

Solow, R.M. (1957): "Technical Change and the Aggregate Production Function" *Review of Economics and Statistics* 39, pp. 312-320.

Solow, R.M. (2000): *Growth theory. An exposition*, segunda edición, Oxford University Press, Nueva York.

Sorensen, P.B. y Whitta-Jacobsen H. J. (2008): *Introducción a la macroeconomía avanzada (Volumen 1:crecimiento económico),* Mac Graw-Hill, Madrid.

Swan, T.W. (1956): "Economic growth and capital accumulation", *Economic Record*, vol. 43, nº 2, pp. 334-361.