La integral doble sobre recintos no rectangulares

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción **1**

2. Conjuntos de tipos I y II **2**

3. Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes **5**

3.1. Cálculo de áreas 5

3.2. Cálculo de volúmenes 6

4. Conjuntos medibles Jordan **8**

1. Introducción

Habiendo estudiado la teoría de la integral de Riemann sobre rectángulos del plano, nuestro propósito ahora es extenderla a otros recintos más generales. En primer lugar consideraremos regiones proyectables sobre los ejes coordenados (*conjuntos de tipo I y de tipo II*), para luego ocuparnos del caso más general, los *conjuntos medibles Jordan*.

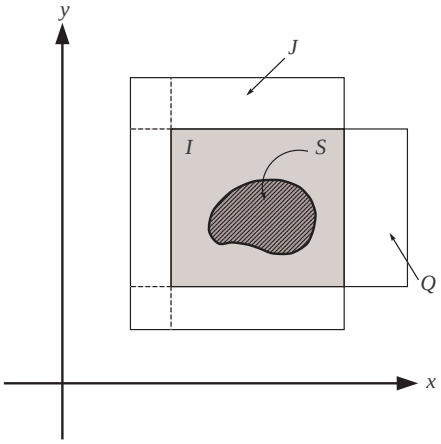

Figura 1. Definición de la integral sobre conjuntos más generales.

Sea f una función definida y acotada sobre un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^2$. Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ que contiene a S. Definimos una extensión $\widetilde{f}$ de f a Q por:

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \in Q \setminus S. \end{cases} \tag{1}$$

Definición 1.1. *Diremos que f es integrable en S si $\widetilde{f}$ es integrable en Q, y en tal caso definimos*

$$\iint_S f = \iint_Q \widetilde{f}.$$

Esta definición es consistente, ya que no depende del rectángulo Q que contenga a S. En efecto, supongamos que J es otro rectángulo en $\mathbb{R}^2$ que contiene a S. Entonces $I = Q \cap J$ es un rectángulo cuyos vértices determinan particiones de Q y de J en subrectángulos Q_i $(i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le n)$ y J_j $(j \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le m)$, respecti-

vamente, donde $S \subset Q_0 = J_0 = I$ (Figura 1). Si denotamos

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \in J \setminus S \end{cases}$$

y tenemos en cuenta que $\widetilde{f}$ y $\widehat{f}$ son nulas fuera de I y coinciden sobre I, encontramos que

$$\iint_Q \widetilde{f} = \iint_I \widetilde{f} = \iint_I \widehat{f} = \iint_J \widehat{f},$$

lo cual demuestra nuestra afirmación inicial.

En este nuevo contexto también utilizaremos indistintamente las notaciones $\iint_S f$ y $\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$.

2. Conjuntos de tipos I y II

Ahora centraremos nuestra atención en conjuntos S particulares, los conjuntos de tipo I y de tipo II.

Definición 2.1. *Diremos que un conjunto S es* de tipo I, OX-proyectable *o* verticalmente simple *si es de la forma*

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ x \in [a,b]\right\},$$

siendo φ_1 y φ_2 funciones continuas en $[a,b]$ tales que $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ $(x \in [a,b])$.

Similarmente, diremos que un conjunto T es de tipo II, OY-proyectable *u* horizontalmente simple *si es de la forma*

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ y \in [c,d]\right\},$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en $[c,d]$ tales que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ $(y \in [c,d])$.

En la Figura 2 puede verse una ilustración de ambos tipos de recintos.

Nuestro objetivo inmediato es probar que si una función f está definida y acotada en un conjunto S de tipo I y es continua en su interior, entonces f es integrable sobre S y su integral doble sobre S se puede escribir como una integral iterada en el orden $dy\,dx$. Similarmente, si f está definida y acotada en un recinto T de tipo II y es continua en su interior, entonces f es integrable sobre T y su integral doble sobre T se puede escribir como una integral iterada en el orden $dx\,dy$. En caso de que f esté definida y acotada en un conjunto que es simultáneamente de tipos I y II y sea continua en el interior de ese conjunto, entonces f es integrable sobre él y su integral doble se puede computar como una integral iterada en cualquier orden.

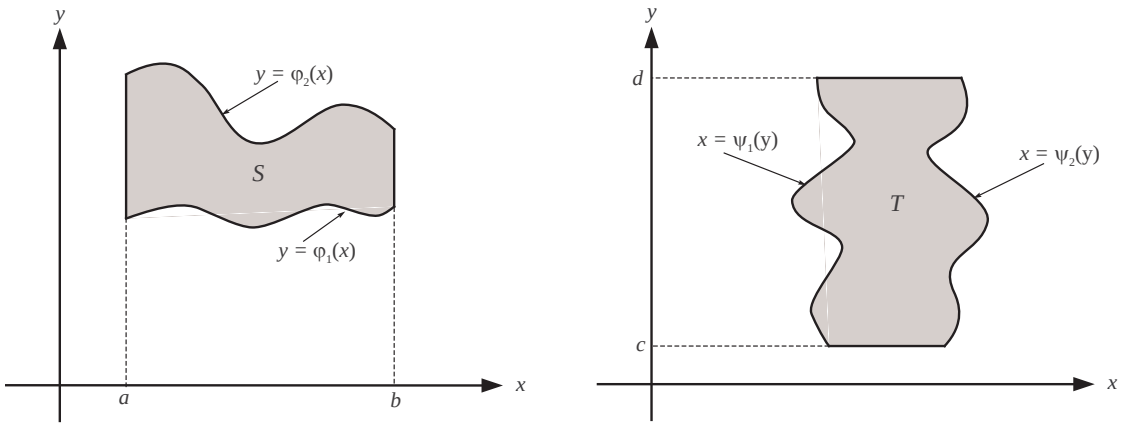

Figura 2. Conjuntos de tipo I (i) y tipo II.

Centraremos nuestra atención en el estudio de la integrabilidad sobre regiones de tipo I, ya que el correspondiente a las regiones de tipo II admite un tratamiento análogo.

Si f está definida y acotada en una región S de tipo I, incluimos f en un rectángulo Q y definimos $\widetilde{f}$ en Q como en (1). Las discontinuidades de $\widetilde{f}$ en Q serán las que f tenga en S y además aquellos puntos de ∂S donde f no es cero. Pretendemos probar que ∂S tiene contenido nulo, y a tal fin bastará con demostrar la siguiente:

Proposición 2.2. *La gráfica de una función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es un conjunto de contenido nulo en $\mathbb{R}^2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ y = \varphi(x)\right\}$ la gráfica de φ. Como φ es uniformemente continua en $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que la diferencia entre el supremo y el ínfimo de φ en cada uno de los subintervalos determinados por P no excede $\varepsilon/(b-a)$ (Figura 3). Si F_i denota el rectángulo $F_i = [x_{i-1}, x_i] \times [\varphi(x_{i-1}), \varphi(x_i)]$ $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le n)$, entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$ y

$$\sum_{i=1}^n |F_i| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Por consiguiente, A tiene contenido nulo. □

Teorema 2.3. *Sea S una región de tipo I, comprendida entre las gráficas de las funciones continuas φ_1 y φ_2, con $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ $(x \in [a,b])$. Si f está definida y acotada en S y es continua en su interior, entonces existe $\iint_S f$ y*

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

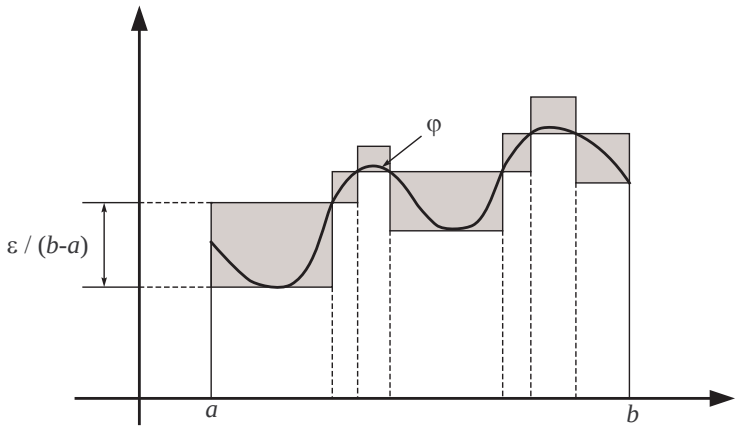

Figura 3. El grafo de una función continua tiene contenido nulo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo que contiene a S, y sea $\widetilde{f}$ la extensión de f a Q que se anula en $Q \setminus S$. Los únicos puntos de discontinuidad posibles de $\widetilde{f}$ en Q son los de ∂S y, ya que ∂S tiene contenido nulo, encontramos que $\widetilde{f}$ es integrable sobre Q. Luego, está definida $\iint_S f = \iint_Q \widetilde{f}$.

Observemos ahora que para cada $x \in]a,b[$ existe

$$A(x) = \int_c^d \widetilde{f}(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

puesto que $\widetilde{f}(x,\cdot)$ tiene a lo sumo dos discontinuidades en $[c,d]$ y se anula fuera de $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$. Además, si M es una cota de f entonces $A(x)$ es continua y está acotada por $M(d-c)$ en $]a,b[$. Para establecer la afirmación de continuidad, fijemos $x \in]a,b[$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ implica $|f(x+h,y) - f(x,y)| < \varepsilon/3(d-c)$ y $|\varphi_i(x+h) - \varphi_i(x)| < \varepsilon/3M$ $(i = 1,2)$, y escribamos

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_{\varphi_1(x+h)}^{\varphi_2(x+h)} f(x+h,y)\,dy - \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{\varphi_1(x+h)}^{\varphi_2(x+h)} [f(x+h,y) - f(x,y)]\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+h)} f(x,y)\,dy - \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x+h)} f(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |A(x+h) - A(x)| &\leq \int_{\varphi_1(x+h)}^{\varphi_2(x+h)} |f(x+h,y) - f(x,y)|\,dy + \left| \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+h)} f(x,y)\,dy \right| + \left| \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x+h)} f(x,y)\,dy \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(d-c)}(d-c) + 2M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Redefiniendo ahora $A(x)$ en $x=a$ y $x=b$ para hacerla continua en $[a,b]$, cabe aplicar el teorema de Fubini para rectángulos y concluir que

$$\iint_S f = \iint_Q \widetilde{f} = \int_a^b dx \int_c^d \widetilde{f}(x,y)\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy,$$

como se afirmaba. □

3. Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes

Nuevamente, consideraremos sólo regiones de tipo I. Sea

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ x \in [a,b]\right\},$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[a,b]$ tales que $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ $(x \in [a,b])$.

3.1. Cálculo de áreas

Si $f(x,y) = 1$ $((x,y) \in S)$ en el Teorema 2.3, obtenemos:

$$\iint_S dx\, dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx.$$

La interpretación geométrica de la integral simple muestra que $\iint_S dx\, dy$ es el área de S.

Ejemplo 3.1. *Calcular el área del recinto D limitado por $y = x$ e $y = x^2$.*

RESOLUCIÓN. Como acabamos de ver, el área viene dada por la integral doble extendida a D de la función idénticamente 1. El recinto de integración D (Figura 4) es simultáneamente de tipos I y II. Por tanto, podemos calcular el área como una integral iterada en cualquier orden.

Nótese que $y = x$ e $y = x^2$ se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

- Si consideramos D como un recinto de tipo I (orden $dy\, dx$): $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$ $(0 \le x \le 1)$. Por tanto,

$$\iint_D dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

- Si consideramos D como un recinto de tipo II (orden $dx\,dy$): $\psi_1(y) = y$, $\psi_2(y) = \sqrt{y}$ $(0 \le y \le 1)$. Por tanto,
$$\iint_D dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx = \int_0^1 (\sqrt{y} - y)\,dy = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Como cabía esperar, hemos obtenido el mismo resultado independientemente del orden de integración. □

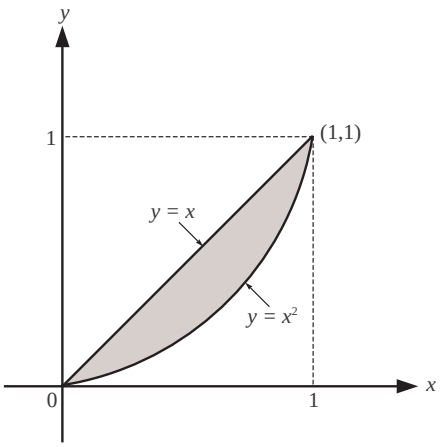

Figura 4. Recinto de integración del Ejemplo 3.1.

3.2. Cálculo de volúmenes

Si $f(x,y) \ge 0$ $((x,y) \in S)$, el conjunto

$$\mathscr{O}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le f(x,y)\ \ ((x,y) \in S)\right\}$$

se denomina *conjunto de ordenadas de* f. Bajo las hipótesis del Teorema 2.3, fijado $x = x_0 \in [a,b]$ la integral

$$\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

es el área de la sección producida en el conjunto de ordenadas de f por el plano $x = x_0$, y el Teorema 2.3 prueba entonces que

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

es igual al volumen de $\mathscr{O}(f)$ (Figura 5).

En general, si $f(x,y) \leq g(x,y)$ $((x,y) \in S)$, la integral $\iint_S (g-f)$ proporciona el volumen del sólido encerrado por las gráficas de f y g (argumento «tapa-fondo»).

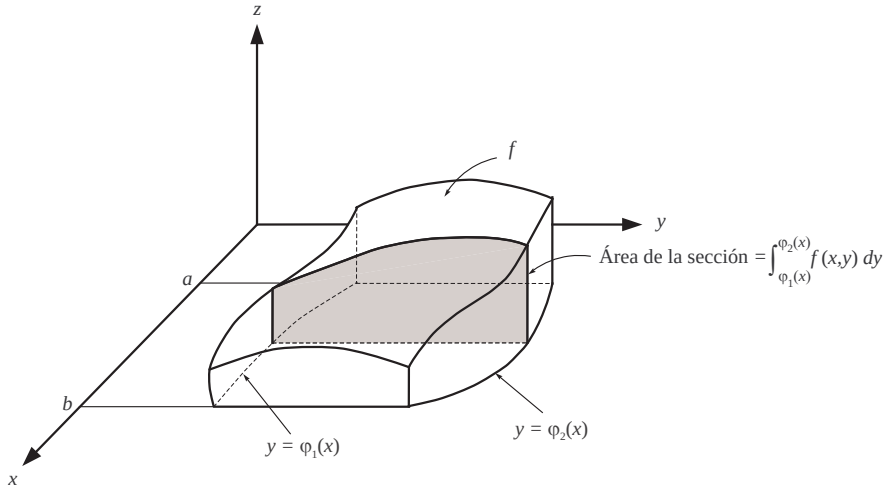

Figura 5. La integral doble como un volumen.

Ejemplo 3.2. *Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.*

RESOLUCIÓN. Dividiendo por 6 los dos miembros de la ecuación $x+2y+3z=6$ vemos que el plano correspondiente determina sobre los ejes coordenados segmentos de longitud 6, 3 y 2, respectivamente. La proyección del plano $x+2y+3z=6$ sobre el plano OXY viene dada por $x+2y=6$, recta que determina sobre los ejes segmentos de longitud 6 y 3. El sólido se halla representado en la Figura 6.

Explicitando z en la ecuación del plano encontramos que

$$z = \frac{6-x-2y}{3}.$$

Por tanto, si S es el recinto del plano OXY limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+2y=6$, resulta

$$\begin{aligned}
V &= \iint_S z\,dx\,dy = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} \frac{6-x-2y}{3}\,dx \\
&= 2\int_0^3 dy \int_0^{6-2y} dx - \frac{1}{3}\int_0^3 dy \int_0^{6-2y} x\,dx - \frac{2}{3}\int_0^3 y\,dy \int_0^{6-2y} dx \\
&= 2\int_0^3 (6-2y)\,dy - \frac{1}{6}\int_0^3 (6-2y)^2\,dy - \frac{2}{3}\int_0^3 (6-2y)y\,dy \\
&= 18-6-6=6,
\end{aligned}$$

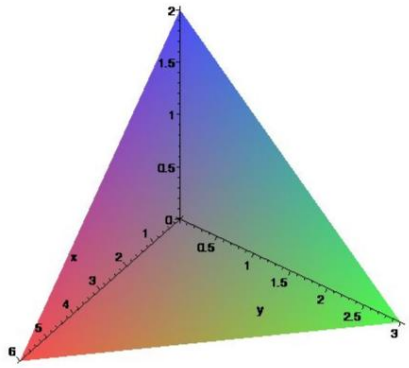

Figura 6. Sólido del Ejemplo 3.2.

donde V es el volumen pedido. □

4. Conjuntos medibles Jordan

Definición 4.1. *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es* medible Jordan *si está acotado y su frontera tiene contenido nulo.*

Ejemplo 4.2. *Las regiones de tipo I y de tipo II son conjuntos medibles Jordan.*

Teorema 4.3 (Lebesgue)**.** *Una función $f : C \to \mathbb{R}$, acotada en un conjunto medible Jordan $C \subset \mathbb{R}^2$, es integrable en C si, y sólo si, el conjunto $D(f)$ de las discontinuidades de f en C tiene medida nula.*

DEMOSTRACIÓN. La función f es integrable en C si existe un rectángulo Q que contiene a C tal que la extensión $\widetilde{f}$ de f a Q dada por (1) es integrable sobre Q. Por el teorema de Lebesgue para rectángulos, esto ocurre si, y sólo si, $D(\widetilde{f})$ (el conjunto de discontinuidades de $\widetilde{f}$ en Q) tiene medida nula. Ahora bien,

$$D(f) \subset D(\widetilde{f}) \subset D(f) \cup \partial C,$$

donde ∂C tiene contenido nulo. Luego, $D(\widetilde{f})$ es de medida nula si, y sólo si, $D(f)$ lo es. □

Teniendo en cuenta el Teorema 4.3 se puede desarrollar (no lo haremos aquí) una teoría de la integración sobre conjuntos medibles Jordan en la que tienen cabida resultados análogos a los que se establecieron anteriormente para rectángulos.