Universidad de La Laguna
Departamento de Economía Aplicada

Matemáticas II
Grados Economía y ADE

Ficha para el dominio de la teoría II

Determinante de una matriz cuadrada

Marianela Carrillo Fernández
Domingo Israel Cruz Báez
Concepción González Concepción
Juan Carlos Moreno Piquero
Celina Pestano Gabino (coordinadora)
José Enrique Rodríguez Hernández

♦ **Def.-** Si $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se denomina **determinante de A** (**|A| o det(A)**) al valor numérico definido por:

i) Si $A=(a_{11})\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, definimos: $|A|=a_{11}$.

ii) Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con $n>1$, y A_{fc} denota el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila f y la columna c de A, entonces:

$|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}A_{ik}$, (**Desarrollo del determinante por la fila i-ésima de la matriz A**, para $i=1,\dots,n$) o

$|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}A_{kj}$ (**Desarrollo del determinante por la columna j-ésima de la matriz A** para $j=1,\dots,n$).

C1) Comenta verbalmente las ideas principales de las demostraciones de las siguientes propiedades.

Propiedades

i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$

ii) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23}).$

iii) Si A es una matriz triangular o diagonal de orden n $\Rightarrow |A|=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$

iv) $|A|=|A^t|$.

v) Si A tiene una fila o columna de ceros su determinante es nulo.

vi) $|AB|=|A||B|$, $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

vii) Si se intercambian dos filas o dos columnas en una matriz, su determinante queda multiplicado por -1.

viii) Si una línea se multiplica por un factor λ, el valor del determinante queda multiplicado por λ.

ix) Si a una fila (resp. columna) se le suma otra fila (resp. columna) multiplicada por un escalar, el valor del determinante no varía.

x) Si una matriz tiene dos filas o dos columnas idénticas, o una es múltiplo de la otra, su determinante es nulo.

xi) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

xii) Si una línea de una matriz se descompone en varios sumandos, su determinante se descompone en suma de determinantes como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}+\cdots+c_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1}+\cdots+c_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{i1}+\cdots+c_{i1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

No has entendido bien la teoría si a partir de ella crees que son ciertas, por ejemplo, las siguientes afirmaciones falsas:

i) $|A+B|=|A|+|B|$

ii) $|pA|=p|A|$

iii) $|AB|=0$ **si y sólo si** $|BA|=0$

iv) $|AB|=0$ **si y sólo si** $|A|=0$ **ó** $|B|=0$

Nota: En las siguientes igualdades C_i indica "columna i-ésima", F_j indica "fila j-ésima" y, por ejemplo, si indicamos $F_3:\to F_3-4F_2+3F_5$ queremos decir que en ese paso la tercera fila del siguiente determinante se ha obtenido de restarle a la tercera fila del anterior 4 por su segunda fila y sumarle además 3 por su quinta fila.

v) Si sobre un determinante se realiza la siguiente operación $F_i\to pF_i+kF_j$ (siendo $p\neq 0$) el determinante que resulta es igual al anterior

vi) Si sobre un determinante se realiza la siguiente operación $F_i\to pF_i+kF_j$ (siendo $k\neq 0$) el determinante que resulta es igual al anterior dividido por k

vii) Si sobre un determinante se realizan las siguientes operaciones en el mismo paso $F_2\to F_2+F_4$ y $F_4\to F_4+F_2$ el determinante que resulta es igual al anterior

C2) Para cada una de las "propiedades falsas" (en rojo) da un contraejemplo en el que se vea que es falsa, en general.

C3) Para cada una de las "falsas propiedades" (en rojo) da un ejemplo en el que sí se verifique "por casualidad".

C4) ¿Qué se le puede añadir como condiciones a las "falsas propiedades" iii) y iv) para que sean ciertas y puedan formar parte así de la lista de Propiedades al principio de esta ficha.