Integrales paramétricas propias

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Muchas de las funciones que se manejan en Análisis Matemático no se conocen mediante expresiones elementales, sino que vienen dadas a través de series o integrales.

Un tipo particular de estas funciones son las llamadas *integrales paramétricas* o *integrales dependientes de parámetros*. Ejemplo de ellas son las expresiones del tipo

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda),$$

donde $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N},\ p \geq 1)$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, y

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

es integrable Riemann en $[a,b]$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

El conocimiento de la regularidad y propiedades del integrando f nos permitirá decidir sobre la regularidad y propiedades de la integral paramétrica F, aun cuando no se disponga de una expresión explícita de F. Una técnica frecuentemente utilizada para el cálculo de determinadas integrales consiste en diferenciar o integrar una integral paramétrica auxiliar.

En lo que sigue, p y q denotarán enteros positivos cualesquiera.

2. Tipos de integrales paramétricas

2.1. Simples

2.1.1. Límites fijos

Definición 2.1. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$*;* $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$*; y*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times I & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda, \cdot)$ *es integrable Riemann sobre I, para cada* $\lambda \in \Lambda$*. La función*

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

se llama integral paramétrica simple con límites de integración fijos y parámetro $\lambda \in \Lambda$.

2.1.2. Límites variables

Definición 2.2. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$*;* $a : \Lambda \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ *funciones acotadas, satisfaciendo* $a(\lambda) \leq b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$*;*

$$S(a,b) = \left\{(\lambda,x) \in \mathbb{R}^{p+1} \,:\, \lambda \in \Lambda,\, a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda)\right\};$$

y

$$\begin{array}{rccc} f: & S(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda,x) & \mapsto & f(\lambda,x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda,\cdot)$ *es integrable Riemann sobre* $[a(\lambda),b(\lambda)]$*, para cada* $\lambda \in \Lambda$*. La función*

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

se llama integral paramétrica simple con límites de integración variables y parámetro $\lambda \in \Lambda$.

2.2. Múltiples

Definición 2.3. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$*;* $M \subset \mathbb{R}^q$*, medible Jordan; y*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times M & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda,x) & \mapsto & f(\lambda,x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda,\cdot)$ *es integrable Riemann sobre* M*, para cada* $\lambda \in \Lambda$*. La función*

$$F(\lambda) = \int_M f(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

se llama integral paramétrica múltiple con parámetro $\lambda \in \Lambda$.

2.3. Reducción de integrales del tipo 2.1.2 al tipo 2.1.1

Proposición 2.4. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $a : \Lambda \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ *funciones acotadas, satisfaciendo* $a(\lambda) \leq b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$;

$$S(a,b) = \left\{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \ : \ \lambda \in \Lambda, \ a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda)\right\};$$

y

$$\begin{array}{rccc} f: & S(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda, \cdot)$ *es continua en* $[a(\lambda), b(\lambda)]$, *para cada* $\lambda \in \Lambda$. *Se verifica:*

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx = \int_0^1 g(\lambda, t) dt,$$

donde

$$g(\lambda, t) = f\left(\lambda, a(\lambda) + [b(\lambda) - a(\lambda)]\, t\right)[b(\lambda) - a(\lambda)] \qquad (\lambda \in \Lambda, \ t \in [0,1]).$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\lambda \in \Lambda$, consideramos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda : & [0,1] & \to & [a(\lambda), b(\lambda)] \\ & t & \mapsto & \varphi_\lambda(t) = a(\lambda) + [b(\lambda) - a(\lambda)]\, t. \end{array}$$

Esta aplicación es una biyección C^∞ con inversa C^∞, y, por tanto, puede ser tomada como un cambio de variable para aplicar la regla de integración por sustitución:

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx = \int_0^1 f\left(\lambda, \varphi_\lambda(t)\right) \varphi_\lambda'(t)\, dt = \int_0^1 g(\lambda, t)\, dt \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Se obtiene así el resultado pretendido. □

3. Continuidad de las integrales paramétricas

Seguidamente enunciamos los resultados pertinentes para cada tipo. Como 3.1.2 se reduce a 3.1.1 (Proposición 2.4) y la Proposición 3.1 es un caso particular de la Proposición 3.3, sólo probaremos esta última.

3.1. Simples

3.1.1. Límites fijos

Proposición 3.1. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$*;* $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$*; y*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times I & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

(i) Λ *es compacto, y*

(ii) f *es continua,*

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es uniformemente continua sobre Λ*.*

3.1.2. Límites variables

Proposición 3.2. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$*;* $a : \Lambda \to \mathbb{R}$*,* $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ *funciones que satisfacen* $a(\lambda) \leq b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$*;*

$$S(a,b) = \left\{ (\lambda, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \;:\; \lambda \in \Lambda,\, a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda) \right\};$$

y

$$\begin{array}{rccc} f: & S(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

(i) Λ *es compacto, y*

(ii) a, b *y* f *son continuas,*

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\,dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es uniformemente continua sobre Λ.

3.2. Múltiples

Proposición 3.3. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $M \subset \mathbb{R}^q$, *medible Jordan; y*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times M & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

(i) Λ *y* M *son compactos, y*

(ii) f *es continua,*

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_M f(\lambda, x)\,dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es uniformemente continua sobre Λ.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que f es continua, es continua en cada variable; luego, $f(\lambda, \cdot)$ es integrable Riemann sobre M para todo $\lambda \in \Lambda$, y F existe.

Como Λ se supone compacto, sólo tenemos que comprobar que F es continua sobre Λ, es decir, que F es continua en cada $\lambda_0 \in \Lambda$.

Pongamos

$$|M| = \int_M dx.$$

Si $|M| = 0$, F es idénticamente nula, y no hay nada que probar. Por tanto, supondremos $|M| > 0$.

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$, y sea $\varepsilon > 0$. Al ser f continua en $\Lambda \times M$, que es compacto (producto cartesiano de compactos),

f es uniformemente continua en $\Lambda \times M$. Así, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda \in \Lambda$ y $\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x)\| < \delta$ implica

$$|f(\lambda,x) - f(\lambda_0,x)| < \frac{\varepsilon}{|M|} \qquad (x \in M).$$

Claramente

$$\|\lambda - \lambda_0\| = \|(\lambda,x) - (\lambda_0,x)\| \qquad (\lambda \in \Lambda,\ x \in M),$$

donde en el primer miembro tomamos la norma de $\mathbb{R}^p$ y en el segundo la de $\mathbb{R}^{p+q}$. Luego, para $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left| \int_M f(\lambda,x)\,dx - \int_M f(\lambda_0,x)\,dx \right| \\ &= \left| \int_M [f(\lambda,x)\,dx - f(\lambda_0,x)]\,dx \right| \\ &\leq \int_M |f(\lambda,x) - f(\lambda_0,x)|\,dx \\ &< \frac{\varepsilon}{|M|} \int_M dx = \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 3.4. *En las hipótesis de las anteriores Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3, respectivamente, y para $\lambda_0 \in \Lambda$, los siguientes límites existen y pueden calcularse como se indica:*

(i) $\displaystyle \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_a^b f(\lambda,x)\,dx = \int_a^b f(\lambda_0,x)\,dx;$

(ii) $\displaystyle \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda,x)\,dx = \int_{a(\lambda_0)}^{b(\lambda_0)} f(\lambda_0,x)\,dx;$

(iii) $\displaystyle \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_M f(\lambda,x)\,dx = \int_M f(\lambda_0,x)\,dx.$

4. Derivación de integrales paramétricas

Los resultados sobre derivación de integrales paramétricas que estudiaremos a continuación se conocen como *regla de Leibniz*. Puesto que la Proposición 4.1 es un caso particular de la Proposición 4.3, sólo demostraremos las Proposiciones 4.3 y 4.2.

4.1. Simples

4.1.1. Límites fijos

Proposición 4.1. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$; *y*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times I & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

(i) Λ *es abierto, y*

(ii) f *es continua, con derivada parcial* $\partial f/\partial \lambda_i$ *continua en* $\Lambda \times I$ *para algún* $i = 1, \ldots, p$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Lambda)$,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es derivable respecto de λ_i, *teniéndose que*

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \int_a^b f(\lambda, x)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

4.1.2. Límites variables

Proposición 4.2. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $a : \Lambda \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ *funciones acotadas, satisfaciendo* $a(\lambda) \leq b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$;

$$S(a,b) = \left\{ (\lambda, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \,:\, \lambda \in \Lambda,\, a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda) \right\};$$

U *abierto en* $\mathbb{R}^{p+1}$ *que contiene a* $S(a,b)$; *y*

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

(i) Λ *es abierto, y*

(ii) a, b *y* f *son continuas, con derivadas parciales* $\partial a/\partial\lambda_i$, $\partial b/\partial\lambda_i$ *y* $\partial f/\partial\lambda_i$ *continuas en sus respectivos dominios para algún* $i = 1, \ldots, p$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Lambda)$,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es derivable respecto de λ_i*, teniéndose que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx \\ &= \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx + \frac{\partial b(\lambda)}{\partial \lambda_i} f(\lambda, b(\lambda)) - \frac{\partial a(\lambda)}{\partial \lambda_i} f(\lambda, a(\lambda)) \qquad (\lambda \in \Lambda). \end{aligned}$$

4.2. Múltiples

Proposición 4.3. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $M \subset \mathbb{R}^q$*, medible Jordan; y*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times M & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

(i) Λ *es abierto;*

(ii) M *es compacto; y*

(iii) f *es continua, con derivada parcial* $\partial f/\partial\lambda_i$ *continua para algún* $i = 1, \ldots, p$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Lambda)$,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_M f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es derivable respecto de λ_i*, teniéndose que*

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \int_M f(\lambda, x)\, dx = \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 4.1 es un caso particular de la Proposición 4.3, por lo que sólo demostraremos las Proposiciones 4.3 y 4.2.

Demostración de la Proposición 4.3

Como antes, suponemos $|M| > 0$.

Fijemos $\lambda \in \Lambda$. Queremos ver que existe $\partial F(\lambda)/\partial \lambda_i$ y se calcula como se afirma.

Puesto que Λ es abierto, para algún $r_\lambda > 0$ se cumple que la bola cerrada de centro λ y radio r_λ en $\mathbb{R}^p$,

$$B(\lambda, r_\lambda) = \{\mu \in \mathbb{R}^p : \|\lambda - \mu\| \leq r_\lambda\},$$

está contenida en Λ.

Sea e_i el i-ésimo vector unitario canónico de $\mathbb{R}^p$. Debemos demostrar:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{F(\lambda + \rho e_i) - F(\lambda)}{\rho} = \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx.$$

La función

$$\rho \mapsto f(\lambda + \rho e_i, x)$$

depende de $x \in M$ y está definida para $|\rho| \leq r_\lambda$, pues, en tal caso, $\lambda + \rho e_i \in B(\lambda, r_\lambda) \subset \Lambda$:

$$\|(\lambda + \rho e_i) - \lambda\| = \|\rho e_i\| = |\rho|\|e_i\| = |\rho| \leq r_\lambda.$$

Por el teorema de los incrementos finitos,

$$\begin{aligned}
\frac{F(\lambda + \rho e_i) - F(\lambda)}{\rho} &= \int_M \frac{f(\lambda + \rho e_i, x) - f(\lambda, x)}{\rho}\, dx \\
&= \int_M \frac{\partial f(\lambda + \theta \rho e_i, x)}{\partial \lambda_i}\, dx
\end{aligned}$$

para cierto $\theta \in]0,1[$, dependiente de $x \in M$ y de $\rho \in [-r_\lambda, r_\lambda]$. Luego,

$$\left| \frac{F(\lambda + \rho e_i) - F(\lambda)}{\rho} - \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx \right| \leq \int_M \left| \frac{\partial f(\lambda + \theta \rho e_i, x)}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i} \right| dx.$$

Como $\partial f/\partial \lambda_i$ es continua en el compacto $B(\lambda, r_\lambda) \times M$, es uniformemente continua en dicho compacto. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\rho| < \delta < r_\lambda$ y $x \in M$, se cumple

$$\left| \frac{\partial f(\lambda + \theta\rho e_i, x)}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i} \right| < \frac{\varepsilon}{|M|}.$$

Concluimos que

$$\left| \frac{F(\lambda + \rho e_i) - F(\lambda)}{\rho} - \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{|M|} \int_M dx = \varepsilon,$$

como se pretendía. $\square$

Demostración de la Proposición 4.2

Nos apoyaremos en la Proposición 4.1, que ya está probada por ser un caso particular de la Proposición 4.3.

Puesto que a, b son continuas en Λ, $S(a,b) \subset U$, y U es abierto, dado $\lambda_0 \in \Lambda$ existen $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$ tales que $C_0 \subset U$, siendo

$$C_0 = U(\lambda_0, \delta_0) \times [a(\lambda_0) - h_0, b(\lambda_0) + h_0];$$

aquí,

$$U(\lambda_0, \delta_0) = \{\lambda \in \Lambda : \|\lambda - \lambda_0\| < \delta_0\}$$

denota la bola abierta de centro λ_0 y radio δ_0 en $\mathbb{R}^p$.

Ahora, para $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_0$ se tiene

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx = I(\lambda) + I_b(\lambda) - I_a(\lambda), \tag{1}$$

con

$$I(\lambda) = \int_{a(\lambda_0)}^{b(\lambda_0)} f(\lambda, x)\, dx,$$

$$I_a(\lambda) = \int_{a(\lambda_0)}^{a(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx,$$

$$I_b(\lambda) = \int_{b(\lambda_0)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx.$$

La integral $I(\lambda)$ tiene límites de integración fijos, luego le es de aplicación la Proposición 4.1, donde reemplazamos $\Lambda \times I$ por C_0:

$$\left.\frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \int_{a(\lambda_0)}^{b(\lambda_0)} \frac{\partial f(\lambda_0, x)}{\partial \lambda_i}\, dx. \tag{2}$$

Veamos que $I_a(\lambda), I_b(\lambda)$ son derivables en λ_0 respecto de λ_i, y calculemos estas derivadas. Por analogía, basta considerar $I_b(\lambda)$.

Sea e_i el i-ésimo vector unitario canónico de $\mathbb{R}^p$. Se verifica:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial I_b(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{I_b(\lambda_0+\rho e_i) - I_b(\lambda_0)}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} \int_{b(\lambda_0)}^{b(\lambda_0+\rho e_i)} f(\lambda_0+\rho e_i, x)\, dx.
\end{aligned}$$

Por el teorema de la media, existe $\xi = \xi(\rho) \in [b(\lambda_0), b(\lambda_0+\rho e_i)]$ tal que

$$\int_{b(\lambda_0)}^{b(\lambda_0+\rho e_i)} f(\lambda_0+\rho e_i, x)\, dx = f(\lambda_0+\rho e_i, \xi)\,[b(\lambda_0+\rho e_i) - b(\lambda_0)]\,.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial I_b(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} &= \lim_{\rho\to 0} \left[\frac{b(\lambda_0+\rho e_i) - b(\lambda_0)}{\rho} f(\lambda_0+\rho e_i, \xi)\right] \\
&= \left.\frac{\partial b(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} f(\lambda_0, b(\lambda_0)).
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado la existencia de $\partial b(\lambda)/\partial \lambda_i$ en λ_0 y el hecho de que

$$\lim_{\rho\to 0} f(\lambda_0+\rho e_i, \xi) = f(\lambda_0, b(\lambda_0));$$

esto último se deduce de lo siguiente:

(i) $\lim_{\rho\to 0}(\lambda_0+\rho e_i) = \lambda_0$;

(ii) $\lim_{\rho\to 0} b(\lambda_0+\rho e_i) = b(\lambda_0)$ (pues b es continua en λ_0);

(iii) $b(\lambda_0) \le \xi \le b(\lambda_0+\rho e_i)$ implica $\lim_{\rho\to 0} \xi(\rho) = b(\lambda_0)$; y

(iv) f es continua en $(\lambda_0, b(\lambda_0))$.

Hemos probado:

$$\left.\frac{\partial I_b(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \left.\frac{\partial b(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} f(\lambda_0, b(\lambda_0))\,. \tag{3}$$

Similarmente:

$$\left.\frac{\partial I_a(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \left.\frac{\partial a(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\lambda_0} f(\lambda_0, a(\lambda_0)). \tag{4}$$

La combinación de (1), (2), (3) y (4) completa la demostración. □

5. Algunos ejemplos

Ejemplo 5.1. *Calcular*

$$\lim_{t\to 0}\int_1^3 (3x-1)\cos xt\, dx.$$

RESOLUCIÓN. Ya que $f(t,x) = (3x-1)\cos xt$ es continua en $[-1,1]\times[1,3]$, el Corolario 3.4 (i) asegura que

$$\lim_{t\to 0}\int_1^3 (3x-1)\cos xt\, dx = \int_1^3 (3x-1)\left.\cos xt\right|_{t=0} dx = \int_1^3 (3x-1)\, dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_1^3 = 10,$$

resolviendo el ejemplo. □

Ejemplo 5.2. *Sea*

$$I(t) = \int_{t^2}^{t} \operatorname{sen}(x^2+t^2)\, dx.$$

Hallar $I'(t)$.

RESOLUCIÓN. Puesto que $a(t) = t^2$, $b(t) = t$ y $f(t,x) = \operatorname{sen}(x^2+t^2)$ son continuas $(t,x\in\mathbb{R})$, la Proposición 4.2 permite escribir:

$$I'(t) = 2t\int_{t^2}^{t}\cos(x^2+t^2)\, dx + \operatorname{sen}(2t^2) - 2t\operatorname{sen}(t^4+t^2).$$

El ejemplo queda así resuelto. □

Ejemplo 5.3. *Calcular por derivación paramétrica:*

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} \qquad (a>0).$$

RESOLUCIÓN. Para $t > 0$, pongamos

$$I(t) = \int_0^t \frac{dx}{x^2+t^2} = \frac{1}{t} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{t}\Big|_0^t = \frac{\pi}{4t}.$$

En virtud de la Proposición 4.2,

$$I'(t) = -2t \int_0^t \frac{dx}{(x^2+t^2)^2} + \frac{1}{2t^2} = -\frac{\pi}{4t^2}.$$

Luego,

$$\int_0^t \frac{dx}{(x^2+t^2)^2} = \frac{1}{2t}\left(\frac{\pi}{4t^2} + \frac{1}{2t^2}\right) = \frac{\pi+2}{8t^3}.$$

Si ahora definimos

$$J(t) = \int_0^t \frac{dx}{(x^2+t^2)^2} = \frac{\pi+2}{8t^3}$$

y derivamos miembro a miembro, aplicando nuevamente la Proposición 4.2, encontramos que

$$J'(t) = -4t \int_0^t \frac{dx}{(x^2+t^2)^3} + \frac{1}{4t^4} = -\frac{3(\pi+2)}{8t^4}.$$

De aquí,

$$\int_0^t \frac{dx}{(x^2+t^2)^3} = \frac{1}{4t}\left[\frac{3(\pi+2)}{8t^4} + \frac{1}{4t^4}\right] = \frac{3\pi+8}{32t^5}.$$

Haciendo $t = a$, concluimos:

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{3\pi+8}{32a^5},$$

lo que resuelve el ejemplo. □