La integral doble sobre rectángulos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Nos ocuparemos a continuación de definir y estudiar la integral doble sobre rectángulos del plano, en el sentido de Riemann. La teoría que desarrollaremos en $\mathbb{R}^2$ se puede extender a $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 2)$.

Introducimos en primer lugar la integral de las llamadas *funciones escalonadas*, para luego considerar funciones más generales. Nos detendremos en el *teorema de Fubini*, que permite obtener el valor de la integral doble de una función continua por integración simple reiterada en cualquier orden. Prestaremos atención a la integrabilidad de funciones con discontinuidades y demostraremos el *teorema de Lebesgue*, que caracteriza las funciones integrables como aquellas cuyo conjunto de discontinuidades tiene medida nula. Concluiremos con el estudio de los *teoremas de la media* en rectángulos.

En lo sucesivo emplearemos ocasionalmente la notación $\bar{x} = (x_1, x_2)$ $(\bar{x} \in \mathbb{R}^2;\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2)$.

2. La integral de funciones escalonadas

Definición 2.1. *Un* rectángulo cerrado *Q en $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiano de dos intervalos reales cerrados $[a,b]$ y $[c,d]$:*

$$Q = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\}.$$

Un rectángulo abierto *I en $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiano de dos intervalos reales abiertos $]a,b[$ y $]c,d[$:*

$$I =]a,b[\times]c,d[= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d\right\}.$$

Salvo indicación expresa en contra, el término *rectángulo* hará referencia a un rectángulo **cerrado**.

Definición 2.2. *Una* partición *de un rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$ es el producto cartesiano $P = P_1 \times P_2$, donde*

$$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\},$$

$$P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d\}$$

son particiones de $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente.

Nótese que en la Definición 2.2, la partición $P = P_1 \times P_2$ divide a Q en $n \cdot m$ rectángulos abiertos $Q_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$ $(i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ (Figura 1).

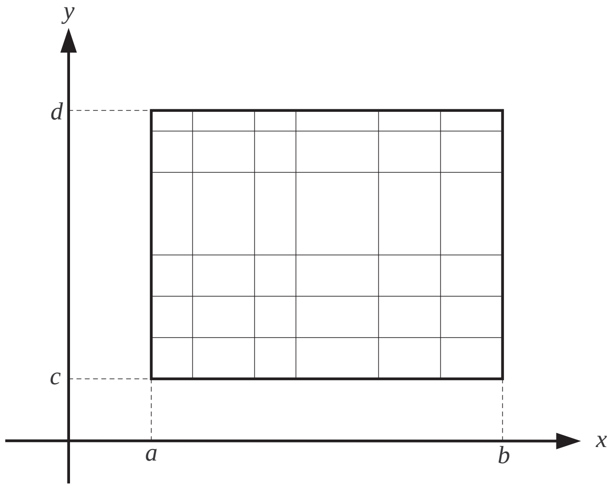

Figura 1. Partición del rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$.

Definición 2.3. *Los rectángulos abiertos determinados por una partición P de un rectángulo Q se denominan* subrectángulos *de la partición P o del rectángulo Q.*

Definición 2.4. *Dadas dos particiones P, P' de un rectángulo Q, se dirá que P' es* más fina *que P (o también, que P' es un* refinamiento *de P) si $P \subset P'$.*

Definición 2.5. *Una función f definida y acotada en un rectángulo Q se llama* escalonada *si existe una partición P de Q tal que f es constante en cada uno de los subrectángulos abiertos de P* (Figura 2).

Si P es una partición del rectángulo Q en $n \cdot m$ subrectángulos

$$\{Q_{ij} : i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$$

y f es una función escalonada que toma el valor c_{ij} en el subrectángulo Q_{ij} $(i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$, podemos escribir:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \chi_{Q_{ij}}(x,y) \qquad \left((x,y) \in Q \setminus \bigcup_{i,j=1}^{n,m} \partial Q_{ij} \right),$$

donde, para $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$$

es la *función característica* de A.

Proposición 2.6. *El espacio $\mathscr{E}(Q)$ de las funciones escalonadas sobre un rectángulo Q es un espacio vectorial real con la suma y el producto por escalares definidas punto a punto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \in \mathscr{E}(Q)$ y sean M, N las particiones de Q asociadas a f y g, respectivamente. Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se cumple que $\lambda f + \mu g$ es constante en cada subrectángulo de $M \cup N$. □

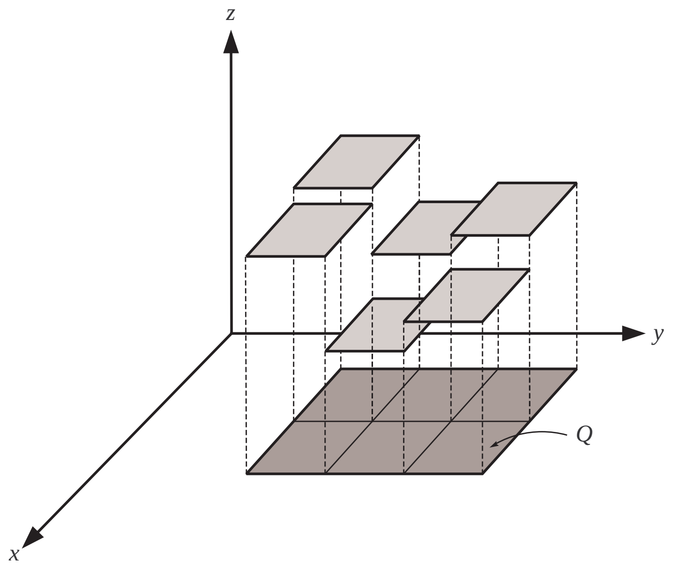

Figura 2. Gráfica de una función escalonada en Q.

A continuación definimos ya la integral doble de funciones escalonadas.

Definición 2.7. *Sea P una partición de Q en $n \cdot m$ subrectángulos*

$$Q_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[\qquad (i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m),$$

y sea $f \in \mathscr{E}(Q)$ que toma el valor c_{ij} en Q_{ij} $(i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$. La integral doble de f sobre Q *se denota $\iint_Q f$, y se define por la fórmula*

$$\iint_Q f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} |Q_{ij}|,$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \qquad (i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$$

y $|Q_{ij}| = \Delta x_i \Delta y_j$ es el área de Q_{ij} ($i,j \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$).

Esta integral también se representa en la forma

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy.$$

La integral doble de funciones escalonadas puede ser obtenida por integración simple reiterada:

Proposición 2.8. *Si $Q = [a,b] \times [c,d]$ y $f \in \mathscr{E}(Q)$, entonces*

$$\iint_Q f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f toma el valor c_{ij} en $Q_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$ ($i,j \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$). Entonces, para $i,j \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$:

$$\begin{aligned}
\iint_{Q_{ij}} f &= c_{ij}\Delta x_i \Delta y_j = c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} c_{ij}\,dy \right] dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \right] dx \\
&= c_{ij}\Delta y_j \Delta x_i = c_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} c_{ij}\,dx \right] dy = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,dx \right] dy.
\end{aligned}$$

Sigue que

$$\begin{aligned}
\iint_Q f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{Q_{ij}} f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \iint_{Q_{ij}} f = \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,dx \right] dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy,
\end{aligned}$$

como se pretendía. □

Proposición 2.9. *Sean $s,t \in \mathscr{E}(Q)$. Se verifican las propiedades siguientes:*

(i) **(Linealidad)** *Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$$\iint_Q (\lambda s + \mu t) = \lambda \iint_Q s + \mu \iint_Q t.$$

(ii) **(Aditividad)** *Si Q_1 y Q_2 son dos rectángulos con interiores disjuntos cuya unión es otro rectángulo Q,*

entonces

$$\iint_Q s = \iint_{Q_1} s + \iint_{Q_2} s.$$

(iii) **(Comparación o monotonía)** *Si* $s(x,y) \leq t(x,y)$ $((x,y) \in Q)$, *entonces*

$$\iint_Q s \leq \iint_Q t.$$

En particular, $t(x,y) \geq 0$ $((x,y) \in Q)$ *implica*

$$\iint_Q t \geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de la Definición 2.7. También puede aplicarse la Proposición 2.8 y los resultados correspondientes para integrales simples. □

3. La integral de funciones definidas y acotadas sobre rectángulos

3.1. Integral doble

Sea Q un rectángulo y sea $f : Q \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| \leq M$ $((x,y) \in Q)$. Pongamos

$$S = \{s \in \mathscr{E}(Q) : s(x,y) \leq f(x,y) \ ((x,y) \in Q)\},$$

$$T = \{t \in \mathscr{E}(Q) : f(x,y) \leq t(x,y) \ ((x,y) \in Q)\}.$$

Nótese que S y T no son vacíos, ya que la función constantemente igual a $-M$ está en S mientras que la función constantemente igual a M pertenece a T.

Definición 3.1. *En las condiciones anteriores, si existe un único* $I \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\iint_Q s \leq I \leq \iint_Q t \qquad (s \in S,\ t \in T),$$

entonces el número I *se llama* integral doble de f en Q *y se denota*

$$\iint_Q f, \qquad \text{o bien} \qquad \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy,$$

diciéndose en tal caso que f es integrable sobre Q.

Definición 3.2. *Se llama* integral inferior de f en Q *al número real*

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\iint_Q s : s \in S\right\}$$

e integral superior de f en Q *al número real*

$$\overline{I}(f) = \text{ínf}\left\{\iint_Q t : t \in T\right\}.$$

La integral de f sobre Q puede no existir, pero las integrales inferior y superior siempre existen. La relación entre la integral de f y sus integrales inferior y superior viene dada por la siguiente Proposición 3.3, que caracteriza la integrabilidad de las funciones acotadas sobre rectángulos.

Proposición 3.3. *Toda función f acotada en un rectángulo Q tiene una integral inferior $\underline{I}(f)$ y una integral superior $\overline{I}(f)$, que satisfacen*

$$\iint_Q s \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \iint_Q t$$

para cualesquiera $s, t \in \mathscr{E}(Q)$ tales que $s(x,y) \leq f(x,y) \leq t(x,y)$ $((x,y) \in Q)$. Además, f es integrable sobre Q si, y sólo si, $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, y en tal caso

$$\iint_Q f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

DEMOSTRACIÓN. El conjunto sobre el que se toma el supremo (ínfimo) que define la integral inferior (superior) es no vacío y acotado superiormente (inferiormente), toda vez que S y T son no vacíos y, por monotonía, se tiene

$$\iint_Q s \leq \iint_Q t \qquad (s \in S,\ t \in T).$$

Así pues, $\underline{I}(f)$ y $\overline{I}(f)$ están definidos y satisfacen

$$\iint_Q s \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \iint_Q t \qquad (s \in S,\ t \in T).$$

Si f es integrable en Q, existe un único número real $I = \iint_Q f$ tal que

$$\iint_Q s \leq I \leq \iint_Q t \qquad (s \in S,\ t \in T); \tag{1}$$

por tanto,

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I = \iint_Q f.$$

Recíprocamente, si $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ y si I denota este valor común, es claro que se cumple (1). Para demostrar la unicidad, supongamos que existe $J \in \mathbb{R}$ tal que (1) vale con J en vez de I. Por definición de $\underline{I}(f)$ y $\overline{I}(f)$ se tiene entonces que

$$\underline{I}(f) \leq J \leq \overline{I}(f).$$

Al ser $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I$ se concluye que $J = I$, probando que f es integrable en Q, con $\iint_Q f = I$. □

Proposición 3.4. *Las propiedades de linealidad, aditividad y monotonía valen para funciones acotadas integrables sobre un rectángulo Q.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se prueba sin dificultad combinando las Proposiciones 2.9 y 3.3. □

3.2. Sumas de Darboux

En esta sección daremos una nueva caracterización de la integrabilidad, ahora en términos de las llamadas *sumas superior* e *inferior de Darboux*.

Sea f una función real definida y acotada en un rectángulo Q, y sea P una partición de Q en n subrectángulos Q_k $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n)$. Escribimos

$$m_k(f) = \operatorname{ínf}\{f(x,y) : (x,y) \in Q_k\}, \quad M_k(f) = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in Q_k\} \qquad (k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n).$$

El área de cada Q_k será denotada $|Q_k|$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n)$.

Definición 3.5. *En las condiciones anteriores, las sumas*

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)|Q_k|, \qquad U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)|Q_k|$$

se denominan, respectivamente, sumas inferior *y* superior de Darboux de f asociadas a la partición P.

Proposición 3.6. *Sea f una función real definida y acotada en un rectángulo Q. Son equivalentes:*

(i) *La función f es integrable sobre Q.*

(ii) *Dado $\varepsilon > 0$ existen funciones $s,t \in \mathscr{E}(Q)$ tales que $s \leq f \leq t$ y*

$$\iint_Q (t-s) < \varepsilon.$$

(iii) *Dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P de Q tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos cierto (i). Si f es integrable sobre Q, entonces

$$\iint_Q s \leq \underline{I}(f) = \overline{I}(f) \leq \iint_Q t \qquad (s,t \in \mathscr{E}(Q),\ s \leq f \leq t).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de $\underline{I}(f)$ como un supremo, existe $s \in \mathscr{E}(Q)$ tal que $s \leq f$ y

$$\iint_Q s > \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Similarmente, por la definición de $\overline{I}(f)$ como un ínfimo, existe $t \in \mathscr{E}(Q)$ tal que $f \leq t$ y

$$\iint_Q t < \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En consecuencia

$$\iint_Q (t-s) < \overline{I}(f) - \underline{I}(f) + \varepsilon = \varepsilon,$$

lo que establece (ii).

Si se verifica (ii), dado $\varepsilon > 0$ existen funciones $s,t \in \mathscr{E}(Q)$ tales que $s \leq f \leq t$ y

$$\iint_Q (t-s) < \varepsilon.$$

Sea P un refinamiento de las particiones de Q asociadas a s y t. Es claro que

$$\iint_Q s \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq \iint_Q t.$$

Por tanto

$$U(f,P) - L(f,P) \leq \iint_Q (t-s) < \varepsilon,$$

probando (iii).

Ahora, supongamos cierto (iii): dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P de Q en subrectángulos Q_k ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$) tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Definimos funciones $s,t \in \mathscr{E}(Q)$, $s \leq f \leq t$, mediante:

$$s(x,y) = m_k(f), \quad t(x,y) = M_k(f) \qquad ((x,y) \in Q_k;\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n).$$

Entonces

$$\iint_Q (t-s) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\,|Q_k| = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

lo que establece (ii).

Para ver que (ii) implica (i) consideremos la cadena de desigualdades

$$\iint_Q s \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \iint_Q t \qquad (s,t \in \mathscr{E}(Q),\ s \leq f \leq t).$$

Si se verifica (ii), para cada $\varepsilon > 0$ y ciertas $s,t \in \mathscr{E}(Q)$, con $s \leq f \leq t$, se tiene

$$0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \iint_Q (t-s) < \varepsilon,$$

es decir, $0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon$. Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, haciendo $\varepsilon \to 0$ encontramos que $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, lo cual prueba (i) y completa la demostración. □

3.3. Teorema de Fubini

A continuación extenderemos a funciones integrables acotadas el resultado de la Proposición 2.8.

Proposición 3.7. *Sea f definida y acotada en $Q = [a,b] \times [c,d]$, y supongamos que f es integrable en Q. Si para cada $y \in [c,d]$ existe*

$$\int_a^b f(x,y)\,dx = A(y)$$

y además existe

$$\int_c^d A(y)\,dy,$$

entonces

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Bajo las hipótesis oportunas, se obtiene una fórmula parecida para calcular la integral doble mediante integrales iteradas en las que el orden de integración se invierte.

DEMOSTRACIÓN. Sean $s,t \in \mathscr{E}(Q)$ tales que $s \le f \le t$. Por la monotonía de la integral simple,

$$\int_a^b s(x,y)\,dx \le A(y) \le \int_a^b t(x,y)\,dx.$$

Aplicando la Proposición 2.8:

$$\iint_Q s = \int_c^d dy \int_a^b s(x,y)\,dx \le \int_c^d A(y)\,dy \le \int_c^d dy \int_a^b t(x,y)\,dx = \iint_Q t.$$

Al ser s, t arbitrarias y f integrable, de la Definición 3.1 se concluye

$$\iint_Q f = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

como pretendíamos. □

La Proposición 3.7 permite **interpretar geométricamente la integral doble como un volumen**. Si $Q = [a,b]\times[c,d]$ y $f : Q \to \mathbb{R}$ es una función acotada y no negativa, el conjunto

$$\mathscr{O}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in Q,\ 0 \le z \le f(x,y)\right\}$$

recibe el nombre de *conjunto de ordenadas* de f. Para cada $y_0 \in [c,d]$ fijo, la interpretación geométrica de la integral simple nos dice que $A(y_0)$ representa el área de la sección producida en $\mathscr{O}(f)$ por el plano $y = y_0$. Por tanto, la integral de $A(y)$ en el intervalo $[c,d]$ proporciona el volumen de $\mathscr{O}(f)$ (Figura 3).

El siguiente Teorema 3.8 pone de manifiesto que **la integral doble de funciones continuas se puede calcular como una integral iterada en cualquier orden**.

Teorema 3.8 (Fubini)**.** *Si f es continua en $Q = [a,b]\times[c,d]$, entonces f es integrable sobre Q y se verifica*

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

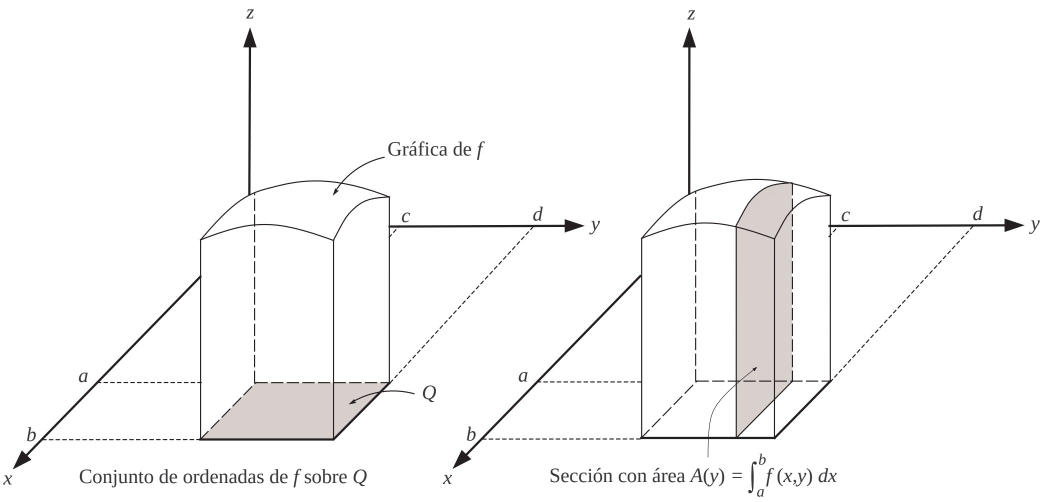

Figura 3. La integral doble como un volumen.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que f es integrable usaremos el criterio de la Proposición 3.6 (iii). Al ser f continua sobre el compacto Q, f es uniformemente continua en Q y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P de Q en subrectángulos Q_k tales que $M_k(f) - m_k(f) < \varepsilon/|Q|$ ($k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n$), donde $|Q|$ denota el área de Q. De aquí,

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]|Q_k| < \frac{\varepsilon}{|Q|} \sum_{k=1}^{n} |Q_k| = \varepsilon.$$

Hemos de demostrar ahora que la integral doble de f en Q puede expresarse como una integral iterada en cualquier orden. Más precisamente, estableceremos la igualdad

$$\iint_Q f = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

ya que la prueba correspondiente al orden de integración inverso es análoga.

Fijado $y \in [c,d]$ existe $A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, pues al ser f continua sobre Q lo es en cada variable. Afirmamos que $A(y)$ ($y \in [c,d]$) es continua. En efecto, sean $y_0, y_1 \in [c,d]$. Por la continuidad de la función $\varphi(x) = f(x,y_0) - f(x,y_1)$ ($a \leq x \leq b$), para algún $x^* \in [a,b]$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} |A(y_0) - A(y_1)| &= \left| \int_a^b [f(x,y_0) - f(x,y_1)]\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x,y_0) - f(x,y_1)|\,dx \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x,y_0) - f(x,y_1)|\,(b-a) = |f(x^*,y_0) - f(x^*,y_1)|\,(b-a). \end{aligned}$$

Haciendo $y_1 \to y_0$ vemos que $A(y_1) \to A(y_0)$, lo que establece nuestra afirmación. En estas condiciones, existe

$$\int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

Ahora basta con aplicar la Proposición 3.7. □

Ejemplo 3.9. *Sea $Q = [-1,1] \times [0,\pi/2]$. Demostrar que la integral*

$$\iint_Q (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dx\, dy$$

existe y calcularla.

RESOLUCIÓN. En virtud del teorema de Fubini (Teorema 3.8), la integral del enunciado existe y se puede calcular como una integral iterada en cualquier orden. Por tanto:

$$\iint_Q (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_{-1}^1 (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dx = -\int_0^{\pi/2} e^x|_{-1}^1\, y\, dy = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{e} - e\right).$$

Invirtiendo el orden de integración:

$$\begin{aligned}&\iint_Q (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dx\, dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{\pi/2} (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dy = \int_{-1}^1 \left[-x\cos y - \frac{y^2}{2}e^x\right]_0^{\pi/2} dx = -\frac{\pi^2}{8}\int_{-1}^1 e^x\, dx = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{e} - e\right),\end{aligned}$$

se obtiene, efectivamente, el mismo resultado. □

4. Integrabilidad de funciones acotadas con discontinuidades

Hemos visto (Teorema 3.8) que las funciones continuas son integrables Riemann sobre rectángulos. Por contra, las funciones muy discontinuas no son integrables Riemann, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1. *Sea $I = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unidad, y sea $f = \chi_{I \cap \mathbb{Q}^2}$ la función característica de los puntos de I con coordenadas racionales (llamada* función de Dirichlet, *o* función «sal y pimienta»*). Nótese que f es discontinua en todo punto de I. Para cualquier partición P de I se tiene que $L(f,P) = 0$ mientras* *que $U(f,P) = 1$. En virtud de la Proposición 3.6, f no es integrable Riemann sobre I.*

4.1. Conjuntos de contenido nulo

Probaremos a continuación que una función es integrable Riemann con tal de que su conjunto de discontinuidades no sea «demasiado grande». Para medir el tamaño de dicho conjunto introduciremos el siguiente concepto.

Definición 4.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado. Se dice que A tiene* contenido nulo *si dado $\varepsilon > 0$ existe una familia finita $I_1, \ldots, I_n$ de rectángulos abiertos satisfaciendo*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \varepsilon,$$

donde $|I_i|$ denota el área de I_i ($i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$).

Proposición 4.3. *Tienen contenido nulo:*

(i) Los subconjuntos de conjuntos de contenido nulo.

(ii) Las uniones finitas de conjuntos de contenido nulo.

(iii) Los conjuntos unitarios.

(iv) Los conjuntos finitos.

(v) Los segmentos de recta en el plano.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de la Definición 4.2. □

Observación 4.4. *En la Definición 4.2 es posible reemplazar los rectángulos abiertos por rectángulos cerrados.*

En efecto, sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado. Supongamos que dado $\varepsilon > 0$ existe una familia finita $I_1, \ldots, I_n$ de rectángulos abiertos tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \varepsilon.$$

Tomando $F_i = \bar{I}_i$ $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le n)$ encontramos que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} |F_i| = \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que $Q = [a,b] \times [c,d]$. Afirmamos que para cada $\delta > 0$ existe $\gamma > 0$ tal que $|Q_\gamma| < |Q| + \delta$, donde $Q_\gamma =]a-\gamma, b+\gamma[\times]c-\gamma, d+\gamma[\supset Q$. Para verlo, nótese que si $\gamma \ge 0$ entonces

$$|Q_\gamma| = (b-a+2\gamma)(d-c+2\gamma) = (b-a)(d-c) + 2\gamma(b-a+d-c) + 4\gamma^2$$

es una función continua de γ, con $|Q_0| = |Q|$. Supongamos ahora que dado $\varepsilon > 0$ existe una familia finita $F_1, \ldots, F_n$ de rectángulos cerrados tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} |F_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eligiendo $\delta = \varepsilon/2n > 0$, podemos encontrar $\gamma > 0$ tal que $I_i = F_{i,\gamma}$ es abierto, $I_i \supset F_i$, y $|I_i| < |F_i| + \varepsilon/2n$ $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le n)$. Se tiene así que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \sum_{i=1}^{n} |F_i| + n\frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon.$$

Proposición 4.5. *Si f es una función acotada en un rectángulo Q cuyo conjunto de puntos de discontinuidad tiene contenido nulo, entonces f es integrable sobre Q.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicaremos el criterio de la Proposición 3.6 (iii).

Sean M una cota de f y D el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en Q. Como D tiene contenido nulo, dado $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento de D por rectángulos abiertos $\{I_i\}_{i=1}^{m}$, la suma de cuyas áreas es menor que $\varepsilon/4M$.

Usamos los vértices de los rectángulos I_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m)$ para generar una partición de Q. Sean $J_1, \ldots, J_r$ los subrectángulos de esta partición completamente contenidos en algún I_i, y $K_1, \ldots, K_s$ los que son disjuntos de todos los I_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le s$, se tiene que f es uniformemente continua en $\overline{K}_k$ y, por tanto, existe una partición P_k de $\overline{K}_k$ tal que $U(f, P_k) - L(f, P_k) < \varepsilon/2s$. Tomando $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$

encontramos que

$$
\begin{aligned}
U(f,P)-L(f,P) &\leq \sum_{j=1}^{r}[\sup\{f(\bar{x}):\bar{x}\in J_j\}-\text{ínf}\{f(\bar{x}):\bar{x}\in J_j\}]\,|J_j|+\sum_{k=1}^{s}[U(f,P_k)-L(f,P_k)] \\
&\leq 2M\sum_{i=1}^{m}|I_i|+\sum_{k=1}^{s}\frac{\varepsilon}{2s}<2M\frac{\varepsilon}{4M}+s\frac{\varepsilon}{2s}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

como pretendíamos. □

El siguiente ejemplo muestra que no se verifica el recíproco de la Proposición 4.5.

Ejemplo 4.6. *Sea $I=[0,1]\times[0,1]$ el cuadrado unidad, y definamos $f:I\to\mathbb{R}$ mediante*

$$
f(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y=0 \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \text{ó}\ y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{r+s}, & x=p/r,\ y=q/s\in\mathbb{Q},\ \textit{irreducibles;}\ r,s\in\mathbb{N}\setminus\{0\}; \\ & p,q\in\mathbb{N},\ \textit{no simultáneamente nulos.} \end{cases}
$$

Nótese que f es acotada sobre I: $0\leq f(x,y)\leq 1$ $((x,y)\in I)$. El conjunto de discontinuidades de f en I es

$$
D=\{(x,y)\in I: f(x,y)>0\}=\left(I\cap\mathbb{Q}^2\right)\setminus\{(0,0)\}. \tag{2}
$$

Aunque D no tiene contenido nulo, f es integrable sobre I.

RESOLUCIÓN. En primer lugar estableceremos (2). Se tiene, en efecto:

- Si $f(x_0,y_0)>0$ y f es continua en (x_0,y_0), entonces existe un entorno U de (x_0,y_0) tal que $f(x,y)>0$ $((x,y)\in U\cap I)$. Pero $U\cap(I\setminus\mathbb{Q}^2)\neq\emptyset$, así que $U\cap I$ contiene puntos (x,y) tales que $f(x,y)=0$. Por consiguiente, f no es continua en (x_0,y_0).

- Supongamos ahora que $f(x_0,y_0)=0$. Dado $\varepsilon>0$, elegimos $h>0$ tal que $1/h<\varepsilon$. Sea A_h el conjunto de los puntos $(x,y)\in I$ tales que $x=p/r,\ y=q/s\in\mathbb{Q}$ son irreducibles, con $p,q\in\mathbb{N}$ y $r,s\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $0<r+s\leq h$. Ya que A_h es finito, existe un entorno U de (x_0,y_0) que no contiene puntos de A_h.

  Fijemos $(x,y)\in U\cap I$. Si $f(x,y)=0$, entonces $|f(x_0,y_0)-f(x,y)|=0<\varepsilon$; y si $f(x,y)>0$, entonces, para ciertos $r,s\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, se cumple que

$$
|f(x_0,y_0)-f(x,y)|=\frac{1}{r+s}<\frac{1}{h}<\varepsilon.
$$

Hemos probado que dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno U de (x_0, y_0) tal que $(x, y) \in U \cap I$ implica

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Esto significa que f es continua en (x_0, y_0).

Para ver que D no tiene contenido nulo, supongamos que dado $0 < \varepsilon < 1$ existen rectángulos cerrados $F_1, \ldots, F_n$ tales que $D \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$ y $\sum_{i=1}^n |F_i| < \varepsilon$. Ya que $D = (I \cap \mathbb{Q}^2) \setminus \{(0,0)\}$ es denso en I, se tiene

$$I = \overline{D} \subset \bigcup_{i=1}^n F_i,$$

lo que conduce a la contradicción

$$1 = |I| \leq \sum_{i=1}^n |F_i| < \varepsilon.$$

Finalmente, demostraremos que f es integrable en I, y para ello recurriremos al criterio de la Proposición 3.6 (iii). Dado $\varepsilon > 0$, sea $h > 2/\varepsilon$. El correspondiente A_h es finito; supongamos que contiene m puntos. En cada uno de ellos centramos cuadrados abiertos disjuntos I_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq m)$ de arista menor que $\sqrt{\varepsilon/2m}$, y usamos los vértices de estos cuadrados para generar una partición P de I. En P distinguimos los subrectángulos J_j $(j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq r)$, contenidos en algún I_i, y los subrectángulos K_k $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq s)$, disjuntos de todos los I_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq m)$. Entonces

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{j=1}^r \sup\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in J_j\}|J_j| + \sum_{k=1}^s \sup\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in K_k\}|K_k| \\ &< \sum_{j=1}^r |J_j| + \frac{1}{h}\sum_{k=1}^s |K_k| < \sum_{i=1}^m |I_i| + \frac{\varepsilon}{2}|I| < m\frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

probando que f es integrable en I. □

4.2. Conjuntos de medida nula

Hemos visto en la sección anterior que la condición de que el conjunto de discontinuidades de una función tenga contenido nulo es suficiente, pero no necesaria, para garantizar su integrabilidad Riemann. La caracterización de la clase de las funciones integrables Riemann precisa de un concepto más restrictivo que el contenido nulo: la *medida nula*.

Definición 4.7. *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es de* medida nula *si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de rectángulos abiertos tales que*

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon,$$

donde, como habitualmente, $|I_n|$ denota el área de I_n $(n \in \mathbb{N})$.

Proposición 4.8. *Tienen medida nula:*

(i) *Los subconjuntos de conjuntos de medida nula.*

(ii) *Las uniones numerables de conjuntos de medida nula.*

(iii) *Los conjuntos de contenido nulo.*

(iv) *Los conjuntos numerables.*

Además, todo conjunto compacto de medida nula tiene contenido nulo.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de la Definición 4.7. □

Observación 4.9. *En la Definición 4.7 es posible reemplazar los rectángulos abiertos por rectángulos cerrados (compárese con la Observación 4.4).*

4.3. Oscilación de una función en un punto

Si f es acotada en $A \subset \mathbb{R}^2$ y $\overline{a} \in A$, se define

$$\omega(f,\overline{a};\rho) = \sup\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in A \cap U(\overline{a};\rho)\} - \inf\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in A \cap U(\overline{a};\rho)\} \qquad (\rho > 0),$$

donde $U(\overline{a};\rho)$ denota la bola abierta de centro $\overline{a}$ y radio ρ.

Definición 4.10. *La* oscilación de f en $\overline{a}$ *es*

$$\omega(f,\overline{a}) = \lim_{\rho \to 0+} \omega(f,\overline{a};\rho).$$

Nótese que el límite anterior existe, ya que la función

$$\begin{array}{rccc} \omega(f,\overline{a};\cdot): &]0,\infty[& \to & [0,\infty[\\ & \rho & \mapsto & \omega(f,\overline{a};\rho) \end{array}$$

es creciente y acotada.

Proposición 4.11. *Una función f real y acotada en un conjunto $A\subset\mathbb{R}^2$ es continua en $\overline{a}\in A$ si, y sólo si, $\omega(f,\overline{a})=0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continua en $\overline{a}$ entonces para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $\overline{x}\in A\cap U(\overline{a};\delta)$ implica $|f(\overline{x})-f(\overline{a})|<\varepsilon/2$, esto es: $f(\overline{a})-\varepsilon/2\le f(\overline{x})\le f(\overline{a})+\varepsilon/2$. Luego,

$$m_\delta=m_\delta(f)=\inf\{f(\overline{x}):\overline{x}\in A\cap U(\overline{a};\delta)\}, \qquad M_\delta=M_\delta(f)=\sup\{f(\overline{x}):\overline{x}\in A\cap U(\overline{a};\delta)\}$$

satisfacen

$$f(\overline{a})-\frac{\varepsilon}{2}\le m_\delta\le M_\delta\le f(\overline{a})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí,

$$\omega(f,\overline{a};\delta)=M_\delta-m_\delta\le\left[f(\overline{a})+\frac{\varepsilon}{2}\right]-\left[f(\overline{a})-\frac{\varepsilon}{2}\right]=\varepsilon.$$

Cuando $0<\rho\le\delta$, se cumple $\omega(f,\overline{a};\rho)\le\omega(f,\overline{a};\delta)<\varepsilon$. Hemos probado que

$$\omega(f,\overline{a})=\lim_{\rho\to0+}\omega(f,\overline{a};\rho)=0.$$

Recíprocamente, supongamos que $\omega(f,\overline{a})=0$, de modo que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que, en la notación anterior, $M_\delta-m_\delta<\varepsilon$. Para cada $\overline{x}\in A\cap U(\overline{a};\delta)$ se tiene $m_\delta\le f(\overline{x})\le M_\delta$; en particular, $m_\delta\le f(\overline{a})\le M_\delta$, y concluimos:

$$|f(\overline{x})-f(\overline{a})|<M_\delta-m_\delta<\varepsilon.$$

Así pues, f es continua en $\overline{a}$. □

4.4. Caracterización de Lebesgue de la integrabilidad Riemann

Nuestro objetivo ahora es probar que una función real f definida y acotada en el rectángulo Q es integrable sobre Q si, y sólo si, el conjunto de las discontinuidades de f en Q tiene medida nula.

A tal fin necesitamos establecer previamente dos resultados auxiliares.

Lema 4.12. *Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sea f una función real, definida y acotada en Q. Para cada $\delta > 0$, el conjunto $C_\delta = \{\overline{x} \in Q : \omega(f,\overline{x}) \geq \delta\}$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Hemos de probar que C_δ es cerrado y acotado.

Como $C_\delta \subset Q$, C_δ es acotado. Veamos que es cerrado, y para ello que contiene a todos sus puntos adherentes.

Sea $\overline{a} \in \overline{C}_\delta$. Para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $U(\overline{a};\varepsilon) \cap C_\delta \neq \emptyset$. Si $\overline{x} \in U(\overline{a};\varepsilon) \cap C_\delta$ y elegimos $\rho > 0$ suficientemente pequeño, se cumple que $U(\overline{x};\rho) \subset U(\overline{a};\varepsilon)$ y $\omega(f,\overline{x};\rho) \geq \delta$. Sigue que $\delta \leq \omega(f,\overline{x};\rho) \leq \omega(f,\overline{a};\varepsilon)$, y de aquí, $\delta \leq \omega(f,\overline{a};\varepsilon)$. La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ permite concluir que $\delta \leq \omega(f,\overline{a})$, por lo que $\overline{a} \in C_\delta$. □

Lema 4.13. *Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sea f una función real, definida y acotada en Q. Si $\omega(f,\overline{x}) < \delta$ para todo $\overline{x} \in Q$, entonces alguna partición P de Q satisface $U(f,P) - L(f,P) < \delta|Q|$.*

DEMOSTRACIÓN. Existe una partición P de Q tal que la oscilación de f en cada subrectángulo de P no supera a δ. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n la partición diádica de orden n de Q (esto es, P_n se obtiene dividiendo los lados de Q en 2^n partes iguales). Afirmamos que el resultado se ha de verificar para alguna de estas particiones y, equivalentemente, estableceremos el contrarrecíproco de esta afirmación. Con este objeto, supongamos que cada partición P_n contiene un subrectángulo I_n tal que

$$\sup\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in I_n\} - \inf\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in I_n\} \geq \delta \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Si $\overline{x}_n$ es el centro de I_n $(n \in \mathbb{N})$ entonces $\{\overline{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente a un cierto límite $\overline{a} \in Q$. Cualquiera que sea $\rho > 0$, $Q \cap U(\overline{a};\rho)$ contendrá algún I_N; se infiere que

$$\omega(f,\overline{a};\rho) \geq \sup\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in I_N\} - \inf\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in I_N\} \geq \delta.$$

Consecuentemente, $\omega(f,\overline{a};\rho) \geq \delta$ $(\rho > 0)$, obligando a que $\omega(f,\overline{a}) \geq \delta$, una contradicción.

Ahora, si $\{Q_k\}_{k=1}^{m}$ son los subrectángulos de P, y si

$$m_k(f) = \inf\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in Q_k\}, \quad M_k(f) = \sup\{f(\overline{x}) : \overline{x} \in Q_k\} \qquad (k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq m),$$

encontramos que

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k=1}^{m}[M_k(f)-m_k(f)]|Q_k|<\delta\sum_{k=1}^{m}|Q_k|=\delta|Q|,$$

como se afirmaba. $\square$

Quedamos ya en disposición de obtener el resultado principal.

Teorema 4.14 (Lebesgue)**.** *Sea $f:Q\to\mathbb{R}$ una función acotada en el rectángulo Q. Se verifica que f es integrable en Q si, y sólo si, el conjunto de discontinuidades de f en Q tiene medida nula.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es integrable sobre Q. Necesitamos probar que el conjunto C de las discontinuidades de f en Q tiene medida nula.

Usamos la Proposición 4.11 para escribir:

$$C=\{\bar{x}\in Q:\omega(f,\bar{x})>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\bar{x}\in Q:\omega(f,\bar{x})\geq\frac{1}{n}\right\}.$$

Puesto que todo conjunto de contenido nulo tiene medida nula y la unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula, bastará probar que

$$C_{1/n}=\left\{\bar{x}\in Q:\omega(f,\bar{x})\geq\frac{1}{n}\right\}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

tiene contenido nulo. Más en general, estableceremos que si $\delta>0$, el conjunto

$$C_\delta=\{\bar{x}\in Q:\omega(f,\bar{x})\geq\delta\}$$

tiene contenido nulo, esto es: para cada $\varepsilon>0$, existen rectángulos abiertos $\{I_i\}_{i=i}^{n}$ tales que $C_\delta\subset\bigcup_{i=1}^{n}I_i$, con $\sum_{i=1}^{n}|I_i|<\varepsilon$.

Dado $\varepsilon>0$, la integrabilidad de f y la Proposición 3.6 (iii) proporcionan una partición P de Q tales que $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon\delta/2$. Llamamos $J_1,\ldots,J_m$ a los subrectángulos de P que contienen puntos de C_δ, y $K_1,\ldots,K_r$ a los restantes. Entonces $\sum_{j=1}^{m}|J_j|<\varepsilon/2$:

$$\delta\sum_{j=1}^{m}|J_j|<\sum_{j=1}^{m}[M_j(f)-m_j(f)]\,|J_j|\leq U(f,P)-L(f,P)<\frac{\varepsilon\delta}{2},$$

donde

$$m_j(f) = \text{ínf}\left\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in J_j\right\}, \quad M_j(f) = \sup\left\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in J_j\right\} \qquad (j \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le m).$$

Como las fronteras de $K_1, \ldots, K_r$ tienen contenido nulo, existe un recubrimiento de dichas fronteras por rectángulos abiertos $Q_1, \ldots, Q_s$ tales que la suma de sus áreas es menor que $\varepsilon/2$. Ahora $\{J_1, \ldots, J_m, Q_1, \ldots, Q_s\}$ constituye un recubrimiento de C_δ por rectángulos abiertos, la suma de cuyas áreas es menor que ε. Se concluye que C_δ tiene contenido nulo.

Recíprocamente, supongamos que el conjunto C de las discontinuidades de f en Q tiene medida nula. Probaremos que f es integrable, esto es, que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de Q tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ (Proposición 3.6 (iii)).

Sea M una cota de f en Q, y dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon/(2M + |Q|)$. Como $C_\delta = \{\bar{x} \in Q : \omega(f,\bar{x}) \ge \delta\} \subset C$ y C tiene medida nula, lo mismo ocurre con C_δ, que es compacto (Lema 4.12). Sigue que C_δ tiene contenido nulo (Proposición 4.8), y por lo tanto existe un recubrimiento de C_δ por rectángulos abiertos $\{I_i\}_{i=1}^m$, la suma de cuyas áreas es menor que δ.

Usamos los vértices de los rectángulos I_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m)$ para generar una partición de Q. Sean $J_1, \ldots, J_r$ los subrectángulos de esta partición completamente contenidos en algún I_i, y $K_1, \ldots, K_s$ los que son disjuntos de todos los I_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m)$. En virtud del Lema 4.13, para cada $k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le s$, existe una partición P_k de $\overline{K}_k$ tal que $U(f,P_k) - L(f,P_k) < \delta|K_k|$. Tomando $P = P_1 \cup \ldots \cup P_s$ encontramos que

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\le \sum_{j=1}^{r} [\sup\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in J_j\} - \text{ínf}\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in J_j\}]\,|J_j| + \sum_{k=1}^{s} [U(f,P_k) - L(f,P_k)] \\ &\le 2M \sum_{i=1}^{m} |I_i| + \delta \sum_{k=1}^{s} |K_k| < 2M\delta + \delta|Q| = \delta(2M + |Q|) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 4.15. *Sean $f : Q \to \mathbb{R}$, $g : Q \to \mathbb{R}$ funciones acotadas en el rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$. Se cumple:*

(i) Si las funciones f y g tienen los mismos puntos de discontinuidad entonces una de ellas es integrable si, y sólo si, la otra lo es.

(ii) Si $f = g$ excepto en un conjunto de medida nula, entonces f es integrable si, y sólo si, lo es g.

Cuando, además, f, g son integrables sobre Q, se verifica:

(iii) Si J es un subrectángulo cerrado de Q, entonces f es integrable en J.

(iv) *Las funciones* fg *y* $\lambda f + \mu g$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ *son integrables en* Q*.*

(v) *Si* $g(\bar{x}) \geq k$ $(\bar{x} \in Q)$ *para cierto* $k > 0$*, entonces* f/g *es integrable en* Q*.*

(vi) *Si* m*,* M *denotan, respectivamente, el ínfimo y el supremo de* f *en* Q*, y si* $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces* $\varphi \circ f : Q \to \mathbb{R}$ *es integrable.*

(vii) *La función* $|f|$ *es integrable sobre* Q*, con*

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|.$$

DEMOSTRACIÓN. En lo que sigue, el conjunto de discontinuidades de una función h en su dominio de definición será denotado $D(h)$.

El aserto (i) es una consecuencia obvia del teorema de Lebesgue.

Supongamos ahora que el conjunto $E = \{\bar{x} \in Q : f(\bar{x}) \neq g(\bar{x})\}$ tiene medida nula. Entonces:

$$D(f) = [D(f) \cap E] \cup [D(f) \setminus E], \qquad D(g) = [D(g) \cap E] \cup [D(g) \setminus E].$$

Como $D(f) \cap E$ y $D(g) \cap E$ son subconjuntos de E, ambos tienen medida nula. Si f es integrable entonces $D(f)$ tiene medida nula, y lo mismo cabe afirmar de su subconjunto $D(f) \setminus E = D(g) \setminus E$; de modo que $D(g)$ tiene medida nula, y g es integrable. Recíprocamente, si g es integrable entonces el mismo argumento, intercambiando los papeles de f y g, prueba que f es integrable. Esto establece (ii).

Para probar la integrabilidad en (iii)-(vi) basta combinar el teorema de Lebesgue con el hecho de que todo subconjunto de un conjunto de medida nula es de medida nula, teniendo en cuenta las siguientes observaciones específicas:

$$D(\lambda f + \mu g) \subset D(f) \cup D(g), \qquad D(fg) \subset D(f) \cup D(g),$$

$$D(f/g) \subset D(f) \cup D(g), \qquad D(\varphi \circ f) \subset D(f).$$

La integrabilidad en (vii) sigue de (vi) tomando $\varphi(t) = |t|$ $(t \in \mathbb{R})$, en tanto que la segunda parte de (vii) es elemental. □

5. Teoremas de la media en rectángulos

Teorema 5.1 (Primer teorema de la media en rectángulos)**.** *Sea f una función real, definida y acotada en el rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$.*

(i) Si f es integrable Riemann en Q, y si $m \leq f(\bar{x}) \leq M$ $(\bar{x} \in Q)$, entonces existe $h \in [m,M]$ tal que

$$\iint_Q f = h|Q|.$$

(ii) Si f es continua en Q, entonces existe $\overline{\xi} \in Q$ tal que

$$\iint_Q f = f(\overline{\xi})|Q|.$$

DEMOSTRACIÓN.

(i) Ya que $m \leq f(\bar{x}) \leq M$ $(\bar{x} \in Q)$, se tiene:

$$m|Q| \leq \iint_Q f \leq M|Q|.$$

Por tanto

$$m \leq \frac{1}{|Q|} \iint_Q f \leq M,$$

y es suficiente tomar

$$h = \frac{1}{|Q|} \iint_Q f.$$

(ii) Como f es continua en Q, f alcanza su mínimo m y su máximo M en Q. El apartado (i) proporciona $h \in [m,M]$ tal que

$$\iint_Q f = h|Q|.$$

Nuevamente por continuidad, existe $\overline{\xi} \in Q$ tal que $f(\overline{\xi}) = h$. $\square$

Teorema 5.2 (Segundo teorema de la media en rectángulos)**.** *Sean f, g funciones reales acotadas sobre el rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$.*

(i) Si f, g son integrables Riemann en Q, con $m \leq f(\bar{x}) \leq M$ $(\bar{x} \in Q)$ y g no negativa en Q, entonces existe

$h \in [m, M]$ tal que

$$\iint_Q fg = h \iint_Q g. \tag{3}$$

(ii) Si f es continua en Q y g es integrable Riemann y no negativa en Q, entonces existe $\overline{\xi} \in Q$ tal que

$$\iint_Q fg = f(\overline{\xi}) \iint_Q g.$$

DEMOSTRACIÓN.

(i) Ya que $m \le f(\overline{x}) \le M$ y $g(\overline{x}) \ge 0$ $(\overline{x} \in Q)$, se tiene:

$$mg(\overline{x}) \le f(\overline{x})g(\overline{x}) \le Mg(\overline{x}) \qquad (\overline{x} \in Q).$$

Luego,

$$m \iint_Q g \le \iint_Q fg \le M \iint_Q g. \tag{4}$$

Si $\iint_Q g = 0$ sigue de (4) que $\iint_Q fg = 0$, y la igualdad (3) vale para cualquier $h \in [m, M]$.

Si $\iint_Q g > 0$ y dividimos por $\iint_Q g$ ambos miembros de (4), resulta

$$m \le \frac{1}{\iint_Q g} \iint_Q fg \le M;$$

basta tomar

$$h = \frac{1}{\iint_Q g} \iint_Q fg$$

para obtener (3).

(ii) Como f es continua en Q, alcanza su mínimo m y su máximo M en Q. El apartado (i) proporciona $h \in [m, M]$ tal que

$$\iint_Q fg = h \iint_Q g.$$

Nuevamente por continuidad, existe $\overline{\xi} \in Q$ satisfaciendo $f(\overline{\xi}) = h$. □