

Ficha para el dominio de la teoría V

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Mariela Carrillo Fernández
Domingo Israel Cruz Báez
Concepción González Concepción
Juan Carlos Moreno Piquero
Celina Pestano Gabino (coordinadora)
José Enrique Rodríguez Hernández



♦ **Teorema de Rouché-Frobenius:** “Sea la matriz $A^*=(A|B) \in M_{m \times (n+1)}(\mathbb{R})$ la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $AX=B$ con m ecuaciones y n incógnitas. Entonces se tiene que:

$$\text{i) Si } \mathbf{B} \neq \mathbf{0}, y, \begin{cases} \text{Rang}A = \text{Rang}A^* = h, y, \begin{cases} h = n \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado} \\ h < n \Rightarrow \text{Sist. Compatible Indeterminado} \end{cases} \\ \text{Sistema no homogéneo} \quad \text{Rang}A \neq \text{Rang}A^* \Rightarrow \text{Sist. Incompatible} \end{cases}$$

ii) Si $\mathbf{B}=\mathbf{0}$, y , por tanto, $\text{Rang}A = \text{Rang}A^* = h$, y ,
Sistema homogéneo

$$\begin{cases} h = n \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado (sólo tiene la solución trivial)} \\ h < n \Rightarrow \text{Sist. Compatible Indeterminado (tiene soluciones distintas de la trivial).} \end{cases}$$

♦ **Def.-** Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** si ambos poseen el mismo conjunto de soluciones, o ambos son incompatibles.

C1) Comenta verbalmente las ideas principales de las demostraciones de las siguientes propiedades.

Propiedades

i) Si se intercambian de posición dos ecuaciones, o, se multiplica una ecuación por un número real no nulo, o, se le suma a una ecuación otra multiplicada por un número real, el sistema resultante es equivalente. En otras palabras: **Si aplicamos operaciones elementales fila a la matriz ampliada de un sistema obtenemos matrices ampliadas asociadas a un sistema equivalente.**

ii) Si tenemos **un sistema con menor número de ecuaciones que de incógnitas ($m < n$)**, el sistema es **compatible indeterminado o incompatible**, y en ningún caso compatible determinado.

iii) Si tenemos **un sistema compatible determinado con mayor número de ecuaciones que de incógnitas ($m > n$)**, siempre existirá un sistema equivalente cuadrado, es decir, con igual número de ecuaciones que de incógnitas, que se puede obtener eligiendo aquellas n ecuaciones del sistema dado correspondientes a n filas de la matriz ampliada linealmente independientes (esto es, que contengan una submatriz cuadrada de orden n con determinante no nulo).

iv) **Cualquier sistema compatible indeterminado con mayor o igual número de ecuaciones que de incógnitas ($m \geq n$)** tiene un sistema equivalente con menor número de ecuaciones que de

incógnitas, exactamente con h ecuaciones si $\text{Rang}A = \text{Rang}A^* = h$, obtenible escogiendo h ecuaciones correspondientes a h filas de la matriz ampliada linealmente independientes (con una submatriz cuadrada de orden h con determinante no nulo).

v) Dado el sistema $AX=B$, siendo $A \in M_n(\mathbb{R})$ (sist. cuadrado, de n ec. y n incóg.) con $|A| \neq 0$ (sist. compatible determinado), $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, $B \neq 0$, su solución puede venir dada de las dos siguientes formas equivalentes:

1ª Forma de la Regla de Cramer

$$X = A^{-1} \cdot B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

2ª Forma de la Regla de Cramer

$$x_i = \frac{\begin{array}{c} \text{columna } i \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \end{array}}{|A|}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

vi) Dado el sistema $AX=B$, siendo $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (sist. con m ec. y n incog.), con $\text{Rang}A = \text{Rang}A^* = h < n$ (sist. compatible indeterminado), se obtiene su sistema equivalente con h ec. A partir de él sólo se podrán despejar h variables (con determinante de su matriz de coeficientes no nulo), en función de las restantes $n-h$ variables restantes (variables libres o parámetros, y el sistema se dice con $n-h$ grados de libertad). Esto se puede hacer por cálculo directo o aplicando la Regla de Cramer pasando las $n-h$ variables libres como términos independientes y tomando como nuevas variables del problema las h no libres.

vii) Basándonos en las propiedades de la equivalencia de sistemas podremos facilitar su discusión y resolución simultáneamente si empleamos el Método de Gauss, que consiste básicamente en **buscar una secuencia de operaciones elementales fila que, sistemáticamente, reduzcan la matriz ampliada del sistema $A^*=(A|B)$ a una forma triangular, o, en el mejor caso diagonal (obteniéndose por tanto un sistema equivalente más fácil de discutir y de inmediata resolución).**

No has entendido bien la teoría si a partir de ella crees que son ciertas, por ejemplo, las siguientes afirmaciones falsas:

- i) Un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas es compatible determinado**
- ii) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más ecuaciones que incógnitas no puede ser compatible determinado**

- iii) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene menos ecuaciones que incógnitas es compatible indeterminado
- iv) Si un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas (x_1, x_2, \dots, x_n) tiene infinitas soluciones entonces podemos encontrar una solución con $x_n=4$, por ejemplo, porque al ser libre le damos el valor que queramos.
- v) Si aplicamos cualquier operación elemental a la matriz asociada a un sistema, el sistema que resulta es equivalente al inicial.
- vi) Para resolver un sistema de m ecuaciones y n incógnitas $n > m$, por el método de Cramer, pasamos los sumandos con las últimas $n-m$ variables a la derecha de las ecuaciones y consideramos como variables (no libres) del problema las que quedan a la izquierda de las ecuaciones.
- vii) El número de parámetros libres en un sistema lineal es el número de incógnitas menos el número de ecuaciones.

C2) Para cada una de las “propiedades falsas” (en rojo) da un contraejemplo en el que se vea que es falsa, en general.

C3) Para cada una de las “propiedades falsas” (en rojo) da un ejemplo en el que sí se verifique “por casualidad”.