Integrales impropias múltiples

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Hasta el momento, el dominio de integración C de una integral $\iint_C f$ ha sido un conjunto acotado, y el integrando f se ha elegido acotado en C.

Interesa ahora extender la definición de integral para permitir conjuntos C o integrandos f no acotados. A estas nuevas integrales se les llamará *impropias* o *generalizadas*, frente a las integrales consideradas hasta ahora, que acostumbran a denominarse *propias*.

En lo que sigue supondremos $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$. Si M es un conjunto medible Jordan en $\mathbb{R}^p$ y f es integrable en M, la integral de Riemann de f sobre M será denotada $\int_M f$.

Definición 1.1. *Sean $C \subset \mathbb{R}^p$, $f : C \to \mathbb{R}$. Una* sucesión básica para la integración de f en C *es una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de C, verificando:*

(i) *Cada M_n $(n \in \mathbb{N})$ es compacto y medible Jordan.*

(ii) *Se tiene: $M_n \subset M_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.*

(iii) *Todo subconjunto compacto y medible Jordan M de C está contenido en algún M_n.*

(iv) *La función f es integrable en M_n $(n \in \mathbb{N})$.*

Definición 1.2. *Se dice que f es* integrable en C *si cualquiera que sea la sucesión básica $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en C, existe*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f$$

(finito o infinito) y es independiente de la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dicho límite se denomina integral *(*convergente *o* divergente*, respectivamente) de f en C, y se denota*

$$\int_{\to C} f \qquad \text{ó} \qquad \int_C f.$$

Si este límite no existe, o es diferente para dos sucesiones básicas distintas, se dice que f no es integrable en *C, o bien que la integral $\int_{\to C} f$* no existe *o es* oscilante.

Ejemplo 1.3. *Comprobar que no existe $\int_{\to C} f$, siendo*

$$f(x,y) = \frac{y-x}{xy} \quad ((x,y) \in C), \qquad C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\right\}.$$

RESOLUCIÓN. Sea

$$C(\varepsilon,\delta)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<\varepsilon\le x\le 1,\ 0<\delta\le y\le 1\right\}\qquad (0<\varepsilon,\delta<1).$$

Entonces:

$$\int_{C(\varepsilon,\delta)} f=\int_\delta^1 dy\int_\varepsilon^1\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx=(1-\varepsilon)\log\delta-(1-\delta)\log\varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon=\delta=1/n$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C(1/n,1/n)} f=0.$$

Tomando $\varepsilon=1/n$, $\delta=2/n$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C(1/n,2/n)} f=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2+\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=\log 2.$$

Puesto que para diferentes valores de ε y δ se obtienen límites distintos, la integral $\int_{\to C} f$ no existe. $\square$

2. Caracterización de la integrabilidad impropia

Proposición 2.1. *Sean $C\subset\mathbb{R}^p$, $f : C\to\mathbb{R}$ tales que existe alguna sucesión básica para la integración de f en C.*

(i) Si $f(\bar{x})\ge 0$ $(\bar{x}\in C)$ entonces existe $\int_{\to C} f$ y

$$\int_{\to C} f=\sup\left\{\int_M f : M\subset C,\ M \text{ compacto, medible Jordan}\right\}.$$

La integral será convergente o divergente según que este supremo sea finito o infinito.

(ii) Si f tiene signo variable, consideramos las partes positiva *y* negativa *de f, dadas, respectivamente, por:*

$$f^+=\max\{f,0\},\qquad f^-=-\min\{f,0\}.$$

La integral $\int_{\to C} f$ existe y es convergente (respectivamente, divergente) si las integrales

$$\int_{\to C} f^+,\qquad \int_{\to C} f^-,$$

que siempre existen, son ambas convergentes (respectivamente, una convergente y la otra divergente). Si ambas divergen entonces $\int_{\to C} f$ no existe.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i), nótese que si f es no negativa entonces existe $\int_{\to C} f$. En efecto, sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica. Como $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es no decreciente y f es no negativa, la sucesión $\left\{\int_{M_n} f\right\}_{n=1}^{\infty}$ es no decreciente y tendrá un límite, digamos s, que es igual al supremo del conjunto

$$I = \left\{ \int_{M_n} f : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Llamando

$$I' = \left\{ \int_{M} f : M \subset C,\ M \text{ compacto, medible Jordan} \right\}$$

y $s' = \sup I'$ encontramos que $s \leq s'$, porque cada M_n $(n \in \mathbb{N})$ es compacto y medible, y también $s' \leq s$, porque cada M está contenido en algún M_n. Consecuentemente $s = s'$, como se pretendía.

Para probar (ii), observamos que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Por tanto,

$$f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right), \qquad f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right).$$

Ya que f y $|f|$ son integrables en cada M_n $(n \in \mathbb{N})$, resulta que f^+ y f^- también lo son. Sigue que $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es asimismo una sucesión básica para la integración de f^+ y f^- en C. Pero estas funciones son positivas y, por tanto, integrables en C: existen $s^+ = \int_{\to C} f^+$, $s^- = \int_{\to C} f^-$. Luego,

$$\int_{\to C} f = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{M_n} f^+ - \int_{M_n} f^- \right) = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f^+ - \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f^-,$$

de modo que $\int_{\to C} f$ valdrá:

- $s^+ - s^-$, si ambos límites son finitos;
- $+\infty$, en caso de que s^+ sea infinito y s^- finito; o bien,
- $-\infty$, cuando s^+ sea finito y s^- infinito.

Si s^+ y s^- son ambos infinitos, la integral $\int_{\to C} f$ no existe. $\square$

Ejemplo 2.2. *(i) Comprobar que*

$$I = \iint_{\mathbb{R}}^{2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

es convergente y hallar su valor.

(ii) Calcular

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

RESOLUCIÓN. La integral I existe porque su integrando es no negativo. Consideramos la sucesión básica

$$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le n^2\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Efectuando un cambio a polares:

$$\iint_{B_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n re^{-r^2}\, dr = \pi(1-e^{-n^2}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

así que

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint_{B_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \pi.$$

Para calcular J elegimos la sucesión básica

$$C_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le n,\ |y| \le n\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Se tiene:

$$\iint_{C_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-n}^{n} dx \int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\, dy = \left(\int_{-n}^{n} e^{-t^2}\, dt\right)^2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

con

$$\pi = I = \lim_{n\to\infty} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-n}^{n} e^{-t^2}\, dt\right)^2 = J^2.$$

Consecuentemente, $J = \sqrt{\pi}$. □

Ejemplo 2.3. *Sean*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+1)(y^4-x^4)}, \qquad C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ -\frac{1}{3}x \le y \le \frac{1}{2}x\right\}.$$

Comprobar que la integral doble impropia $\int_{\to C} f$ converge y calcular su valor.

RESOLUCIÓN. Ya que $|y| \leq x$ para todo $(x,y) \in C$, el integrando tiene denominador negativo y, por tanto, será positivo o negativo según que y sea negativo o positivo, respectivamente.

Pongamos

$$C^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ -\frac{1}{3}x \leq y \leq 0 \right\}, \qquad C^- = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x \right\},$$

y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x \leq n,\ -\frac{1}{3}x \leq y \leq 0 \right\}, \qquad C_n^- = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x \right\}.$$

Entonces:

$$\int_{C_n^+} f^+ = \int_{1/n}^{n} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \int_{-x/3}^{0} \frac{y}{y^4 - x^4}\,dy = \left(\operatorname{arc\,tg} n - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \right) \left(\frac{\log 5}{4} - \frac{\log 2}{2} \right),$$

$$\int_{C_n^-} f^- = -\int_{1/n}^{n} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \int_{0}^{x/2} \frac{y}{y^4 - x^4}\,dy = \left(\operatorname{arc\,tg} n - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \right) \left(\frac{\log 5}{4} - \frac{\log 3}{4} \right).$$

Ahora:

$$\int_{\to C} f^+ = \int_{\to C^+} f^+ = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n^+} f^+ = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} n - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \right) \left(\frac{\log 5}{4} - \frac{\log 2}{2} \right) = \frac{\pi}{8} \log \frac{5}{4},$$

$$\int_{\to C} f^- = \int_{\to C^-} f^- = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n^+} f^+ = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} n - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \right) \left(\frac{\log 5}{4} - \frac{\log 3}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \log \frac{5}{3}.$$

Concluimos que

$$\int_{\to C} f = \int_{\to C} f^+ - \int_{\to C} f^- = \frac{\pi}{8} \log \frac{3}{4},$$

como se pretendía. □

3. Convergencia y convergencia absoluta

Definición 3.1. *Una integral impropia múltiple $\int_{\to C} f$ se dice* absolutamente convergente *si $\int_{\to C} |f|$ es convergente.*

Recordemos que una integral múltiple impropia $\int_{\to C} f$ es el límite de integrales del tipo $\int_{M_n} f$ $(n \in \mathbb{N})$, donde la sucesión básica $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende monótonamente a C cuando $n \to \infty$. La exigencia de que dicho límite exista y sea el mismo para cualquier sucesión básica $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de tal magnitud que con la anterior definición sólo resultan convergentes aquellas integrales impropias múltiples que son absolutamente convergentes.

La siguiente Proposición 3.2 demuestra que, en efecto, **para las integrales impropias múltiples, los conceptos de convergencia y convergencia absoluta son equivalentes**.

Proposición 3.2. *Sean $C \subset \mathbb{R}^p$, $f : C \to \mathbb{R}$ tales que existe alguna sucesión básica para la integración de f (y, por tanto, de $|f|$) en C. Se verifica:*

(i) Si la integral impropia $\int_{\to C} |f|$ (que existe) es convergente, entonces existe y es convergente la integral impropia $\int_{\to C} f$. En otras palabras, toda integral absolutamente convergente es convergente.

(ii) Si f es integrable en C y la integral impropia $\int_{\to C} f$ es convergente, entonces la integral $\int_{\to C} |f|$ (que existe) es convergente. En otras palabras, toda integral convergente es absolutamente convergente.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica para la integración de f y $|f|$ en C. Para establecer (i), observamos que si f es integrable en cada M_n $(n \in \mathbb{N})$ lo mismo ocurre con $|f|$ y, por lo tanto, con f^+ y f^-. Como

$$0 \le f^+(\bar{x}) \le |f(\bar{x})| \qquad \text{y} \qquad 0 \le f^-(\bar{x}) \le |f(\bar{x})| \qquad (\bar{x} \in C),$$

de la convergencia de $\int_{\to C} |f|$ se sigue la de $\int_{\to C} f^+$ y $\int_{\to C} f^-$, concluyéndose que $\int_{\to C} f$ es convergente.

Para establecer (ii), asumiendo que $\int_{\to C} f$ es convergente, queremos ver que $\int_{\to C} |f|$ también lo es. A tal fin, procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\int_{\to C} f$ converge y $\int_{\to C} |f|$ diverge. Ya que $\int_{\to C} |f|$ diverge, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} |f| = +\infty,$$

existe una subsucesión $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\int_{M_{n_{k+1}}} |f| > 3 \int_{M_{n_k}} |f| + 2n_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Por simplicidad en la notación renombramos la sucesión básica $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ resultante como $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$. Llamando $D_n = M_{n+1} \setminus M_n$ se obtiene

$$\int_{M_{n+1}} |f| = \int_{M_n} |f| + \int_{D_n} |f| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

y, por tanto,

$$\int_{D_n} |f| > 2\int_{M_n} |f| + 2n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

De otra parte, ya que

$$\int_{D_n} |f| = \int_{D_n} f^+ + \int_{D_n} f^- \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

alguna de las integrales del segundo miembro debe ser mayor o igual que la mitad del primero para infinitos valores de n. No se pierde generalidad suponiendo que

$$\int_{D_n} f^+ \geq \frac{1}{2}\int_{D_n} |f|$$

para una infinidad de valores de n. Retenemos la subsucesión de $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la que esto se verifica y, como antes, para simplificar la notación continuaremos llamando $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ a las correspondientes subsucesiones. De nuevo, esta última es una sucesión básica para la integración de f en C.

Puesto que

$$\int_{D_n} f^+ \geq \frac{1}{2}\int_{D_n} |f| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

de (1) se infiere:

$$\int_{D_n} f^+ > \int_{M_n} |f| + n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, f^+ es integrable en D_n. Por tanto, existe una partición $P_n = \{I_1, \ldots, I_{m_n}\}$ de un rectángulo Q que contiene a D_n tal que la suma inferior $L(f_n^+, P_n)$ (donde f_n^+ denota la extensión de f^+ a Q que se anula fuera de D_n) satisface

$$L(f_n^+, P_n) > \int_{M_n} |f| + n,$$

esto es,

$$\sum_{i=1}^{m_n} \operatorname{ínf}\{f_n^+(I_i)\}|I_i| > \int_{M_n} |f| + n. \tag{2}$$

Como $\operatorname{ínf}\{f_n^+(I_i)\} \geq 0$ para todo I_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq m_n)$, la suma anterior puede ser extendida solamente a los I_i en los que $\operatorname{ínf}\{f_n^+(I_i)\} > 0$, en cuyo caso $\operatorname{ínf}\{f_n^+(I_i)\} = \operatorname{ínf}\{f^+(I_i)\}$. Denotemos por R_n a la unión de tales $I_i \in P_n$. Nótese que $R_n \subset D_n$ (pues si I_i no está contenido en D_n, entonces $\operatorname{ínf}\{f_n^+(I_i)\} = 0$), y también que f es positiva en todo punto de R_n, con lo cual $f(\bar{x}) = f^+(\bar{x})$ $(\bar{x} \in R_n)$. Así, la relación (2) se puede escribir en la forma

$$\sum_{I_i \subset R_n} \operatorname{ínf}\{f(I_i)\}\,|I_i| > \int_{M_n} |f| + n,$$

donde el primer miembro de esta desigualdad no supera a $\int_{R_n} f$.

Consecuentemente, obtenemos:

$$\int_{R_n} f > \int_{M_n} |f| + n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Por otra parte, $f \geq -|f|$ implica

$$\int_{M_n} f > -\int_{M_n} |f| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

La suma de esta desigualdad con (3) proporciona

$$\int_{M'_n} f > n, \qquad M'_n = M_n \cup R_n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Obsérvese que $R_n \cap M_n = \emptyset$, por cuanto $R_n \subset D_n = M_{n+1} \setminus M_n$.

La sucesión $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica para la integración de f en C, toda vez que $M_n \subset M'_n \subset M_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ya que $\int_{\to C} f$ converge, lo mismo debe ocurrir con la sucesión $\left\{\int_{M'_n} f\right\}_{n=1}^{\infty}$, contradiciendo (4). Esto completa la demostración. □

4. Criterios de convergencia

Supongamos que se pretende estudiar la convergencia y, en su caso, hallar el valor de una integral impropia $\int_{\to C} f$. Como $\int_{\to C} f$ es convergente si, y sólo si, $\int_{\to C} |f|$ lo es (Proposición 3.2), basta disponer de criterios de convergencia para $\int_{\to C} |f|$; y esta última integral será convergente o divergente, pero nunca oscilante (Proposición 2.1). Así:

- Si $\int_{\to C} |f|$ converge, entonces $\int_{\to C} f$ converge.
- Si $\int_{\to C} |f|$ diverge, entonces $\int_{\to C} f$ diverge u oscila.

En el supuesto de que procediendo en la forma anterior se supiera que $\int_{\to C} f$ es convergente, podríamos calcularla recurriendo a cualquier sucesión básica $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en C:

$$\int_{\to C} f = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f.$$

La elección de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ se hará de forma que el cálculo efectivo de las integrales $\int_{M_n} f$ $(n \in \mathbb{N})$ y de su límite resulte lo más sencillo posible.

Interesa entonces disponer de algunos criterios de convergencia para integrandos no negativos, que recogemos en la siguiente:

Proposición 4.1. *Sean $C \subset \mathbb{R}^p$ y f, g funciones no negativas definidas sobre C.*

(i) Si existe alguna sucesión básica $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en C, entonces f es integrable sobre C. La condición necesaria y suficiente para que la integral $\int_{\to C} f$ converja es que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f < +\infty,$$

o, equivalentemente, que $\left\{\int_{M_n} f\right\}_{n=1}^{\infty}$ esté acotada.

(ii) Si existe alguna sucesión básica $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f y g en C, si $f \leq g$ en C, y si $\int_{\to C} g$ converge, entonces $\int_{\to C} f$ converge.

DEMOSTRACIÓN. El aserto (i) es consecuencia inmediata de la Proposición 2.1. De (i) y de la relación

$$\int_{M_n} f \leq \int_{M_n} g \qquad (n \in \mathbb{N})$$

se deduce (ii). □

Ejemplo 4.2. *Calcular el valor de la integral I y estudiar si es convergente la integral J, siendo*

$$I = \iint_{\to C} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad J = \iint_{\to C} \frac{\operatorname{sen}^3(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy, \qquad C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\right\}.$$

RESOLUCIÓN. El integrando en I es no negativo; por tanto I existe, y para calcularla podemos tomar cualquier sucesión básica. Elegimos

$$M_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \varepsilon_n^2\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

siendo $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente a 1. Efectuando un cambio a polares obtenemos

$$\iint_{M_n} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varepsilon_n} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = -2\pi\,\sqrt{1-r^2}\Big|_0^{\varepsilon_n} = 2\pi\left(1-\sqrt{1-\varepsilon_n^2}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

así que
$$I = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(1-\sqrt{1-\varepsilon_n^2}\right) = 2\pi.$$

La integral J es absolutamente convergente por comparación. $\square$