Universidad de La Laguna
Departamento de Economía Aplicada

Matemáticas II
Grados Economía y ADE

Ejercicios Complementarios al Manual

Módulo II: Optimización

Marianela Carrillo Fernández
Domingo Israel Cruz Báez
Concepción González Concepción
Juan Carlos Moreno Piquero
Celina Pestano Gabino (coordinadora)
José Enrique Rodríguez Hernández

1. Se quiere editar una novela de tal forma que cada hoja rectangular sea lo más pequeña posible pero pueda contener 18 cm^2 de texto impreso, los márgenes superior e inferior sean ambos de 2 cm. y los laterales de 1 cm. ¿Cómo conseguir todo esto?

2. Con el mínimo gasto se quiere construir un tanque para almacenar gasolina, que tenga forma de cilindro y pueda contener 10 m^3. Los materiales de la pared lateral cuestan 20 € por dm^2 y los del fondo y tapa a 30 € por dm^2. ¿Cómo hacerlo?

3. Una empresa que quiere abrir en Tenerife a determinado por medio de un estudio de mercado que el porcentaje de clientes potenciales que utilizarían sus servicios entre las 6 de la mañana y las 12 del mediodía viene dado por $P(t)=660-231t+27t^2-t^3$, donde t mide las horas desde las 00:00 de la madrugada. ¿En qué momento tendrá más clientes?¿Cuántos concretamente tendrá en ese momento?

4. Hallar el beneficio máximo que se obtiene de la venta de un producto si el ingreso es $I(x)=-2x^2+60x$, el coste $C(x)=20x$ y x son las unidades producidas.

5. Las funciones de ingreso I(x) y la de coste C(x) de una empresa vienen dadas por: $I(x)= -\frac{11}{54}x^2+\frac{235}{100}x-\frac{28}{27}$ y $C(x)=(3/4)x+1$ para $2\leq x\leq 5$, siendo x la producción en miles de unidades. ¿Cuánto hay que producir para minimizar costes? ¿y para maximizar los ingresos?¿y para maximizar e beneficio?

6. ¿Cómo ha de proceder cierto comercial de lavadoras si quiere maximizar su sueldo total y este se comprende de un sueldo base de 100.000 u.m. más un complemento retributivo que viene dado por la función $2660x-0.2x^3$, donde x representa el número de lavadoras que venda al mes? Hay que considerar además que tiene mensualmente un gasto general de 20000 u.m. y otro de 500 u.m. por lavadora instalada.

7. Se quiere poner muro delante de una nave industrial a un trozo rectangular lo mayor posible, y se quiere utilizar como zona de prealmacenamiento. No se necesita poner muro en uno de los lados, puesto que ya está el de la nave. Si los materiales necesarios cuestan 20 u.m. el metro, determinar las dimensiones del mayor trozo que puede cercarse con 20.000 u.m.

8. Dos autopistas en cierto tramo representan en el mapa aéreo aproximadamente una parábola $y=x^2$ y una recta $x-y-2=0$. Hay que unirlas por medio de una vía totalmente recta que tenga la menor longitud posible. ¿Cómo marcar en el mapa por qué puntos de las autopistas hay que unirlas mediante dicha vía?

9. Determinar y clasificar los extremos relativos de la función z en cada uno de los siguientes apartados:

a) $z=x^3+xy^2-4x-2y$ **b)** $z=x+2y+yu-y^2-x^2-u^2$

10. **a)** Hallar los óptimos de la función $f(x,y)=(x+y)e^{-(x+y)}$

b) Imponerle una restricción de forma que los puntos obtenidos en el apartado a) no sean admisibles

c) Hallar los óptimos del problema que has planteado en el apartado b).

11. Calcular los extremos de las siguientes funciones con las restricciones que se indican:

a) $\left.\begin{array}{c} z=xy \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{c} z=e^x+e^y \\ x+y=10 \end{array}\right\}$ *** c)** $\left.\begin{array}{c} (x-1)^2+y^2 \\ y^2=4x \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{c} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x+y-2=0 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{c} z=x^2+y^2 \\ x^2+y=1 \end{array}\right\}$

12. a) Estudiar los extremos de la función $f(x,y,z)= x - 2y + 2z$ si entre las variables x,y,z se cumple la condición $x^2 + y^2 + z^2=9$.

b) Hallar los extremos de la función $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ con la condición de que las variables x e y satisfagan la condición $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

(Nota: Hacer el cambio $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$).

c) Determinar extremos relativos de la función U= xy + xt + yt sabiendo que las variables verifican la restricción xyt=1.

d) Determinar extremos relativos de la función U=xyz sabiendo que las variables verifican la restricción $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$.

13. Estudiar los extremos de la función f(x,y,z)= lnx+lny+3lnz sobre la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=5$ en la que x>0, y>0, z>0.

14. ¿Cuál será el plan de compra de un individuo si actúa racionalmente, dispone de de 30 u.m. que dedicará a la adquisición de dos tipos de bienes B_1 y B_2, los precios de los bienes del tipo B_1 y B_2 son respectivamente *p* y *q*, y se estima que la combinación (*x*,*y*) de la cantidad *x*>0 del tipo B_1 con la cantidad *y*>0 del tipo B_2 reporta al sujeto una utilidad $U(x,y)=\ln(xy^2)$?

15. La función de utilidad de un consumidor es $U=2\ln x+\ln y$ y su restricción presupuestaria es $M=2x+4y$. Hallar los niveles de *x* e *y* que el consumidor debe asignar a fin de maximizar su utilidad.

16. La función de producción de un fabricante es $Q=4K^{1/2}L^{1/2}$. Su función de costo es $C=2K+8L$. Hallar la combinación de *K* y *L* para minimizar el costo a un nivel de producción $Q=32$.

17. Las funciones de coste de un monopolista para sus dos fábricas son $C_1=2q_1^2 + 4$ y $C_2= 6q_2^2 + 8$, siendo $p= 88-4Q$ donde $Q= q_1 + q_2$. Hallar la producción que maximiza su beneficio, la cantidad que debe producir en cada fábrica y el precio que ha de poner para su producto.

18. La función de producción de una empresa viene dada por $Q(L,K)=50L^{2/3}K^{1/3}$ donde *L* y *K* representan respectivamente el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y *Q* es el número de unidades elaboradas del producto. Sabiendo que los costos por unidad de mano de obra y capital empleados son de 100 u.m. y 300 u.m. respectivamente y que la empresa dispone de una cantidad de 45.000 u.m. para propósitos de producción, se pide:

a) Determinar, utilizando sólo las condiciones de primer orden, la combinación de mano de obra y de capital que la empresa deberá utilizar con objeto de maximizar su producción.

b) Demuestre que en este nivel de producción, el cociente de las productividades marginales de los factores es igual al cociente de sus costes unitarios.

19. Dada la función de producción $Q=f(L,C,R)=L^2+C^2+R^2$, y sabiendo que los factores de producción deben verificar las condiciones $L+C+R=6$, $L-C-R=1$, $0<C,R<5/2$, calcular los niveles mínimos de producción.

20. Un productor dispone de 60.000 € para invertir en el desarrollo y la promoción de una nueva película de vídeo. Se calcula que si se gastan *x* miles de euros en desarrollo e *y* miles en promoción, se venderán aproximadamente $f(x,y) = 20x^{3/2}y$ vídeos. ¿Cuánto debe invertir en desarrollo y cuánto en la promoción para maximizar las ventas?

21. Un fabricante de dos tipos de piezas para cierta industria tiene como función de costes $C= x^2 + xy + y^2 + 190$. Las funciones de demanda son $x= 63 - 0.25p_x$, $y= 60 - \frac{1}{3}p_y$ donde p_x y p_y representan los precios respectivos de *los dos tipos de piezas y x e y las cantidades demandadas de cada una de los tipos de piezas. D*eterminar los niveles de producción que maximizan el beneficio, los niveles de precios óptimos y el beneficio máximo. Si te informaran de que concretamente *x* simboliza el número de ruedas e *y* el número de armazones que vende para la industria de triciclos solamente ¿cambiaría en algo la solución obtenida anteriormente?

22. Calcular los óptimos de los siguientes problemas, indicando si fuera posible si se trata de un óptimo global:

a) $\left.\begin{array}{r}\max z = y - x \\ \text{s.a.}: x^2 + y^2 \le 4 \\ -x^2 + y = 0\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}\max z = x \\ \text{s.a.}: x^2 - y \le 0 \\ x - y \ge -2\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{c}\min z = (x-4)^2 + (y-4)^2 \\ \text{s.a.}: x - 3 \le 0 \\ x - y - 2 \le 0\end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{c}\max z = e^{-x} \\ \text{s.a.}: x \ge 0\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}\max z = x + 2y \\ \text{s.a.}: xy = 1 \\ x - y \le 2 \\ x \ge 0\end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{c}\max z = x^2 - 2y \\ \text{s.a.}: x^2 + y^2 = 16 \\ x + y \ge 4\end{array}\right\}$ **g)** $\left.\begin{array}{c}\min\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a.}: x + y - 2z^2 \le 0\end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{c}\max\ u = x + yz \\ \text{s.a.}: x^2 + y^2 + z^2 \le 1\end{array}\right\}$

23. Sabiendo que la función de producción *z* de una empresa es verifica $16z = 65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2$, los precios unitarios de dos inputs que se adquieren en cantidades *x* e *y* (en situación de competencia perfecta) son 8 u.m. y 4 u.m. respectivamente y que el precio unitario del bien producido es 32 u.m., determinar el beneficio máximo.

24. Determinada compañía elabora dos tipos de bienes A y B. Obtiene un beneficio que viene dado por $B(x,y) = 2x^3 + y^3$, donde *x* e *y* son los números de unidades de A y B, respectivamente. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir, están restringidos por la ecuación de transformación del producto dada por: $x^2 + y^2 = 100$. Hallar las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar el beneficio, así como el beneficio máximo.

25. Se ha encontrado relación entre lo que se vende de un alimento y número de minutos mensuales en la radio, *x*, y en TV, *y*. Estadísticamente se ha estimado que la relación entre estas variables es $V=(x+2)(y+1)$. Sabiendo que un minuto en radio vale 20000 u.m., un minuto en TV 50000 u.m. y que el presupuesto para publicidad es de 2550000 u.m., aconsejar sobre el modo de hacer la publicidad según esta información.

26. Dada la función $F=\dfrac{200x}{5+x}+\dfrac{100y}{10+y}$, maximiza z=(F/5)-x-y, sujeto a x+y=25. Asígnale a este problema un posible enunciado real, resuélvelo y comenta la solución.