

Cambio de variables

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción	1
2. Cambio de variables	1
2.1. El teorema del cambio de variables en el plano	1
2.2. Interpretación geométrica	2
3. Algunos ejemplos	4
3.1. Transformaciones lineales	4
3.2. Coordenadas polares	6
3.3. Coordenadas cilíndricas	8
3.4. Coordenadas esféricas	9



1. Introducción

En la teoría de las integrales simples, el método de sustitución permite calcular integrales complicadas transformándolas en otras más sencillas que puedan evaluarse fácilmente. Este método se basa en la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t) dt, \quad (1)$$

donde $g(c) = a$ y $g(d) = b$, válida, por ejemplo, si $g \in C^1[c, d]$ y f es continua en el rango $[a, b]$ de g .

Nuestro objetivo ahora es motivar el análogo multidimensional de dicha fórmula e ilustrarlo con algunos ejemplos.

2. Cambio de variables

2.1. El teorema del cambio de variables en el plano

Teorema 2.1 (Cambio de variables). Sean T, S conjuntos medibles Jordan en los planos OUV y OXY , respectivamente. Sea f una función integrable sobre S . Supongamos que las ecuaciones $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$ ($(u, v) \in T$) definen una transformación biyectiva de T en S , con inversa dada por las ecuaciones $u = U(x, y)$, $v = V(x, y)$ ($(x, y) \in S$). Si las aplicaciones X, Y y U, V son de clase C^1 en T y S , respectivamente, y el jacobiano de la transformación:

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

no se anula en T , entonces

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| du dv, \quad (2)$$

donde $|J(u, v)|$ representa el valor absoluto de $J(u, v)$.

El jacobiano $J(u, v)$ desempeña en (2) un papel similar al del factor $g'(t)$ en (1), papel que quedará más claro en la siguiente sección. La fórmula (2) también vale si se permite que la transformación involucrada deje de ser inyectiva, o el jacobiano valga cero, en un conjunto de medida nula.

No discutiremos las condiciones más generales bajo las cuales permanece válido el Teorema 2.1. Tampoco

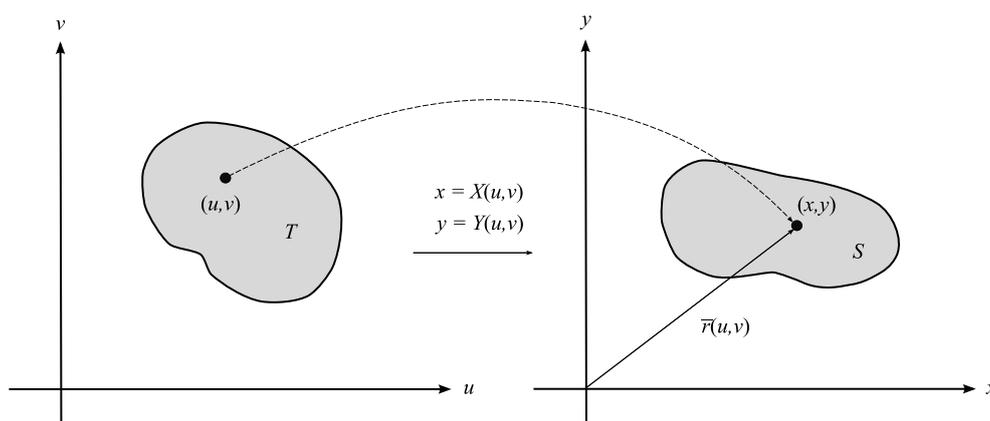


Figura 1. Cambio de variables.

daremos aquí la demostración del propio teorema, pues será obtenida más adelante como consecuencia del teorema de Green; por el momento, nos limitaremos a justificar geoméricamente la fórmula (2).

El Teorema 2.1 tiene una extensión directa al espacio p -dimensional ($p \geq 3$). Ilustraremos su aplicación con algunos ejemplos en dos y tres dimensiones.

2.2. Interpretación geométrica

El radio vector \bar{r} que une el origen con un punto genérico $(x, y) \in S$ es una función vectorial de dos variables definida por

$$\bar{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v)) \quad ((u, v) \in T)$$

(Figura 1). Pongamos

$$\bar{V}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u} \right),$$

$$\bar{V}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v} \right),$$

y consideremos un segmento rectilíneo horizontal en el plano OUV , de modo que v es constante sobre dicho segmento. La función \bar{r} aplica este segmento sobre una curva (llamada *curva u*) en el plano OXY . Si u es un parámetro que representa el tiempo, entonces \bar{V}_1 es el vector velocidad en la posición \bar{r} y es tangente a la curva descrita por el extremo de \bar{r} (Figura 2). Similarmente, \bar{V}_2 representa el vector velocidad de una *curva v* obtenida haciendo u constante. Por cada punto de S pasan una curva u y una curva v .

Consideremos ahora un rectángulo infinitesimal de lados Δu y Δv . En el tiempo Δu , un punto de la curva u se desplaza una distancia aproximadamente igual a $\|\bar{V}_1\| \Delta u$ a lo largo de dicha curva. Análogamente, en el

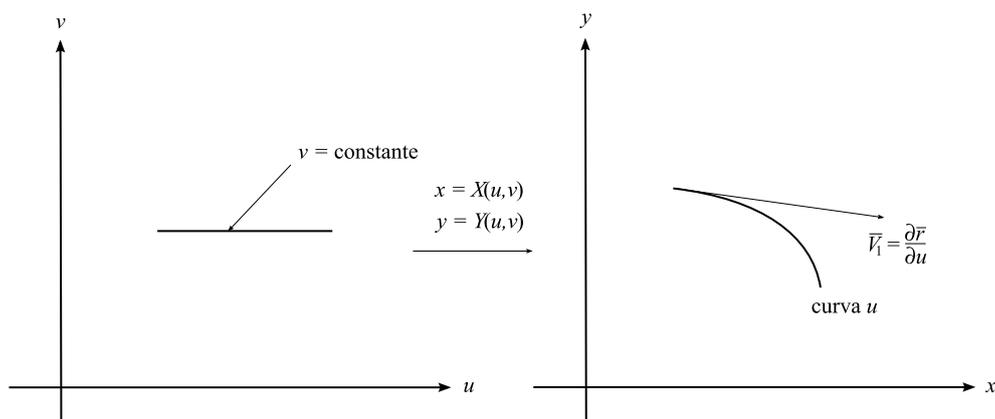


Figura 2. Una curva u y el correspondiente vector velocidad.

tiempo Δv un punto de una curva v recorre sobre la misma una distancia aproximadamente igual a $\|\bar{V}_2\| \Delta v$. La región rectangular de lados Δu y Δv del plano OUV se transforma, de modo aproximado, en un paralelogramo cuyos lados son los vectores $\Delta u \bar{V}_1$, $\Delta v \bar{V}_2$ (Figura 3) y cuya área es es la norma del producto vectorial de ambos:

$$\|(\Delta u \bar{V}_1) \times (\Delta v \bar{V}_2)\| = \|\bar{V}_1 \times \bar{V}_2\| \Delta u \Delta v.$$

Como

$$\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = J(u, v) \bar{k},$$

el área del paralelogramo resulta ser, aproximadamente, $|J(u, v)| \Delta u \Delta v$. Si $J(u, v) = 1$ ($(u, v) \in T$), el paralelogramo imagen tiene la misma área que el rectángulo original, y la aplicación conserva las áreas. En caso contrario, para obtener el área del paralelogramo debemos multiplicar el área del rectángulo por $|J(u, v)|$. Este hecho sugiere contemplar al jacobiano como un «factor de escala» de áreas.

Sean ahora P una partición de un rectángulo R que contiene a T , y Q un subrectángulo de P de lados Δu y Δv . Si Δu y Δv son suficientemente pequeños y f es una función no negativa definida sobre S , la función $f[X(u, v), Y(u, v)]J(u, v)$ es prácticamente constante en dicho subrectángulo, y puede ser considerada como

una función escalonada en R si se le asigna el valor 0 fuera de T . Así,

$$\begin{aligned} \iint_T f[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv &= \iint_R f[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv \\ &= \sum f[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \Delta u \Delta v \\ &\simeq |\mathcal{O}(f)| \\ &= \iint_S f(x,y) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

donde $|\mathcal{O}(f)|$ denota el volumen del conjunto de ordenadas $\mathcal{O}(f)$ de f . Esto justifica (2).

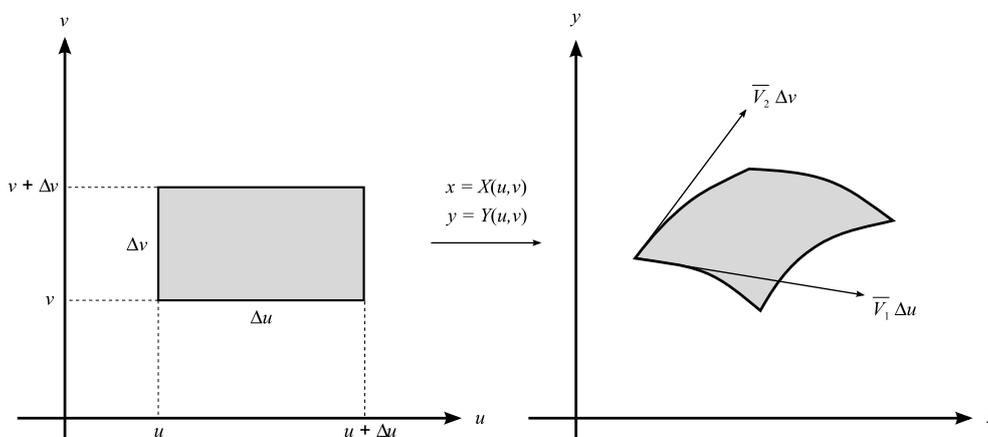


Figura 3. La imagen de un rectángulo infinitesimal en el plano OUV es un paralelogramo curvilíneo en el plano OXY .

Cuando $J(u,v) = 0$, \bar{V}_1 y \bar{V}_2 son paralelos (su producto vectorial es el vector nulo), y el paralelogramo degenera. Los puntos en que esto ocurre se denominan *puntos singulares* de la aplicación. Como se señaló anteriormente, la fórmula del cambio de variables vale si el conjunto de los puntos singulares tiene medida nula; tendremos ocasión de utilizar este hecho en lo que sigue.

3. Algunos ejemplos

3.1. Transformaciones lineales

Una *transformación lineal* en \mathbb{R}^2 es una aplicación definida por un par de ecuaciones de la forma

$$x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv,$$

donde A, B, C, D son constantes. El valor absoluto del jacobiano de esta transformación es

$$|J(u, v)| = |AD - BC|,$$

y para asegurar la existencia de la transformación inversa supondremos $AD - BC \neq 0$.

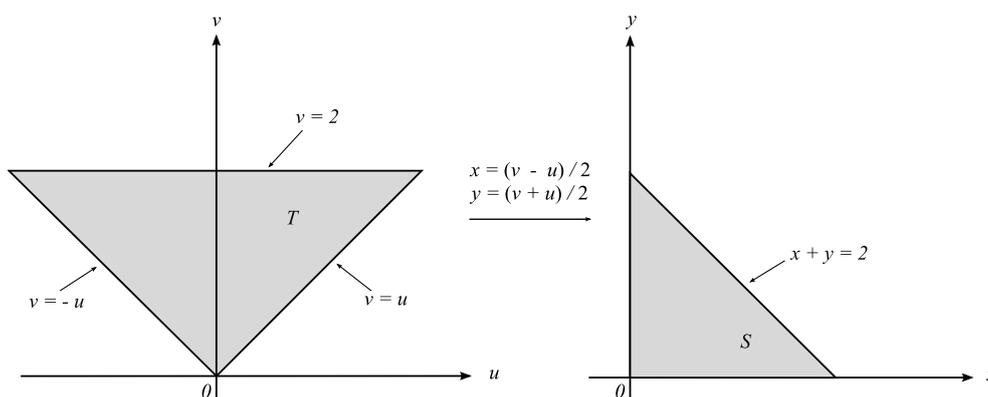


Figura 4. Transformación del Ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.1. Calcular la integral doble

$$\iint_S e^{(y-x)/(y+x)} dx dy,$$

siendo S el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los ejes coordenados.

RESOLUCIÓN. La presencia de $y - x$ e $y + x$ en el integrando sugiere efectuar el cambio de variable

$$u = y - x, \quad v = y + x.$$

Despejando x e y , obtenemos

$$x = \frac{v - u}{2}, \quad y = \frac{v + u}{2}.$$

El jacobiano de esta transformación es $J(u, v) = -1/2$, y por tanto $|J(u, v)| = 1/2$. Para encontrar la imagen T de S en el plano OUV , observamos que las rectas $x = 0$ e $y = 0$ se transforman, respectivamente, en las rectas $u = v$ y $u = -v$, mientras que la recta $x + y = 2$ se transforma en la recta $v = 2$. Los puntos interiores a S satisfacen $0 < x + y < 2$, y se aplican en los puntos de T que verifican $0 < v < 2$. Véase la Figura 4.

Ahora:

$$\iint_S e^{(y-x)/(y+z)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_T e^{u/v} du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\int_{-v}^v e^{u/v} du \right] dv = \frac{1}{2} \int_0^2 v \left(e - \frac{1}{e} \right) dv = e - \frac{1}{e}.$$

Esto resuelve el ejemplo. □

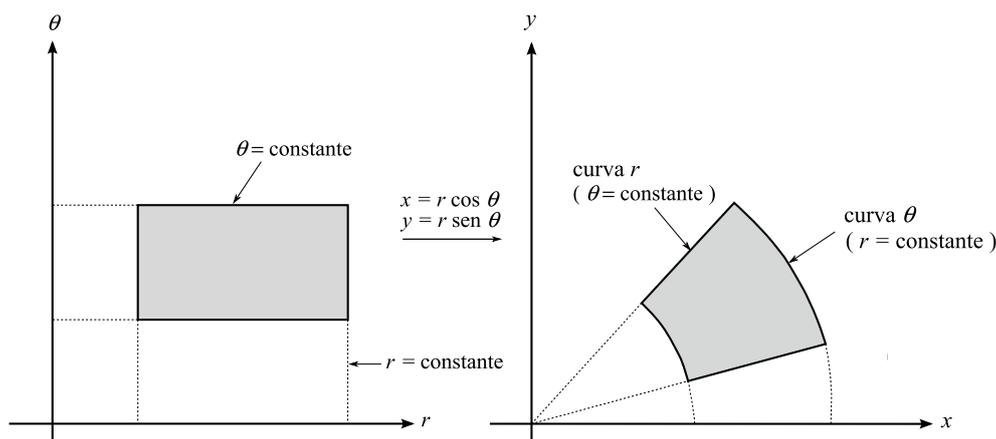


Figura 5. Cambio a coordenadas polares.

3.2. Coordenadas polares

Consideremos el cambio de variables en \mathbb{R}^2 definido mediante las ecuaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Nótese que es costumbre denotar las *coordenadas polares* por r, θ en vez de u, v . El jacobiano de la transformación es $J(r, \theta) = r$, y coincide con su valor absoluto.

En rigor, para que esta aplicación sea inyectiva y con jacobiano distinto de cero necesitamos restringir r a valores estrictamente positivos y θ a intervalos de la forma $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$; pero, tal como mencionamos anteriormente, la validez del Teorema 2.1 no resulta afectada si la aplicación deja de ser inyectiva, o el jacobiano es cero, en conjuntos de medida nula.

Las coordenadas polares tienen una clara interpretación geométrica: fijado un punto (x, y) del plano OXY , r es la distancia de (x, y) al origen de coordenadas, mientras que θ representa el ángulo que forma el radio vector de ese punto con el semieje OX positivo.

El cambio a coordenadas polares es particularmente conveniente cuando el recinto de integración tiene fronteras a lo largo de las cuales r ó θ permanecen constantes (Figura 5).

Ejemplo 3.2. Calcular

$$\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy,$$

siendo D el anillo comprendido entre las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$.

RESOLUCIÓN. Aplicando un cambio a polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $|J| = r$, D queda descrito por las condiciones $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $1 \leq r \leq \sqrt{5}$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{5}} (r^2 \cos^2 \theta + r \operatorname{sen} \theta) r \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_1^{\sqrt{5}} r^3 \, dr + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \int_1^{\sqrt{5}} r^2 \, dr \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

es el valor de la integral que se solicita. □

Ejemplo 3.3. Calcular el volumen encerrado por un octante de esfera de radio $a > 0$.

RESOLUCIÓN. El volumen pedido viene dado por la integral

$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

donde S denota la región del círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$ situada en el primer cuadrante del plano OXY .

Efectuando un cambio a polares,

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy &= \iint_T r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \\ &= -\frac{\pi}{6} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{\pi}{6} a^3. \end{aligned}$$

Este es, por tanto, el volumen que se buscaba. □

Ejemplo 3.4. Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

donde $a, b, c > 0$.

RESOLUCIÓN. Explicitando z en la ecuación del elipsoide encontramos que

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Pongamos

$$f(x, y) = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad g(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

El volumen requerido será:

$$V = \iint_S [g(x, y) - f(x, y)] \, dx \, dy = 2c \iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy.$$

Calculamos esta integral aplicando un cambio de variables a *coordenadas elípticas*, o *polares generalizadas*:

$x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$, con $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, cuyo jacobiano en valor absoluto es abr . Así:

$$V = 2abc \iint_T r \sqrt{1 - r^2} \, dr \, d\theta = 2abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} \, dr = \frac{4}{3} \pi abc,$$

lo que resuelve el ejemplo. □

3.3. Coordenadas cilíndricas

En \mathbb{R}^3 , las *coordenadas cilíndricas* son coordenadas polares en planos OXY situados a altura z . Es decir, consideramos la transformación que aplica (r, θ, z) en (x, y, z) dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Permitimos que $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$ (Figura 6). El jacobiano de esta transformación es $J(r, \theta, z) = r$, que coincide con su valor absoluto. Recuérdese que el teorema del cambio de variables vale si la

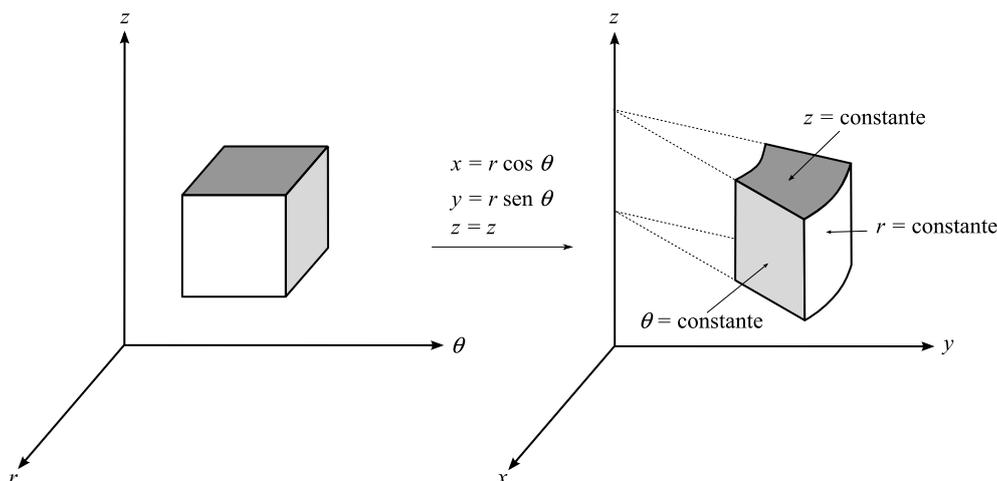


Figura 6. Cambio a coordenadas cilíndricas.

aplicación deja de ser inyectiva y con jacobiano distinto de cero en un conjunto de medida nula.

El cambio a coordenadas cilíndricas está especialmente indicado cuando el recinto y/o el integrando presentan simetría axial.

Ejemplo 3.5. Calcular el volumen del sólido S limitado por el plano OXY , el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

RESOLUCIÓN. El sólido S se representa en la Figura 7. La proyección del cilindro sobre el plano OXY es la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, de centro $(1, 0)$ y radio 1. Efectuamos un cambio a coordenadas cilíndricas y usamos la simetría del recinto respecto al plano $y = 0$ junto con la paridad del integrando para obtener el volumen pedido, que viene dado por la integral

$$V = \iiint_S dx dy dz = \iiint_T r dr d\theta dz = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r dr \int_0^r dz = \frac{16}{3} \left[\sen\theta - \frac{\sen^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{9}.$$

Esto resuelve el ejemplo. □

3.4. Coordenadas esféricas

En \mathbb{R}^3 , el cambio a *coordenadas esféricas* se define por las ecuaciones

$$x = \rho \cos \theta \sen \varphi, \quad y = \rho \sen \theta \sen \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

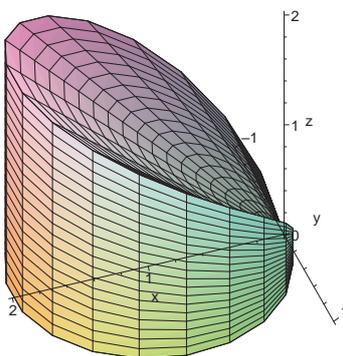


Figura 7. Sólido del Ejemplo 3.5.

El significado geométrico de las variables (ρ, θ, φ) se pone de manifiesto en la Figura 8. Permitimos que $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$. El jacobiano de la transformación es $J(\rho, \theta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi$ y su valor absoluto es $|J(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \sin \varphi$, ya que $\sin \varphi \geq 0$ cuando $0 \leq \varphi \leq \pi$. Recuérdese que el teorema del cambio de variables sigue valiendo si la aplicación es inyectiva y con jacobiano distinto de cero excepto quizá en un conjunto de medida nula.

El cambio a coordenadas esféricas está especialmente indicado cuando el recinto y/o el integrando presentan simetría polar.

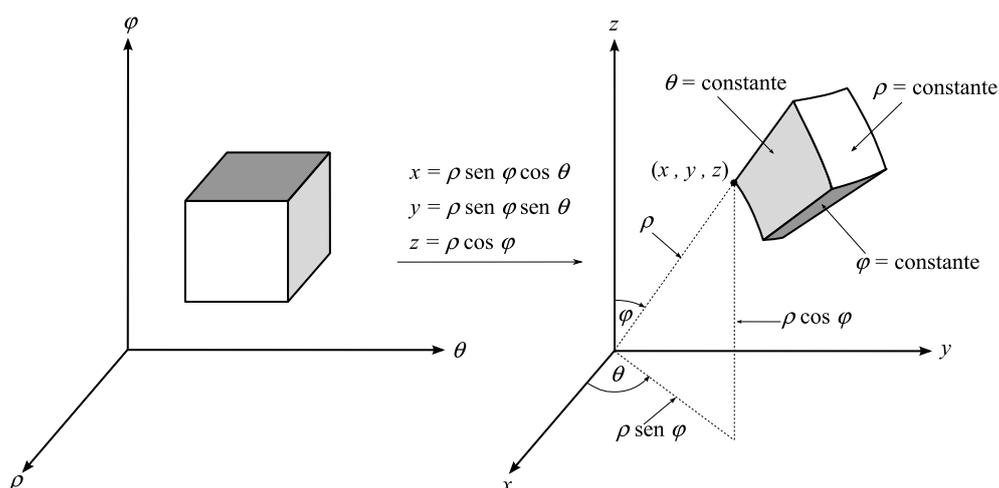


Figura 8. Cambio a coordenadas esféricas.

Ejemplo 3.6. Calcular

$$\iiint_S e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz,$$

siendo S la bola unidad en \mathbb{R}^3 .

RESOLUCIÓN. Obsérvese que no podemos integrar fácilmente esta función usando integrales iteradas. La presencia del término $x^2 + y^2 + z^2$ sugiere un cambio a coordenadas esféricas, con lo cual

$$\begin{aligned} \iiint_S e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz &= \iiint_T \rho^2 e^{\rho^3} \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho = \frac{4\pi}{3} e^{\rho^3} \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3} (e - 1), \end{aligned}$$

quedando resuelto el ejemplo. □

Ejemplo 3.7. Calcular

$$\iiint_D z dx dy dz,$$

donde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 1\}.$$

RESOLUCIÓN. El recinto de integración se representa en la Figura 9. La naturaleza de este recinto sugiere efectuar un cambio a coordenadas esféricas. En la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $z = 1$ se verifica $\varphi = \arcsen \sqrt{3}/2 = \pi/3$. La ecuación del plano $z = 1$ en coordenadas esféricas es $\rho \cos \varphi = 1$. Así pues, para $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ se tiene $0 \leq \rho \leq 1/\cos \varphi$, mientras que si $\pi/3 \leq \varphi \leq \pi$, entonces $0 \leq \rho \leq 2$. Claramente, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} \rho^3 d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/3}^\pi \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi + 8\pi \int_{\pi/3}^\pi \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Big|_0^{\pi/3} + 4\pi \operatorname{sen}^2 \varphi \Big|_{\pi/3}^\pi = -\frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

Por otra parte, la simetría axial del recinto también sugiere realizar, como alternativa, un cambio a coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_D z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-2}^1 z dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r dr = \pi \int_{-2}^1 z(4-z^2) dz = -\frac{\pi}{4} (4-z^2)^2 \Big|_{-2}^1 = -\frac{9\pi}{4}.$$

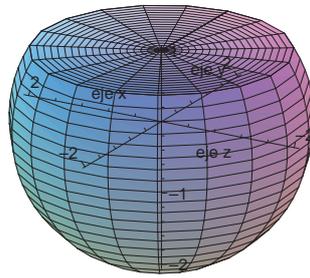


Figura 9. Sólido del Ejemplo 3.7.

Optando por esta segunda vía, el problema se simplifica notablemente.

□